FRAN. MARIÆ. II. VRBI. PRINCIPI. DICATI.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV.

Unà cum Scholijs antiquis.

À FEDERICO COMMANDINO VRBINATE

NVPER IN LATINVM conuersi, commentarijsque quibusdam illustrati.

PISAVRI, M D LXXII.
Cum Priuilegio Pont. Max.

IACOBVS Chriegher German'.

GREGORII XIII. PONT. MAX.
PRIVILEGIVM.





OTV PROPRIO &c. Cum, ſicut accepimus, dilectus filius Federicus Commandinus Laicus Vrbinatenſis nonnulla noua opera hactenus non impreſſa, videlicet Euclidis elementorum libros quindecim è greco nuper conuerſos, & Ariſtarchi librum de magnitudinibus & diſtantijs Solis & Lunæ, necnon Pappi Alexandrini mathematicarum collectionũ libros ſex. Heronis Alexandrini ſpiritalium librum. Euclidis opera reliqua. Theodoſij de habitationibus librum, eiuſdem de diebus & noctibus libros duos. Autolyci de ortu & occaſu libros duos. eiuſdem de ſphæra, quæ mouetur, librum, & Archimedis opera omnia, ad publicam & communem omnium ſtudioſorum vtilitatem imprimere ſeu imprimi facere intendat, dubitetq́ue ne eiuſmodi opera poſtmodum ab alijs ſine eius licentia imprimantur, quod in maximum ſuum tenderet præiudicium, Nos propterea eius indemnitati conſulere uolentes, eidem Federico, ne prędicta opera omnia & ſingula uel quolibet ipſorum per ipſum Federicum, ſeu de eius ordine poſtquam per ordinarios locorum, & Inquiſitores hereticę prauitatis partium illarum examinata fuerint, imprimenda, per decem annos, poſt eorundem operum uel cuiuſlibet ipſorum impreſſionem, à quocunque vel quibuſcunque ſine ipſius Federici licentia imprimi, aut ab ipſis uel alijs uendi, ſeu in eorum apothecis uel alias uenalia, præter quàm à dicto Federico, uel de eius ordine impreſſa, aut imprimenda teneri poſſint, concedimus & indulgemus. Inhibentes omnibus & ſingulis Chriſti fidelibus tam in Italia, quàm extra eam exiſtentibus, præſertim bibliopolis & librorum impreſſoribus, ſub excommunicationis latæ ſententiæ, in terris uerò Sanctę Ro. Eccleſiæ mediate, uel immediate ſubiectis, etiam quingentorum ducatorum auri Cameræ Apoſtolicę applicandorum, & inſuper ammiſſionis librorum pœnis toties ipſo facto, & abſque alia declaratione incurrendis, quoties contrauentum fuerit. ne intra decem annos prædictos ab impreſſione dictorum, uel cuiuſlibet ipſorum reſpectiue computandos dicta opera, uel quodlibet ipſorum ſine eiuſdem Federici expreſſa licentia dictis decem annis durantibus

* imprimere

imprimere, seu ab ipsis, uel alijs prater, quàm à dicto Federico impressa & imprimenda uendere, seu uenalia habere, uel proponere, uel ea, ut supra, habere audeant. Mandantes uniuersis uenerabilibus fratribus nostris Episcopis, Archiepiscopis, eorumq́ue Vicarijs in spiritualibus generalibus & in statu temporali Sanctæ Ro. Ecclesiæ etiam Legatis et Vicelegatis Sedis Apostolicæ, aut ipsius status Gubernatoribus, ut quoties pro ipsius Federici parte fuerint requisiti, vel eorum aliquis fuerit requisitus, eidem Federico efficacis defensionis præsidio adsistentes, præmissa ad omnem dicti Federici requisitionē contra inobedientes & rebelles per censuras Ecclesiasticas, etiam sæpius aggrauando, & per alia iuris remedia, auctoritate Apostolica exequantur, inuocato etiam ad hoc, si opus fuerit, auxilio brachij secularis. Et insuper quia difficile admodum esset præsentes ad quodlibet forum deferri, uolumus & Apostolica auctoritate decernimus ipsarum transumptis uel exemplis in ipsis operibus impressis plenam & eandem prorsus fidem ubique tam in iudicio, quàm extra haberi, quæ præsenti originali haberetur. Et cum absolutione à censuris ad effectum præsentium. et quod sola signatura sufficiat, præmissis omnibus constitutionibus & ordinationibus Apostolicis, ceterisq́ue in contrarium facientibus non obstantibus quibuscunque.

Placet V.

Datum Romæ apud Sanctum Marcum Non. Septembr. Anno primo.

ILLVSTRISSIMO ATQVE EXCELLENTISSIMO FRANCISCO MARIAE II VRBINATVM PRINCIPI.



VM mihi in mentem venit Illustrissime Princeps quanta mathematicę facultatis olim apud veteres illos felicioris certe seculi, atque ingenij homines, & celebritas, & dignitas fuerit; non possum non vehementer dolere temporũ nostrorũ conditionem, qua nobilis disciplinę cultus, & splendor squalore immenso, ac tenebris penitus contabescit, dum vnusquisque detestanda auri cupiditate quicquid certam in se lucri non habet occasionem, statim insolenter abijcit, temereque aspernatur. Exulat iam, publicisque ferè exclusum est gymnasiis nobile hoc, & pulcherrimum matheseos studium, quo nihil iucundius, ac magis domesticum vniuersa quondam habuit græcia. Non est sanè quòd his temporibus vereare, ne triangulis, tetragonisque, aut circulis depictas porticus intueri, aut de huiusmodi rebus loquentes audire cogaris. Iacet omnino, iacet hoc disciplinæ genus, et quod in delitijs olim habebatur, nunc quasi rude, & obscurũ passim reijcitur, vsq; adeo auaritia, cæcaq; diuitiarum libido apud nostræ ætatis homines increbuit. minuitur tamen in dies hic dolor meus, tum quòd ab externis magnæ doctrinæ uiris has artes amanter excitatas, scio diligentissime promoueri: tũ quòd aliquot imperio, ac dignitate florentes iã hęc studia benigne complecti, liberaliterq; fouere uideo: uerum enim illud esse quouis tempore homines sunt experti, qualia fuerint eorum, qui summæ rerum præsunt, eadem & reliquorũ fore studia. quam ob rem si non ad pristinum dignitatis fastigium; ad honestiorem certe gradũ eas breui peruenturas minime despero. idq; ea præsertim ratione, quòd te Princeps Illustrissime, eximia mentis probitate, singulariq; ornatum prudentia, pręclaros omnes animi tui conatus ad compensanda literarum incommoda iam diu conuertisse lætus intueor. neque id iniuria profecto. nam vt illustria, & nunquam interituræ memorię exempla tuæ gentis omittam, Patrem habes incomparabilis iustitiæ, magnanimitatis, & prudentię Ducem, qui artes ingenuas benignitate fouet, auctoritate defendit, & pręmijs ornat. huic te similẽ, ac parem vt pręstes necesse est. Age vero quanti est illud ad confirmandã, augendamque indies per egregiam hanc voluntatem, quòd non solum

* a literas

literas diligis, verum etiam quo semper fuisti mentis acumine, tantos in illis progressus facis, ut omnes qui te noscunt, admiratione, ac gaudio afficiantur incredibili. Vt enim de me dicam, quoties summam ingenij tui præstantiam, atque solertiam in percipiendis Euclidis elementis magna cum voluptate sum admiratus? Hoc tu honestissimo, nec vnquam satis laudato bonarum artium studio inflammatus nuper vertendi, explanandiq'ue Euclidis onus mihi iniunxisti, quòd geometrarum omnium facile principem, tu Princeps optime iniquo patiebare animo, nec recte multis in locis conuersum, nec scite figuris ornatum fuisse. pretereа vero typographorum ita corruptum negligentia, vt non sine maxima studiosorum offensione legi, nedum intelligi posset. Ego vero prouinciam hanc tot difficultatibus impeditam alacri animo suscepi, tum vt optime tuæ voluntatis mandato, quod semper obnixe studui, obtemperarem; tum etiam, vt pro ueteri meo instituto amatores huius disciplinæ quacunque liceret ratione iuuarem. haud enim multis abhinc annis medicinæ, cui me totum dederam, salutem plurimam dixi, vt his me tantum oblectarer studijs, & in eorum cognitione parum de alijs solicitus, conquiescerem; veterumq'ue præstantissima in hoc genere scripta, pro ingenij tenuitate à situ, ac tenebris uindicarem; & meis illustrata commentarijs in lucem, & omnium conspectum non sine aliqua studiosorum gratia proferrem. quod partim iam sumus assecuti, partim summis uigilijs diu, noctuque contendimus. Archimedis enim, Ptolemæi, Apollonij, fereniq'ue excellentium virorum opera nonnulla superioribus annis conuersa à nobis, & explicata quàm accuratissime emisimus. Hoc autem tempore multum laboris, ac diligentiæ in Pappo, Herone, Theodosio, Autolyco, Aristarcho, & alijs, quorum magna pars nec græce, nec latinæ habetur, ponebamus, cum tuo iussu his depositis studium, operam, laborem, & curam denique omnem ad unum Euclidem conuertimus, ut rem à multis tentatam, Deo iuuante ad finem perduceremus. Nam ut pauca de hac re loquar, Orontius quidem Phinæus haud obscuri nominis auctor priores tantum sex libros nulla græci codicis ratione habita edidit. Iacobi uero Peletarij in eadē re labor eo etiā minus probatur, quòd Cāpani le ditionem ex arabica conuersam lingua, magis, quàm græcam sequi uoluerit. Alij autem peracuti sanè ingenij homines ἀναλύσεις geometricas in priores sex libros conscripserunt, cetera tamen non sunt prosecuti. At Candalla uir & generis nobilitate, & rerum cognitione insignis, licet omnes Elementorum libros, qui postulari à latinis uidebātur, latinos fecerit, locupletaueritq'ue, parum tamen (vt audio) eo nomine commendatur,

tur, quod longius iter ab Euclide auerterit; & demonstrationes, quę in græcis codicibus habentur, uelut inelegantes, & mancas suis appositis reiecerit. An uero, quod ab omnibus requiri dicimus, nostra opera præstiterimus, aliorum erit iudicium. Illud quidem uere affirmare possumus, nullam à nobis nec impēsę, nec laboris, nec ualetudinis habitam fuisse rationem, ut hoc geometriæ columen, ac decus non solum expurgatum à mēdis, & figuris eleganter excultum haberent studiosi, uerum etiam summa fide conuersum, & scholijs antiquis, commentarijsq́ue quibusdam nostris illustratū. Hoc igitur qualecumq; ue est meę industriæ testimoniū, nunc tibi magnanime Princeps, cui plurimum debeo, & cupio omnia, dono, dicoq́ue, ut quibus possum officijs meam in te fidem, perpetuamq; que obseruantiam, non modo nostrę ætatis hominibus declarem, sed ipsi etiā posteritati testatam literarum monumentis relinquam. & quod semper uehementissime conatus sum, uere persuadeam, neminem te habere, qui præstantem animi tui uirtutem, egregiamq; ue doctrinam memoria sempiterna apud omnes propagare magis studuerit, ac semper sit ueneratus. vale, & nos, liberalesq́ue disciplinas, quod facis, tuere, & adiuua.

Federicus Commandinus.

Federici Commandini in elementa Euclidis prolegomena.



QVOD plerique interpretum, atque eorum præsertim, qui maxime laudantur, facere solent, vt antequam evoluendi clarorum virorum monumenta, ac scripta, quæ sibi pro reipublicæ literariæ commodo explicanda, exornanda, sumpsere, initium faciant, quædam primo loco differant: idem & nobis huius tam præclari operis initio faciendum putaui. neque enim dubium est, quin rudis adhuc lectoris animus de re vniuersa à principio admonitus, minori postea cum labore, ac breuiori tempore conformetur ad vnumquodque intelligendum. Primum igitur non nulla summatim de hac tam nobili mathematicarum artium facultate dicemus, quæ nam subiecta illis materia sit, tum generatim, tum particulatim, quis ordo, ac dignitatis gradus, quæ sit earundem diffinitio, quis ortus. Deinde vero miram ipsarum ad humanos vsus opportunitatem paucis ad modum enarrabimus. Post de Auctore, videlicet de Euclide ipso, de operis inscriptione, de scopo, ac de ipsis demonstrationibus, deque eorum, quæ in his libris complexus est, dispositione, & methodo quædam minime inutilia attingemus. Denique summam vniuersæ στοιχειώσεως eo consilio adiungemus, vt non [illegible] lum facilius quicquid de hoc genere præcipit Euclides intelligatur, verum etiam vt fidelius memoriæ mandatum custodiatur. Itaque philosophiam omnem, quæ in contemplatione versatur, quæ clarissimi philosophorum in tres partes distributam nobis ex dicta ratione tradiderunt, quod rerum aliæ prorsus materiei quasi labe, ac cœno carentes solæ per se subsistunt, atque intelliguntur: aliæ vero diuersam penitus materiam ab his sortitæ, sic materiæ innituntur, vt nullo pacto absque illa possint consistere; aliæ denique medium inter has naturæ, ac dignitatis locum obtineant; tum quod omni vacant materia, si accuratiori studio veram illarum conditionem inspexeris, tum quod materia præditæ quodam modo videantur, quia sine aliqua eius adiunctione ob ingenij nostri imbecillitatem cognosci nequeunt. Hinc triplex illud philosophiæ genus, Diuinum, quod quidem vt nomine, ita & re duo reliqua supra quàm dici potest, antecellit; Naturale, quod tertium est, ac postremas ordine, ac dignitate habet partes; & medium, quod mathematicum appellatur. quoniam solum vere disci, ac sciri potest, ob summam rei subiectæ constantiam, & certam demonstrandi rationem: Hoc quidem vt diuinis substantijs inferius est (quid enim tam eximium, vt cum illis comparetur?) ita naturalibus præstat, atque superius est; quæ materiæ funditus immersæ, variam, & mutabilem eius sequuntur naturam. Hoc primum ab ijs inuentum est hominibus, qui ante orbis terrarum eluuiem cum feliciori fruerentur & cœlo, & ingenio, sapientiam rerum cœlestium, admirabilemque mundi ornatum animaduerterunt; ac duabus columnis erectis, quarum altera quidem lapidea, altera vero lateritia, quæ inuenerãt, diligentissime inscripserunt, ne aut aquarum inundatione, aut incendio, quorum alterum euenturum prædictione veterum nouerant, tantarum rerum notitia dilaberetur. quare nec primis illis temporibus, quæ tam inculta creduntur, nobile matheseos studium incultum iacuit. Hoc post terrarum eluuionem apud chaldæos summo præsertim Abrahami diuini propè hominis studio ornatum, & auctum viguit. Idem Aegyptij homines cum ob perpetuam cœli serenitatem, tum ob magnam locorum planitiem ad hoc genus scientiæ nati à Chaldæis acceptum summopere excoluerunt. Ab Aegyptijs ad græcos, quibus nec ingenij acumine, nec sciendi cupiditate quemque merito anteposueris, translatum est, Thaletis Milesij, Pytagoræ Samij, aliorumque excellentium hominum industria, quos scientiæ amor & vasta maria trãsire, & [illegible] peragrare regiones coegit, & præcipue Aegyptum, vbi, si græcis credimus, natæ & auctæ sunt mathematicæ disciplinæ. quas postea & exercitatione, & scriptis illustrarunt Anaxagoras, Oenopides, Zenodotus, Brito, Antiphon, Hippocrates, Theodorus, Plato, Theætetus, Archytas, [illegible], Aristarcus, Archimedes, aliique innumerabiles, qui hac eximia, præstantique matheseos [illegible] mortales propè cunctos in sui admirationem conuerterunt. Verum de his hactenus, neque enim [illegible] storiam hic contexere propositum est. sed hæc pauca attigimus, vt antiquam [illegible] tem obiter quasi digito ostenderemus. Nunc de materia & præcipuis Mathematicæ facultatis [illegible]

[illegible]

tibus, illarumq́; ordine breuiter dicatur. Mathematicę omnes circa quantitatem versantur, atque illius præsidio quicquid moliuntur efficiunt. hinc facile est cognoscere, quot, & quæ sint huius disciplinę partes. Quis enim ignorat quantitatem aliam esse continuam, aliam vero discretam? & harum vtramque bifariam diuidi, quòd continua sit mutabilis, et immutabilis. discreta vero per se & ad aliquid, ita ut quadruplex quoque sit matheseos genus. scientia igitur, quæ magnitudines, et figuras continuas, non mobiles contemplatur, Geometrię sibi nomen vindicat. & est scientia quantitatis continuæ, atque immobilis positione. quæ vero mobilem, & continuam contemplatur quantitatem Astronomia dicitur & est cognitio quantitatis continuæ semper mobilis, & eorum, quæ illius motu accidũt. Eodem modo quantitatem discretam Arithmetica obtinet, quæ numerum aut parem, aut imparem non ad alium comparando, sed per se considerat. estq́; scientia discretę quantitatis, ac per se cognitæ. Musica circa mutuam sonorum uersatur habitudinem, ex quibus harmonia efficitur, ob discretam quidem, sed tamen alia ratione coniunctam quantitatem: & est discretæ quantitatis inuicem comparatæ atque ad aliquid cognitio. sed antequã ceteras matheseos species enumeremus, explicanda nobis est ratio, & modus aperiendus, quo mathematicis quantitatem & continuam, & discretam pro subiecto, eruditorum auctoritate substerni dicimus: neque enim de quoto, quod in sensilibus ipsis est, nec de quanto, quod circa corpora excogitatur, est absolute intelligendum, physici enim potius, quàm mathematici finibus continetur hęc contemplatio. Eorum igitur quæ naturali corpori insunt, nec ab eo separãtur, alia quidem nec re, nec cogitatione remoueri queunt, ut calor frigus, siccitas, quòd illa qua naturale est corpus, obtineat, alia vero etiam si re ipsa disiungi minime queant, animi tamen cogitatione fingimus abesse, eò quòd per accidens, non sunt per se, nec quatenus natura præditum est corpus, hęc habeat, qualia sunt rectũ, curuũ, inflexũ, ceteraq́; id genus. Mathematicus igitur hoc pacto ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως circa quantitatem, formasq́; à materia separabiles uersatur: & earum diffinitiones tradit, materiam non attingens. Quid est linea? μῆκος ἀπλατὲς, longitudo latitudinis expers. quid est triangulum? figura, quæ tribus rectis lineis continetur. & circulus figura, quæ ab vna comprehenditur linea. nulla hic materiæ mentio est, nullum eius vestigium ob allatam modo rationem. nemo tamen suspicetur mathematicas aliquo errore labi, quod ita infirmo, ac debilis nitantur subiecto, quòd sola cogitatione conceptum possideatur. nam imaginatione quidem Geometra tamquam abaco vtitur, magnitudines diuidendo, interualla dimetiendo, & lineas describendo. hæc tamen omnia, non vt figmenta quędam, sed vt res quasdam, quę non nullam habent cum natura connexionem, nec mera somnia dici possunt; nec illarum imaginatione aliquo contaminantur mendacio mathematicæ disciplinæ. quæ vt subiectę materiei conditione à Diuinis distant, sic illas constanti, certaq́; rationum demonstratione longe antecellunt. Sed recensemus iam reliquas mathematicæ species. Altera igitur facta diuisione dicimus mathematicam facultatẽ, aut in intellectilibus dũtaxat aut in sensilibus versari; intellectilia vtrique appellantes, quascumque inspectiones anima ipsa per se ipsam excitat, à materialibus sese vindicans formis. atque huius sanè generis duas principes, longeq́; præstantes ponimus species, Arithmeticam & Geometriam. Eius vero generis, quod in sensilibus officium, atque opus exercet suum, sex fieri solent partes. Mechanica, Astrologia, Optica, Geodesia, Canonica, vel Musica, & supputatrix. Geometria rursus diuiditur in planorum, & solidorum contemplationem, quæ stereometria appellatur. si quidem circa puncta, & lineas peculiaris quadam non est tractatio, quoniam neq; figura in his vlla sine planis, vel solidis fieri posset. Geometria enim nihil aliud vbique agit, nisi vt plana, & solida vel constituat, vel iam constituta inter se comparet, aut diuidat. Arithmetica similiter diuiditur in numerorum linearium, & planorum, & solidorum contemplationem; etenim species numeri per se considerat ab vnitate procedentes, ortusq́; planorum numerorum, tum similium, tum dissimilium, & ad tertiam vsque auctionem progressus. Geodesia, & supputatrix congruenter his non de intellectilibus numeris, vel figuris, sed de sensilibus tractant. non enim ad Geodesiam attinet cylindrum, vel conum metiri, sed aceruos, vt conos metitur, & puteos, vt cylindros, neque id rectis lineis intellectilibus, sed sensilibus efficit, interdum quidem certioribus quodammodo, vt radijs solaribus, interdum vero crassioribus, vt spartis, & perpendiculo. neque supputator ipsas per se se numerorum passiones considerat, sed vt sunt in sensilibus inuoluti. Rursus Optica, & Canonica à Geometria, & Arithmetica ortum habent. nam Optica quidem radijs visorijs tamquam lineis vtitur & angulis, qui ex his constant. diuiditur autem in tres partes,

in

in Opticam, quę generis nomen obtinuit, catoptricam, & scenographicam. Optica reddit causas eorum, quæ aliter quam sint, sese nobis offerunt, ob alios, atque alios rerum visarum situs, ac distantias. Catoptrica circa varias, multiplicesq; versatur reflexiones, & coniecturali cognitione amplicatur. Scenographica ostendit, quo pacto ea, quæ apparent in imaginibus, non inconcinna videantur, vel deformia, iuxta distantias, atque altitudines eorum, quæ designantur. non igitur veram æqualitatem, & concinnitatem imitandam præcipit, sed eam, quæ aspectum nostrum concinne, & apposite feriat, ita vt cum circuli repręsentandi sint, interdum non circuli, sed ellipses describantur, & quadrata altera parte longiora fiant. Canonica, vel Musica apparentes harmoniarum considerat proportiones, regularū sectiones adinueniēs, et sensus vbique vtens adminiculo. Mechanica circa res sensiles, ac materiæ coniūctas versatur, dum aut bellica parat instrumenta, qualia Archimedes excogitauit, cum Marcellus Syracusas graui premeret obsidione: aut admirabilia quadam summo cum artificio construit spiritu, ponderibus, & spartis, qualia Ctesibius, Hero, & Archimedes non sine maximo stupore suorum temporum hominibus spectanda proposuerunt. Quis enim non admiretur, vt alia omittam vitreum illum Archimedis orbem? atque vel hac vna re mathematicas facultates, quæ talia præstare possunt, non summopere veneretur? Percurrit proprium mentitus signifer annum, Et simulata nouo cynthia mense redit. ita ut eleganter exclamet Iuppiter apud Claudianum. Huccine mortalis progressa potentia curæ. Iam meus in fragili luditur arte labor. Quid quod aiūt Architam hac in re tantum potuisse, ut columbam ligneam in aere uolantē, quasi anima præditam, ac sese sustentantē fecerit. Astrologia de mundanis edisserit motibus, de cælestium corporum magnitudine figura, atque illuminandi ui, nec non de eorundem à nobis distantia. Huius partes sunt Gnomonica, Meteoroscopica, Dioptrica. Gnomonica circa horarum dimensionem per gnomonum positiones uersatur, de quibus Ptolemæus in libro, qui de Analemmate inscribitur, diffuse pertractat. Meteoroscopica eleuationum differentias, & distantias syderum exquirit, atque alia multa, & uaria, quę ad Astrologiam attinent theoremata docet. Dioptrica distantias solis, & lunæ, aliorumq; astrorum, per eiusmodi instrumenta inuestigat. Ceterum de his hactenus summatim dixisse satis sit. Sed quoniam plerique his præsertim temporibus sola utilitate ad optimarum artium studia excitantur, liberalesq; colunt disciplinas, uideamus obsecro, an mathematicæ nullius sint commodi ad iuuandos humanæ uitę usus, uti cęca quorundam turpissimi lucri cupiditas falsa iam prædicatione diuulgauit, ita ut qui hanc amplectuntur facultatem ab imperitis, uel a eo studio occupatis hominibus palàm derideantur, tamquam in re inutili, atque uani oleum, & operem perdant. Agamus igitur pingui, quod aiunt, Minerua, quando nobis negocium est cum ys, qui sola quæstus ratione persuaderi possint, & inuramus hanc notam ingenuæ, ac nobili disciplinæ, ut lucrum, & diuitias pollicendo huiusmodi hominum sibi studia, & gratiam comparet. Negent isti primum, si possunt, mathematicas artes popularem utilitatem nullam habere, si mercatura cuius exercitatione tam multi distinentur ob magnam quæstus occasionem, sine arithmetica tractari potest. Experiantur deinde siquid dimetiri queunt absque Geodesiæ adiumento. sulcent maria, & longinquas petant regiones, nouum perquirant orbem nullo astrologiæ nauticæ fulti præsidio. Quid medicus? quantum uel unius Hipocratis iudicio debet Astronomiæ, cuius ductu syderum cursus & lunæ præsertim cognoscat. Vnde uniuersa dierum, quos criticos uocant, dependet ratio, quam diligenter cauendum est, ne grauiori aliqua curatione uexet ęgrotantem, dum luna, idq; præcipue morbi initio, à combustione, ut nunc loquuntur, ad oppositionis gradum proficiscitur? Quantum denique commodi, atque utilitatis affert Geometria, Arithmetica, & reliquę omnes in publicos, & priuatos usus? cum nulla uel infimarum artium, ut finem consequatur, matheseos ope non egeat. quod singulas accuratius intuenti facile patet; & à nobis nullo negocio probaretur, nisi longam de re certa uitaremus disputationem. colore, umbra, situ, raritate, ac densitate mediorum, & refractione, quā uarios ornatus, admirabilesq; rerum figuras quotidie cernimus? & magna cum uoluptate spectando decipimur? sed erraumus, sola enim vtilitate cum illis agendum est. quare omissis opticis, & pictoribus mera afferantur commoda. Quónam pacto igitur diffiteri possint, quin mathematicæ ad uniuersam ciuitatum utilitatum mirabiliter ualeant, tum actionum tempora dimetiendo, tum uarias uniuersi reuolutiones demonstrādo? Ars uero militaris, quę politices dextra manus est, qua ratione uolens, quæ numerosa est, paucissimam ostendere multitudinem, castra, aciesue ad figuram circuli; ubi uero copias ostentare cupit, ad figuram quadranguli format, nisi unius Geometriæ auxilio? Quomodo aut hostiū vrbes oppugnat, & capit, aut proprias tuetur, nisi

ipsi is

ipsius Mechanices adiumento, quæ admirabiles ad oppugnandum, aut resistendum fabricatur machinas, vti Archimedes aduersus Marcellum, qui (nam Ctesibios, Architas, Priscos, Eudoxos, Diogenetos missos facio) cum hanc adeo miram artem aliquando apud Hieronem prædicaret, Rex Geometram admiratus rogauit, vt tantæ fiduciæ periculum faceret. Quare Archimedes emptam è regijs nauibus vnam, & in siccum eductam, grauiusq; oneratam solus machinis suis ad se pertraxit, non secus ac si in mari remis, ac uelis agitaretur. contra postea Alexandriam regis eiusdem nauim è littore in Mare deduxit, quod omnes siciliæ vires non potuerint. Hac igitur arte qui instructi sint, vrbis mænia tueri, & hostium oppugnationes eludere queunt. & habuisset tanto impetu res cœpta fortunam (ait Liuius, cum de Marcello Syracusas oppugnante loquitur) nisi vnus homo Syracusis ea tempestate fuisset. Archimedes is erat, vnicus spectator cœli, Syderumq; mirabilior tamen inuentor, ac machinator bellicorum tormentorum, operumq; è quibus ea quae hostes ingenti mole agerent, ipse perleui momento ludificaret. libuit tam insigne illustris historici de Archimede testimonium afferre, vt huius exemplo, quantum vtilitatis, ac commodi sibi ac patriæ homines comparare possunt, intelligant, si nobilem Matheseos facultatem diligenti cura, studioq; excoluerint. ceterum dissimulare nequeo, me multo grauius perturbari quorundam philosophorũ, (vt sibi videntur) impudenti audacia (Cur enim grauius non ferã mathematicas ab ijs calumniari, quorũ esset munus eas colere, ac tueri, quàm ab hominibus, quos mala diuitiarũ cupiditas arctissimis deuinctos laqueis tenet) Sed aduersus hoc philosophorum genus nihil aliud dicã nũc, quòd sciã Aristippos istos, & Epicureos, vt vere, & eleganter eos nominat Petrus Ramus vir multę eruditionis, potius dolore quodã, studioq; suam tegendi ignorantiam talia dicere, quam quòd reuera putẽt matheseos cognitionem nihil vtilitatis, nihil adiumenti afferre ad omnes liberalium artium disciplinas, præsertimq; ad Platonis Aristotelisq; monumenta, quos hoc doctrinæ genere plurimũ delectatos fuisse planè constat. Qui enim hoc putent, cum multa quotidie necessaria imprimus, scituq; pulcherrima apud hos inueniant, quę quoniam mathematico more tradita sunt, quasi scopulos quosdam euitare coguntur. Hinc Timæum non attingunt tãquã fabulosum, & nullius pretij librũ. Hinc septimum physicæ auscultationis librum, multaq; alia Aristotelea suis discipulis, quòd, vt aiũt, inutilia sint, explanare grauantur. sed plura fortasse dicta sint de hac re, quàm oportuit. nam veræ matheseos vtilitas, eximij fructus, incredibilesq; voluptates in sola veritatis cognitione, ad quam nati sumus, positæ sint. hac vna nos vere homines, uereq; diuini luminis participes ostendimus. cetera terrenam & fragilem præseferunt conditionem. Age vero accedamus ad ea, quæ ad Geometram nostrum spectant. Et primum de ipso Euclide, deinde de inscriptione, et scopo dicamus. postremo de illius demonstrationibus, quemadmodum à principio promiseramus. Liberemus igitur, multos ab eo errore, quo persuasi credunt Euclidem nostrum eundem esse & philosophum megarensem, & geometram, totamq; hanc rem breuiter explanemus. Fuit senior Euclides ex Megaris oppido, quod isthmo adiacet, Parmenidis librorum in primis studiosus, ac megaricæ sectæ princeps, ad quem mortuo Socrate Plato ac plerique omnes socratici, triginta tyrannorum metu cõfugerũt. Hic dialogos sex conscripsit, quos enumerat Laertius. vsus est probationibus non ijs, quę per assumptiones, sed quę per conclusiones fiunt, ac magis dialecticę sunt. successorem habuit Eubulidem. Iunior autem Euclides qui στοιχειώτης ac geometra, dictus est, tempore Primi Ptolemæi floruit, academiam diligenter coluit, & quotidiana ferè Platonis discipulorum consuetudine egregie eruditus, Mathesim, quæ in Academia pręceptoris instituto tunc maxime vigebat, ita præclaro animi impetu est aggressus, vt progressus admirabiles, ac sempiterna æui memoria dignissimos in ea fecerit; constantiq; omnium doctorum testimonio principem locum sibi vendicarit. nemo autem mihi ignotum esse arbitretur, Valerium Maximum scribere Platonem sacrę aræ conductores ad Euclidem, tanquam ad primarium mathematicum reiecisse. sed nos Heronem, & Proclum matheseos studio insignes sequimur, vel potius Eudemum ac Theophrastum ex peripateticis post præceptorẽm nobilissimos. hi namque hoc tradiderunt memoriæ in ijs libris, quos de historia geometrica conscriptos magno cum dolore, ac literatorum incommodo perijsse non ignoramus. Euclides igitur noster post Hippocratem, Leontem, Teudium, & Hermotimum, qui geometrica elementa, alius post alii conscripserant, opus hoc vere aureũ, summo cum labore, præstantiq; mentis iudicio contexuit. Multa quidẽ inuenerant superiores illi homines excellenti quodã, ac propè diuino ingenij acumine. non pauca addiderant Theætetus atque Eudoxus, qui cum Platone versati sunt. Itaque Euclides

dispersa

dispersa collegit, collecta disposuit, & quæ pinguius, negligentiusq; demonstrata fuerant, ipse ad absolutas, ἀνελέγκτους q; demonstrationes redegit. magna profectò laus superiorũ, multo tamen maior Euclidis, qui indigesta eo composuit ordine, vt vel hac vna re perpetuam sibi apud sanę mentis homines laudem compararit. inchoata ita absoluit, incerta ita firmissimis rationibus certissima effecit, vt nihil amplius propè in eo desideretur. Iam duo ferè annorum millia abierunt, ex quo Euclides inter viuos cõnumeratus est. multos habuit aduersarios, qui inuidiæ potius morbo, quàm veritatis amore illius scripta omni studio labefactare sunt conati, nullam tamē adhuc in illis ψευδογραφίαν, nullum errorem, nullum paralogismum seueri inquisitores deprehendere potuerunt. Cetera vero præstantissimi huius viri monumenta hęc habentur. Optica, Catoptrica, Musica, Data, phænomena, scripsit etiam librum de diuisionibus, conicorum libros quattuor, porismation tres, vt ex Proclo, Pappoq; constat, qui quidem ad manus nostras non peruenerunt. Atque hæc sunt, quæ inuenire potuimus de Euclide nostro, cuius immortali beneficio Mathesis, quæ gręcũ mare ex Aegypto transgressa iam ducentos annos, ac paulo plures Græciam incoluerat, suam dignitatem, suosq; honores non sine deorum voluntate est consecuta. Nunc quæ studiosorum mentes haud leuiter perturbat opinio de elementorum demonstrationibus, paucis referatur. quamuis enim hæc disceptatio nullam futuro geometræ afferat vtilitatem, maxime tamen solicitos habet, nescio quo pacto huius disciplinæ amatores; quippe quòd scire percupiant, cuínam tantum beneficij, atque adeo singulare munus acceptum referant. Inter ceteros igitur, qui hac de re disputarunt, Ioannes Buteo, & Petrus Ramus acerrimi iudicij homines in contrarias prorsus abiere sententias. hic enim in suo Matheseos proœmio non solum demonstrationes Theoni (quod etiam alij dixerunt) ascribendas putat, verum etiã ipsa elementa, tum quia στοιχειώτης vltimus fuerit, nullusq; propositionis inuentio inter Euclidis laudes à Proclo referatur, tum etiam quia Theon ipse suas editiones in elementa nominatim laudarit in primo commentario super Ptolemæi magnam constructionem, ita vt elementa sibi eo iure vindicare possit Theon, quo antea Euclides. Idipsum ea quoq; probat ratione, quòd Euclidis demonstrationes, quæ in Procli commentarijs leguntur, minime cum ijs conueniant, quas in elementis habemus. Ille autem (de Buteone loquor) in suis annotationibus in Euclidem hoc diserte negat; veteremq; pręclarissimi hominis laudem tuetur; quoniam apud antiquos numquam sine demostratione theoremata proferãtur; vt quæ nullã, si nuda fuerint, habeant vtilitatē, ac dignitatē; quodq; vero simile sit, verba illa ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν, ex quibus omnis effluxit disputãdi occasio, ita possint intelligi, vt dicamus, Theonem conscripsisse quidem commentarios in elementa, sed illos temporum calamitate perijsse, quemadmodum & quæ in eundem Pappus Alexandrinus scripserat, conseruato tamen titulo, qui postea Euclidi ipsi negligentur adiectus est. Nos autem medium secuti eredimus libros de elementis suis ornatos demonstrationibus ab Euclide nobis fuisse relictos. qui enim de hoc dubitare possumus, cum Proclus in commentarijs in X. propositionem, post recitatam Apollonij pergæi demonstrationem hęc verba subiungat πολλῷ ἄρα οὖν κρείττων ἡ τοῦ στοιχειωτοῦ ἀπόδειξις hoc est lõge igitur melior est stichiotę (ita enim Euclidem appellat) demonstratio, & simplicior, magisq; ex principijs. vt autem hoc vere asserimus, ita illud merito concedemus, Theonem excellentis ingenij virum Euclidis demonstrationes fusius, planiusq; explicatas in lucē protulisse: quod apud Proclum obseruari potest. Sic data nõ eo prorsus habentur modo, quo apud Pappum in septimo mathematicarum collectionum libro. nec optica, catoprica, quæ nos vidimus Romę in vaticana bibliotheca. Quamobrem si hæc omnium consensu Euclidi concedimus, etiam elementa concedenda sunt, præsertim cum verbis potius, quàm re ipsa Theon ab eo discrepet in demonstrandi ratione. sunt igitur illę quidem demenstrationes Euclidis, sed eo modo conscriptæ, quo olim Theon Euclidem secutus suis discipulis explicauit. Non inutile autem, nec iniucundum illud legentibus fore erediderim, si Platonis, Xenocratis, nec non Euclidis nostri insignes huic disputationi sententias, tamquam coronidem addidero. poterunt enim Geometriæ candidatis esse loco orationis copiosæ, atque elegantis. Plato igitur vt necessariam prorsus facultatis huius cognitionem futuro philosopho palam ostenderet, verba hęc pro foribos gymnasij posuit. οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. nemo rudis Geometrię huc pedem inferat. Xenocrates vero, qui post præceptorem tertius in academia docuit, cuidam Mathematum, ac Geometrię ignaro gymnasium ingredienti, Abi, inquit, λαβὰς γὰρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας. ansas enim philosophiæ non habes. Quid vero de nostro Geometra habemus dicere? Hic Ptolomeo Regi primo interroganti,

an alia

an alia facilior, atque commodior esset, discendæ Geometriæ methodus, ac ratio. Nulla, inquit, ò Rex est via regia, quæ ducat ad Geometriam. Quàm constantem igitur animi diligentiam, alacremq; discendi voluntatem iuuenes ad hæc studia afferre oporteat, non solum Geometriæ, quæ per se nobilissima est, sed & totius philosophiæ caussa, nos tantorum virorum testimonijs declarasse sit satis. Dicamus iã de operis inscriptione, simulq; de Auctoris proposito. Nã quoties illa ab operis argumento desumpta est, explicatione vnius, & alterum fermè cognoscitur. Proclus meo quidem iudicio, videtur legisse Εὐκλείδου στοιχείωσις. qui vero ex Theonis sententia hoc opus nobis exortum reliquit. Εὐκλείδου στοιχείων βιβ. ιε. Idem tamen vtraque significat, siue illa sit Elementaris institutio, siue elementorum libri XV. Dixi autem non Theonem, quod multi credunt, sed illius familiarem quendam, virum planè eruditum, quicũque ille fuerit, Euclidem nobis, eo, quo nunc habetur, modo legendum cõcessisse, verborum illorum ἐκ τῶν θέωνος συνουσιῶν permotus testimonio. nam & Ioannes cognomento Philoponus, quos in Aristotelem commentarios ipse composuit, se ex Ammonij Hermeæ colloquijs, ac disputationibus collegisse, ingenue prorsus grati animi exemplo professus est. Haud tamen negauerim Theonis auditorẽ, cum nomẽ suum suppresserit, voluisse nos totum hunc laboris, ac industriæ fructum Theoni dũtaxat acceptum referre. At enim quæret fortasse aliquis, nec iniuria profectò, cur Auctor hoc nomen elementum, aut elementare, quod de multis dicitur, solum protulerit. cum enim & de literarum principijs, & de rebus naturalibus, alijsq; dici soleat, adiungendum erat omnino, cuiusnam rei illa essent elementa, elementorumve institutio, vt a latinis postea factum est, qui Geometricorum addiderunt. Nos ita dubitanti, hoc ea omissum diceremus ratione, quia statim idipsum ex primis verbis de puncti notione cognoscitur, aut Hamonium secuti, qui Porphyrianam inscriptionem ab eadem culpa defendit, affirmaremus hanc inscriptionem κατ᾽ ἐξοχὴν, ac quandam Geometriæ excellentiam; & si ex nomine, quod multis commune est, factum sit, de Geometricis tantum elementis intelligi posse. sic Poetam dicentes de Homero, aut Virgilio intelligimus; frequens enim ac percelebre erat tunc Geometriæ studium. Elementa vero hic dicuntur de Theorematibus, quæ principij rationem habent. Theorematum enim (vt proclus scribit) alia quidem elementa appellare consueuerunt, alia elementaria, alia vero extra horum vim determinantur. Elementa igitur dicuntur, quorum contemplatio ad aliorum pertinet scientiam, & ex quibus apparet solutio eorum, quæ in ipsis dubitare contingit. Vt enim vocis literatæ sunt principia prima, & simplicia, & indiuisibilia, quibus elementorum nomen imponimus: & omnis dictio, oratioq; ex his constat, sic & totius Geometriæ sunt quædam Theoremata principalia, & rationem habentia principij ad ea, quæ sequuntur, perq; omnia peruadentia, & multorum accidentium præbentia demonstrationes, quæ elementa appellant. Elementaria vero dicuntur, quæcumque ad plura pertinent & simplicẽ quandam suauitatem habent, non tamen eam, quæ est elementorum, propterea quòd eorum contemplatio non sit communis omni scientiæ. Quæcumque demum cognitionem non habent ad plura pertinentem, neque scitum aliquod, aut elegans demonstrant, hæc extra elementarium vim cadunt. Rursus elementum dupliciter dicitur, vt ait Menæchmus. illud enim, quod cõfirmat, eius quod confirmatur elementum est, vt primum secundi apud Euclidem, & quartũ quinti; sic & alia multa inter sese elementa esse dicentur, quippe cum alterum ex altero confirmetur. nam ex eo, quod extrinseci rectilineorum anguli quattuor rectis sunt æquales, intrinsecorum recto æqualium multitudo, & contra ex hoc illud ostenditur. estq; huiusmodi elementum lemmati assimile. Aliter præterea dicitur elementum, in quod, cum sit magis simplex, compositum resoluitur. Ita vero non omne rursus elementum dicetur, sed quę principalissima sunt eorum, quæ in rei effectæ ratione sunt cõstituta, quemadmodum Petitiones, & Dignitates Theorematum sunt elementa. iuxta hoc elementi significatum & ab Euclide elementa constructa sunt, alia quidem illius Geometrię, quę circa plana versatur; alia vero eius, quæ circa solida. sic & in Arithmeticis, & in Astronomicis elementares institutiones multi conscripserũt. Propositũ igitur fuit Euclidi in his libris tradere elemẽta ad vniuersã Geometriã necessaria, hoc est principalissima, simplicissimaq;, ac primis principijs maxime affinia theoremata, sine quibus reliquæ huius sciẽtię partes cõprehẽdi nõ põt. Euclides.n. ipse in alijs libris, Aristarchus, Archimedes, Apollonius, Theodosius, Autolycus, Menelaus, Ptolemæus, Pappus, Serenus, et reliqui ad eorum demonstrationes his tamquam notissimis vbique vtuntur. Quod vero ad dispositionẽ, ac methodum Geometricorũ sermonũ attinet, sciendum est (vt inquit

✻ ✻ Proclus

Proclus) Geometriam, quemadmodum, & alias scientias certa quędam, & definita principia habere, ex quibus ea, quę sequuntur, demonstrat. quare necesse est seorsum quidem de principijs, seorsum vero de ijs, quæ à principijs fluunt pertractare. & principiorum nullam reddere rationem, quæ autem principia consequuntur, rationibus confirmare. nulla enim scientia sua demonstrat principia, verum circa ea per sese sibi fidem facit, cum magis euidentia sint, quam quæ ex ipsis deriuatur: & illa quidem per sese, hæc vero deinceps per illa cognoscit. Ita & naturalis philosophus à determinato principio rationes producit, motum esse ponens; ita & medicus, & aliarum scientiarum, atq; artium peritus. Quòd si quis principia cum ijs, quæ à principijs fluunt, in idem communiceat, is totam perturbat cognitionem, eaq; conglutinat, quæ nullo pacto inter se conueniunt. Primum igitur principia, deinde ea, quę consequuntur, sunt distinguenda. quod sanè Euclides in vnoquoque suorum librorum obseruauit; quippe qui ante omnem tractationem communia huius scientię pricipia exponit: et ipsa in suppositiones, seu diffinitiones, postulata, et axiomata diuidit. differunt nãque hæc omnia inter se, nec idem est axioma, & postulatum, & suppositio, vt Aristoteles asserit. Cum enim is, qui audit propositionem aliquam, statim sine doctore vt veram admittit, eique certissimam fidem adhibet, hoc Axioma appellatur, vt quæ eidem æqualia, & inter se æqualia sunt. Cum vero audiens dicente aliquo, eius, quod dicitur, notionem non habuerit, quæ per se se fidem faciat; verum tamen supponit, & eo viente assentitur, ea suppositio est, verbi gratia, circulum eiusmodi esse figuram, communi quadam notione non percepimus, sed audientes absque vlla demonstratione approbamus. Cum autem rursus & ignotum sit addiscenti, quod dicitur, & tamen eo assentiente assumatur, tunc id postulatum appellamus, vt omnes rectos angulos æquales esse. Quæ autẽ à principijs enascũtur, ea sunt vel Problemata, vel Theoremata. Problema illud est, in quo quippiam, cum primum non sit proponitur inueniendum, ac construendum. Theorema autẽ in quo quippiam in constituta iam figura ita esse uel non esse demonstratur. In hac igitur elementari institutione Euclidem quis non summopere admiretur propter ordinem, & electionem eorum, quæ per elementa distribuit, theorematũ, atque problematũ? non enim oĩa assumpsit, quæ poterat dicere, sed ea duntaxat, quæ elementari tradere potuit ordine. adhuc autem varios syllogismorũ modos vsurpauit, alios quidem à causis fidem accipientes, alios vero à signis profectos, omnes necessarios & certos, atque ad scientiam accõmodatos. omnes præterea dialecticas vias, ac rationes; diuidentem in formarum inuentionibus; diffinientem in essentialibus rationibus; demonstrãtem vero in progressibus, qui à principijs ad quæsita fiunt. denique resoluentem in ijs, qui à quæsitis ad principia fiunt regressibus. Quin etiam varias conuersionum species tum simplicium, tum compositarum in hac tractatione intueri licet. & quę tota totis conuerti possint, quæ ve tota partibus, & contra, & que vt partes partibus. Postremo admirabilem omnium dispositionem, antecedentiũq; & consequentiũ ordinẽ, ac cohærentiã, vt nihil prorsus addi, aut detrahi posse videatur.

In primo igitur libro tractat de rectilineis figuris, videlicet de triangulis, ac parallelogrammis. Et primum triangulorum ortus, proprietatesq; tradit, tum iuxta angulos, tum iuxta latera; ipsa inter se se comparans. Deinde parallelarum proprietates interijciens ad parallelogramma transit, eorumq; ortum declarat, & symptomata, quę in ipsis sunt, demonstrat. postea triangulorum, parallelogrammorumq; communicationem ostendit, & quo nam pacto parallelogrammum fiat ęquale triangulo. Denique de ijs, quę in triãgulis rectangulis à lateribus describuntur, quadratis, quam habeat proportionem quòd à subtendente rectum angulum describitur ad ea, quæ comprehendetibus ipsum fiunt.

In secundo libro parallelogrammum rectangulum, & gnomon definitur. deinde parallelogrammorum rectangulorum, & quadratorum, quę ex rectarum linearum sectionibus fiunt, proportiones declarantur. postea de quadratis, quæ a lateribus obtusiangulorum, & acutiangulorum triangulorum describuntur, quam habeant proportionem, quæ à subtendentibus obtusum & acutum angulum fiunt ad ea, quę à comprehendentibus describuntur. Denique qua ratione dato rectilineo æquale quadratum constituatur.

In tertio libro agitur de ijs, quæ circulis accidunt, & de rectis lineis in circulo, vel ad circulum ductis, itemq; de angulis, qui ad circulorum centra, vel ad circumferentias consistunt.

In quarto libro de figurarum planarum inscriptionibus & circumscriptionibus.

In quinto de Analogijs.

In sexto de proportionibus figurarum inter sese, de figuris similibus, & reciprocis. de rectis lineis proportionalibus, de parallelorum applicationibus ad rectas lineas, quę vel deficiant parallelogrammis similibus, vel excedant. quomodo recta linea terminata extrema, ac media ratione secetur, de proportionibus circumferentiarum & angulorum, itemq; sectorũ in circulis æqualibus.

Septimus, Octauus, & Nonus ad Arithmeticam pertinent.

In septimo agitur de numeris primis, & compositis; & quo pacto numerorum non primorum maxima communis mensura inueniatur. de numerorum parte, et partibus. de numeris multiplicibus, de proportionalibus, & quæcumque in quinto libro de magnitudinibus generatim, eadem ferè & de numeris particulatim hic demonstrantur.

In octauo de numeris deinceps proportionalibus, de numeris planis, de quadratis, de cubis, & solidis. de similibus planis, & similibus solidis.

In nono item de similibus planis, de cubis, & solidis, & de numeris deinceps proportionalibus siue ab vnitate, siue simpliciter, de numeris primis, de numeris paribus, de imparibus, de pariter paribus, de pariter imparibus, de pariter paribus & pariter imparibus. de numeris perfectis.

In decimo de commensurabilibus, & incommensurabilibus magnitudinibus, itemq; de rationalibus & irrationalibus.

Vndecimus, duodecimus, & reliqui ad stereometriam spectant, hoc est ad solidorum corporum contemplationem.

Et in vndecimo quidem primum agitur de rectis lineis quatenus ad solida corpora referũtur, videlicet quando sint in vno plano, quando rectæ, seu perpendiculares ad planum, quando parallelę, quomodo à puncto in sublimi dato ad planum perpendiculares ducantur. Deinde vero de planis simul differit, tũ de solidis angulis, postremo de solidis parallelepipedis, & nõnulla de prismatibus.

In duodecimo de pyramidibus, et prismatibus; postea de conis et cylindris, demum de sphęris.

In tertiodecimo de constitutione quinque figurarum mundanarum, quas corpora regularia appellãt; videlicet tetraedri vel pyramidis, hexaedri vel cubi; octaedri, dodecaedri, et icosaedri, ad quorum euidentiam præmittit nonnulla de ijs, quæ accidunt rectæ lineæ extrema, ac media ratione sectæ, de pentagono æquilatero, de hexagoni, & decagoni lateribus, & de triangulo ęquilatero.

In quartodecimo de dodecaedri, & icosaedri in eadem sphęra descriptorum comparatione.

In quintodecimo & vltimo de inscriptione quinque figurarum iam dictarum, & de earundẽ lateribus, & angulis.

F I N I S.

INDEX EORVM, QVAE IN HIS LIBRIS demonstrantur præter ea, quę Euclidis sunt.

IN PRIMO LIBRO.



IN SECVDDO LIBRO.

IN TERTIO LIBRO.

Spacium

IN OCTAVO LIBRO.

IN NONO LIBRO.

IN DECIMO LIBRO.

IN VNDECIMO LIBRO.

IN DVODECIMO LIBRO.

Prismata

IN TERTIODECIMO LIBRO.

IN QVARTODECIMO LIBRO.

IN QVINTODECIMO LIBRO.

F I N I S.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER PRIMVS
CVM COMMENTARIIS FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS.



DIFFINITIONES.
I.



VNCTVM EST, cuius nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet. +

F. C. COMMENTARIVS.

Euclides per negationem partium significauit nobis punctum, quod est principium totius propositę contemplationis. cum enim principia aliam rationem habeant ab ijs, quorum sunt principia, & eorum negationes illorum quodammodo naturam ostendant; non immerito negantes sermones principijs ipsis conuenire comperti sunt: quod etiam asserit Proclus auctoritate Parmenidis. Pythagorici vero per proportionem, & translationem quandam, punctum diffiniunt esse vnitatem positionem habentem: punctum enim positionem habet, vnitas non habet. Aristoteles in quarto diuinę phylosophię libro. vbique, inquit, ipsum vnum aut forma, aut quantitate indiuisibile. eorum autem, quae quantitate, & vt quantitas est, diuidi non possunt, id quidem, quod penitus est tale, & sine positione, dicitur vnitas; quod vero penitus est tale, positionemq; habet, dicitur punctum; & id quod vno modo diuidi potest, linea nuncupatur; & id quod duabus ex partibus, superficies: quod vero omni ex parte, & triniam dimensionē habet, dicitur corpus.

Punctum secundum Pythagoricos vnitas positionem habens.

II.

Linea vero est longitudo latitudinis expers. +

F. C. COMMENTARIVS.

Post punctum linea secundum obtinet locum: namque vt punctum ad lineam, ita linea ad superficiem, de qua mox dicetur, rationem habet principij. punctum quidem ipsum, vt magnitudinum omnium principium per solam negationem, lineam vero partim per affirmationem, partim per negationem significauit cum dixit, longitudinem esse latitudinis expertem. fuerunt qui lineam aliter diffinirent: alij enim σημείου ῥύσιν hoc est puncti fluxum dixerunt; alij ut Aristoteles τὸ μέγεθος μοναχῇ διαιρετὸν ἢ ἐφ' ἓν διαιρετὸν hoc est magnitudinem, quae vno modo diuidi potest, nempe secundum longitudinem. lineae autem notionem habemus, vt Apollonius inquit, cum longitudines tantum vel viarum, vel parietum dimetiri volumus; non enim tunc latitudinem, & crassitudinem adiungimus, sed vnicam duntaxat dimensionem consideramus; quemadmodum & cum agros metimur, superficiem respicimus; cum autem puteos, solidum: omnes enim dimensiones simul colligentes dicimus tantum esse spacium putei secundum longitudinem, latitudinem, & crassitudinem. sensum vero ipsius lineae habebimus, si disiunctiones locorum illuminatorum ab vmbrosis aspexerimus, tum in luna, tum in terra; hoc enim medium iuxta latitudinem, dimensionem non habet, sed iuxta longitudinem, quae vnà cum lumine, & vmbra producitur,

Punctū magnitudinum omniū principium.

Lineae notio.

Superficiei notio.

Solidi.

Lineae sensus [illegible] habeatur.

ducitur,

Lineæ simplices. Mixtæ.

ducitur. linearum aliae simplices, aliae mixtae. simplices sunt recta, & circularis, quamquam recta simplicior sit, reliquae vero omnes mixtae, quales sunt con sectiones, helices, conchoides, cissoides, & aliae.

III.

+ Lineæ fines sunt puncta.

F. C. COMMENTARIVS.

Linea tribus modis utitur Euclides



Cum linea tribus modis vtatur Euclides, vel enim terminata, & finita ex vtraque parte, vel infinita, vel ex altera quidem parte finita, ex altera vero infinita; hoc loco de ea, quae vtrinque finita est, sermo habetur, cuius fines dicit esse duo puncta. Circularis linea per se nullos habet fines. *Circularis autem linea per se nullos habet fines; sed si aliquod in ea punctum accipiatur, idem erit & principium, & finis, diuersa tamen ratione. quod diximus de circulari linea,* Ellipsis. *idem & de ellipsi dici potest, quae ipsa in se ipsam vergit sicuti circulus: si autem sumatur portio circularis lineae, seu ellipsis, eius non aliter, quàm rectae lineae fines erunt duo puncta. Eodem modo & de alijs curuis lineis intelligendum est.*

IIII.

+ Recta linea est, quæ ex æquali suis interijcitur punctis.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc est recta linea est, quae aequalem continet distantiam, eam scilicet, quae inter sua interijcitur puncta. quantum enim alterum punctorum ab altero distat, tanta est magnitudo rectae lineae ab ijs terminatae. atque hoc est ex aequali suis interijci punctis. si autem in circumferentia circuli, aut alia quauis linea duo puncta sumantur; eius portio, quae interijcitur, longe maior erit, quàm sit dictorum punctorum distantia. ad hunc quidem modu rectae lineae diffinitionem exponere mihi videtur Proclus. ... rectã lineam diffiniat. *Plato autem rectam lineã diffinit esse eam ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ, hoc est cuius media extremis obsistunt. illud.n ijs, quę in recta linea sunt, necessario contingit; ijs vero, quae in circulari, aut alia quapiam linea, non item. Vnde & astrologi dicunt solem deficere, cum in eadem recta linea constituitur ipse, lunaq; et oculus noster: obsistit enim ei tunc luna media existens.*



Arch... ...itio re... ctæ lineæ. *At Archimedes, vt Proclus auctor est, dixit rectam lineam esse breuissimam omnium, quae eosdem habent fines. quae quidem diffinitio recepta est in Campani editione. linea, inquit, recta est ab vno puncto ad alium breuissima extensio in extremitates suas eos recipiens.*

V.

+ Superficies est id, quod longitudinem, et latitudinem tantum habet.

F. C. COMMENTARIVS.

Superficiei uariæ diffinitiones. Superfi... cogn... & sen...

Superficiem dixit longitudinem, & latitudinem tantum habere, propterea quòd crassitudinis expers sit. alij corporis terminum ipsam esse diffinierunt; alij magnitudinem binis distantem interuallis. superficiei vero cognitionem nos habere dicunt, quando agros dimetimur, & eorum terminos iuxta longitudinem, ac latitudinem distinguimus. sensum vero quendam capere, quando vmbras aspicimus, cum enim ipsae crassitudinis sint expertes, quòd partes terrae interiores penetrare non possint; latitudinem, & longitudinem tantum habent. superficierum aliae simplices sunt,

aliae

aliæ mixtæ. simplices sunt plana, & sphærica, reliquæ verò mixtæ, vt Cylindrica, conica, & quæ a conisectionibus ortum habent, videlicet conoidum, & sphæroidum figurarum, & aliæ. Superficies simplices & Mixtæ.

VI.

Superficiei fines sunt lineæ.

F. C. COMMENTARIVS.

Quemadmodum non omnis lineae fines sunt puncta, ita non omnis superficiei fines sunt lineae; superficies enim sphærae, vel sphæroidis per se nullos habet huiusmodi fines, nisi planis abscindatur, nam tunc fines habet lineas ipsas, quæ ex sectione oriuntur. superficiei autem circuli, & eius, quæ ellipsi continetur, finis est linea vna, videlicet circumferentia, & ellipsis. quòd si secentur tunc pro finibus lineas habebunt.




Superficies Sphæræ, & Sphæroidis. Superficies circuli, & ellipsi côtêta.

VII.

Plana superficies est quæ ex æquali suis interijcitur lineis.

F. C. COMMENTARIVS.




Superficiē, & planū Antiqui pro eodem accipiebant.

Antiquiores philosophi (vt testatur Proclus,) τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸ ἐπίπεδον hoc est superficiem, & planum pro vno, eodemq; accipiebant. At Euclides, & qui eum secuti sunt, genus quidem superficiem faciunt, eius vero speciem planum, vel planam superficiem, quemadmodum lineæ speciem rectam lineam. & idcirco planum diffiniunt ex quadam ad rectam lineam proportione. vt enim recta linea est, qua ex æquali suis interijcitur punctis, vel cuius media extremis obsistunt, vel breuissima omnium, quæ eosdem habent fines, ita planam superficiem dixerunt esse eam, quæ ex æquali suis interijcitur lineis, vel cuius media extremis obsistunt, vel breuissimam omnium superficierum eosdem fines habentium, & omnino quæcunque sunt rectæ lineæ diffinitiones, omnes ad planam superficiem commodissime transferri possunt. Quòd cum multæ sint superficierum species, Euclides planam tantum diffiniuit, atque in hac figuras, & earum affectiones contemplatur.



Planæ superficiei variæ di[...]nitiones.

Euclides superficiē pla[...] tum diffinit[...].

VIII.

Planus angulus est duabus lineis in plano se se contingentibus, & non in directum iacentibus, alterius ad alteram inclinatio.

IX.

Quando autem quę angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

F. C. COMMENTARIVS.

Angulum alij quidem in prędicamento eorum quę sunt ad aliquid ponentes, inclinationem esse dixerunt, vel linearum, vel planorum, quę ad se inuicem inclinata sunt. alij in qualitate ipsum comprehendentes, vt rectum, & inflexum, talem quandam affectionem dixerunt esse superficiei, vel solidi. alij autem ad quantitatem referentes vel superficiem, vel solidum esse asseuerarunt. diuiditur, inquiunt, is, qui in superficie est angulus lineæ; qui in solidis superficie. quod

 autem

autem his diuiditur nihil aliud est, nisi magnitudo; & hęc non linearis, namque lineam punctum diuidit. quare relinquitur, vt sit superficies, vel solidum. Quid igitur in tanta controuersia dicendum? aut quid eorum dicemus esse angulum? Respondet Proclus angulum nihil esse eorum per se, sed ex concursu omnium constitui. contingere autem hoc non solum angulo, sed & ipsi triangulo, quod quidem particeps est quantitatis, & idcirco ęquale dicitur, & inęquale; vt pote materię rationem habens, particeps quoque est qualitatis eius, quę ad figuram pertinet, quoniam & similia dicuntur triangula, & inęqualia. Ita igitur angulus quoque omnino quidem indiget quantitate, indiget autem & qualitate, per quam veluti propriam habet formam, & existentię figuram. indiget denique & determinantium ipsum linearum, vel planorum comprehendentium habitudine. atque ex his omnibus angulus constat. non tamen est vnum aliquod eorum. & est quidem diuisibilis, & ęqualitatem, & inęqualitatem suscipere potest, iuxta eam, quę in ipso est, quantitatem.

Angulorũ diuisio. *Angulorum alij quidem in superficiebus, alij vero in solidis consistunt: & eorum qui in superficiebus alij in simplicibus, alij in mixtis. Eorum qui in planis sunt alij simplicibus lineis comprehenduntur, alij mixtis, alij vtrisque. omnes autem qui rectis comprehenduntur lineis rectilinei appellantur.*



X.

Cum vero recta linea super rectam lineam insistens eos, qui deinceps sunt angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterque ęqualium angulorum: et quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui insistit.

XI.

Obtusus angulus est, qui maior est recto.

XII.

Acutus autem, qui recto est minor.

F. C. COMMENTARIVS.

In diffinitione anguli obtusi, & acuti genus subintelligi oportet, est enim vterque ipsorum rectilineus; hic quidem minor recto, ille autem maior. Sed non simpliciter quicumque minor est recto, is est acutus; neque quicumque maior recto est obtusus. nam qui gręce κερατοειδὴς dicitur, hoc est cornicularis, qui continetur recta linea circulum contingente, & circumferentia Angulus cornicularis *ipsa, non tantum recto, sed etiam omni acuto est minor, acutus autem non est. & semicirculi* Semicirculi angulus. *angulus omni recto est minor, sed tamen non est acutus. quorum quidem causa est, quod sunt mixti, & non rectilinei. & eorum, qui lineis circularibus, aut alioqui curuis continentur multi recto maiores apparent, non tamen sunt obtusi. Cum igitur rectum angulum diffinire proposuisset Euclides rectã assumpsit lineam super aliam rectam insistentem; & angulos, qui ex vtraque parte sunt, quos angulos deinceps appellat, inter se aequales facientem.* Anguli deinceps positi. *Obtusum autem, & acutum diffiniens non item assumpsit rectam lineam ad alterutram*



rtem

partem inclinatam, sed per comparationem ad rectum explicauit. ipse enim etiam non rectorum mensura est, quemadmodum & inequalium equalitas. linee vero ad alterutram partem inclinate infinite fiunt, & non vna tantum, vt perpendicularis. Illud autem meminisse oportet Euclidem hoc loco de ijs sermonem habere, que in eodem plano consistunt. quare neque perpendicularem omnem diffiniuit, neque omnem angulum. solida enim perpendicularis non ad vnam tantum rectam lineam angulos rectos facit, sed ad omnes, que ipsam tangunt, in subiecto existentes plano, de qua in vndecimo libro agetur. Angulus rectus est non rectarũ mẽsura, quemadmodum inæqualium æqualitas

XIII.

Terminus est, qui alicuius est finis.

F. C. COMMENTARIVS.

Terminum non ad omnem magnitudinem referri oportet, vt scribit Proclus, linee namque terminus est, & finis, sed ad spacia, que sunt in superficiebus, & ad solida. nunc enim terminum vocat ambitum, qui spacium vnumquodque determinat; & huiusmodi terminum, finem esse dicit, non vt punctum dicitur linee finis, sed vt includit, & seiungit ab ijs, que circumposita sunt. est autem hoc nomen prisce illi geometrie proprium, per quam agros metiebantur, & eorum terminos distinctos seruabant, ex qua huius scientie cognitionem assecuti sunt. huiusmodi igitur ambitum exteriorem terminum vocans Euclides iure, & merito ipsum finem determinauit spaciorum. per hunc enim vnumquodque contentorum prefinitur, veluti in circulo, circumferentia quidem terminus est, & finis; ipsum vero planum aliquod spacium est, & similiter in triangulo tria latera, & in quadrilatero quattuor latera termini sunt, & fines; spacium vero, quod his lateribus continetur. Terminus, & finis.

XIIII.

Figura est, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Figurarum aliae planae, aliae solide planarum figurarum circulus quidem, & ellipsis, solidarum sphera, & spheroides vnico termino, alie pluribus terminis continentur. Figurarum æ planæ, solidæ.

XV.

Circulus est figura plana vna linea contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab vno puncto intra figuram existente omnes rectæ lineæ pertinentes sunt equales.

XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

F. C. COMMENTARIVS.

Circulus planarum figurarum prima est, simplicitate quidem solidis prestans; vnitatis vero ad planas rationem habens.

Figura] *loco generis.* Plana] *ad differentiam figurarum solidarum.* Vna linea contenta] *vt differat ab ijs, que pluribus lateribus continentur.* quæ circumferentia appellatur] *per hoc differt ab ellipsi, que & ipsa vna linea continetur, sed eam ellipsim vocant. liceat enim mihi nunc spacium ellipsi contentum etiam ellipsim appellare.* Ad quam] *ab ellipsis autem centro non plures, quam quattuor recte linee equales ad ambitum duci possunt.* ab vno puncto] *ex infinitis punctis, que intra figuram sunt, vnum dumtaxat hoc prestare potest.* intra figuram existente] *est etiam punctum extra figure planum, à quo omnes recte linee ad circumferentiam ducte sunt equales, quod non centrum, sed circuli polus in sphericis appellatur.*



Ellipsis.

Circuli polus.

Diameter

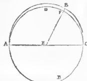
XVII.

Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem et bifariam circulum secat.

F. C. COMMENTARIVS.

Diametri parallelogrammorum.

Diameter circuli] *sunt enim parallelogrammorum quoque diametri, sed hę interdum διαγώνιοι hoc est diagonij appellantur. sunt & diametri ellipsis, quarum duę axes dicuntur. pręterea etiam sphęrę diametri sunt, quę axes nuncupantur. circuli igitur propria est diameter.* recta quædam linea per centrum ducta] *possunt namque in circulo duci infinitae rectae lineę, quę per centrum non transeunt.* & ex vtraque parte à circumferentia circuli terminata.] *rectę lineę etiam per centrum ductę, quę vel citra, vel vltra circumferentiam terminantur, diametri non sunt.* quæ & bifariam circulum secat.] *sit enim circulus A B C D, cuius diameter A C: et stante diametro intelligatur circumferētia A B C eleuari, ac superponi circumferentię A D C. Dico circumferentiam A B C ipsi A D C congruere. si enim non congruit, vel cadet extra, vel intra, vel partim extra, partim intra. cadat primum extra si fieri potest: & ex centro circuli, quod sit E, ducatur E B secans circumferentiam A D C in F. quoniam igitur rectę lineę à centro ad circumferentiam ductę inter se sunt ęquales, erit recta linea E B ęqualis ipsi E F, hoc est totum parti quod fieri non potest. quare circumferentia A B C extra ipsam A D C non cadet. similiter demonstrabimus neque eam cadere intra, neque partim extra partim intra. in ipsam igitur cadat necesse est: & circumferentia A B C congruet ipsi A D C. Quòd si circumferentia circumferentię congruit, & superficies contenta recta linea A C, & circumferentia A B C congruet superficiei, quę eadem A C, & circumferentia A D C continetur. ex quibus sequitur per octauam communem notionem & circumferentiam circumferentię, & superficiem superficiei ęqualem esse. diameter igitur A C circulum A B C D bifariam secat. quod oportebat demonstrare.*



XVIII.

Semicirculus est figura, quæ continetur diametro, & ea quæ ex ipsa circuli circunferentia intercipitur.

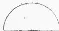
XIX.

Portio circuli est figura, quę recta linea, & circuli circumferentia continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex circuli quidem diffinitione centri naturam inuenit, ab omnibus alijs punctis quę in circulo sunt differentem; à centro autem diametrum diffiniuit, & ab omnibus alijs rectis lineis, quę intra circulum describuntur, seiunxit. nunc autem à diametro quid nam sit semicirculus tradit, cum dicat ipsum contineri duobus terminis, ijsq; semper differentibus, videlicet recta linea, & circumferentia:





rectam

& rectam lineam non esse quamlibet, sed circuli diametrum; si quidem & minor portio circuli, & maior continetur recta linea, & circumferentia; quae tamen semicirculi non sunt, quoniam circuli diuisio non est facta per centrum. omnes autem huiusmodi figurae biformes sunt, & ex dissimilibus constant. figurae enim contentae duobus terminis, vel duabus circumferentijs continentur, vt lunularis, vel recta linea, & circumferentia, vt iam dictae, vel duabus lineis mixtis, vt si duae ellipses se inuicem secent, figuram continebunt, quae inter ipsas interijcitur, vel mixta & recta, vt ellipsis dimidium. itaque semicirculus duabus quidem lineis dissimilibus, sed tamen simplicibus, atque ad se se applicatis continetur. antequam igitur triadicas figuras diffiniat, iure merito post circulum ad biformes accessit, quoniam duae rectae lineae spacium concludere nunquam possunt; recta autem linea & circumferentia possunt. & duae circumferentiae similiter vel angulum facientes, vt in lunulari, vel figuram angulis expertem, vt si duos intelligas circulos idem centrum habentes. quod enim medium interijcitur spacium duabus circumferentijs continetur interiori, & exteriori, & nullus fit angulus, cum se inuicem non secent, vt in lunulari, & vtrinque conuexa figura. At vero centrum semicirculi idem esse, quod & circuli centrum, manifeste constat. diameter enim centrum in se habens complet semicirculum. Illud autem notatione dignum solam hanc figuram ex planis in ambitu centrum habere. vnde colligitur centri tres esse locos, vel enim intra figuram, vt in circulo & ellipsi, vel in ambitu vt in semicirculo, vel extra, vt in vna sectionum conicarum, videlicet in hyperbola. Centrũ tres habet locos.

XX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

Quadrilateræ, quæ quattuor.

XXIII.

Multilateræ vero, quæ pluribus, quàm quattuor rectis lineis comprehenduntur.

F. C. COMMENTARIVS.

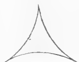


Post circulum, semicirculum, & circuli portiones, transit ad figuras rectilineas, quae quidẽ ordinatim per numeros in infinitum procedunt, initium ducentes à ternario, quoniam duae rectae lineae spacium concludere non possunt, vti dictum est. Meminit autem trilaterarum, & quadrilaterarum duntaxat figurarum, vtpote quae magis elementares sunt; in primo enim libro de triangulis, & parallelogrammis agit, reliquas communi nomine multilateras appellans. Porrò figurarum planarum aliae simplicibus continentur lineis, aliae mixtis, aliae vtrisque & earũ, quae simplicibus, aliae quidem similibus specie continentur, vt rectilinea, aliae specie dissimilibus, vt semicirculi, & circulorum portiones. earum insuper, quae specie similibus aliae circulari cõprehenduntur linea, aliae recta. At earũ quae circulari, aliae duabus, aliae pluribus continentur & vna quidem circulus ipse, quae vero duabus, aliae angulorum expertes. Figurarum planarum diuisio.

sunt,

Corona. *sunt, vt corona, quae concentricis circulis terminatur, alię angulares ut meniscus. earum quae pluribus, quàm duabus continentur, processus est in infinitum: tribus namque, & quattuor, et quae deinceps sunt circumferentiis quędam figurae comprehendūtur. si enim tres circuli se se contingant, spacium concludūt trilaterum, quod tribus circumferētiis terminatur, si vero quattuor, quattuor circumferentiis, & deinceps similiter. postremo earum, quae rectis lineis, aliae quidem tribus, aliae quattuor, aliae pluribus continentur.*






XXIIII.

Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Isosceles, siue æquicrure, quod duo tantū æqualia latera habet.

XXVI.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Adhæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.

XXVIII.

Obtusiangulum est, quod obtusum habet angulum.

XXIX.

Acutiangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

F. C. COMMENTARIVS.



Triangulorum diuisio interdum quidem à lateribus, interdum vero ab angulis ortum habet: & pręcedit ea, quae à lateribus tamquam nota, sequitur autem ea quae ab angulis tamquam propria, quoniam & tres ipsi anguli, videlicet rectus, obtusus, & acutus solis rectilineis figuris conueniunt: aequalitas verò laterum, & inequalitas inuenitur etiam in iis, quae rectilineae non sunt. dicit igitur triangulorū alia esse aequilatera, alia aequicruria, alia scalena, vel enim omnia latera aequalia sunt, vel omnia inequalia, vel duo tantū aequalia. Rursus triangulorum alia rectangula, alia obtusiangula, alia acutiangula, & rectangulum quidem diffinit, quod vnum angulum rectum habet, quemadmodum obtusiangulum, quod vnum habet

habet obtusum, fieri enim non potest, vt triangulum plures vno, vel rectos, vel obtusos angulos habeat: acutiangulum vero, quod omnes habet acutos; non enim satis est vnicum acutum habere, omnia si quidem triangula hoc modo acutiangula essent, namque omne triangulum duos habeat acutos necesse est, tres autem acutos acutiangulum solum. ex his diuisionibus colligitur septem tantum esse triangulorum rectilineorum species, & neque plures, neque pauciores. aequilaterum enim acutiangulum tantum est: reliquorum vero vnumquodque est triplex; nam aequicrure vel rectangulum est, vel obtusiangulum, vel acutiangulum: & similiter scalenum vel rectangulum, vel obtusiangulum, vel acutiangulum.





Septem triangulorum rectilineorum species.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum est quod & æquilaterum est, & rectangulum.

XXXI.

Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem, æquilatera vero non est.



XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.

XXXIII.

Rhomboides, quæ & opposita latera, & oppositos angulos inter se æquales habet, neque æquilatera est, neque rectangula.



XXXIIII.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

F. C. COMMENTARIVS.

Quadrilaterarum figurarũ aliae aequilaterae sunt, aliae non aequilaterae. rursus aliae rectangulae; aliae non rectangulae. quae igitur aequilaterae, & rectangulae sunt quadrata appellantur. quae vero rectangulae & non aequilaterae, altera parte longiores: & quae aequilaterae, & non rectangulae, rhombi. & postremo quae neque aequilaterae, neque rectangulae latera habent, & angulos, qui è regione sunt inter se aequales, rhomboides vocantur. alij in hunc modum diuidunt. Quadrilaterarum figurarum aliae parallelogramma sunt, quae la-



Quadrilaterarum figurarum diuisio.

Quadratũ.

Altera parte longius.

Rhombus.

Rhomboides.

tera ex opposito perellela habent, non parallelogramma vero, quae latera parallela non habent. parallelogrammorum autem alia quidem & rectangula, & aequilatera sunt vt quadrata, quae à graecis τετράγωνα appellantur, alia neque rectangula, neque aequilatera, vt rhomboidea, quae figuram rhombo similem habent. alia rectangula quidem, sed non aequilatera, vt altera parte longiora; alia è contrario aequilatera quidem, non autem rectangula, vt rhombus. non parallelogrammorum vero alia duo latera tantum habent parallela, alia nulla prorsus parallela habent: & illa quidem vocantur trapezia, hęc vero trapezoidea. Trapeziorum alia quidem latera, quae parallelas lineas coniungunt, aequalia habent, alia vero inaequalia. & illa aequicruria trapezia, hęc scalena trapezia appellantur. quadrilatera igitur figura septem modis constituitur. nam prima quidem quadratum est, secunda altera parte longius, tertia rhombus, quarta rhomboides, quinta aequicrure trapezium, sexta scalenum trapezium, septima trapezoides. Euclides autem figuras quadrilateras in parallelogramma, & non parallelogramma diuidere minime potuit, quippe qui neque de parallelis, neque de parallelogrãmo prius tractarit: trapezia autem, & trapezoidea omnia communi nomine appellaut trapezia ad eorum quattuor differentiam, in quibus parallelogrammorum inest proprietas, nempe ex opposito latera & angulos habere aequales; quod ipse in rhomboide tantum posuit, ne solis negationibus ipsum diffiniret, cum dixit, neque aequilaterum, neque rectangulum; in quibus enim proprijs caremus rationibus, communibus vti necessarium est. videtur autem rhombus dimotum esse quadratum, & rhomboides dimotum altera parte longius, propterea quòd iuxta latera quidem hec ab illis non differunt, sed iuxta angulorum duntaxat obliquitates, & acumina, cum illa rectangula sint.

Quadrata τετράγωνα vel Rhomboidea.

Rhombus Trapezia. Trapezoidea Trapezia aequicruria, & Scalena.

In quibus proprijs rõnibus caremus, cõmunibus utendum.

XXXV.

Parallelæ, seu æquidistantes rectæ lineę sunt, quę cum in eodem sint plano, & ex vtraque parte in infinitum producãtur, in neutram partem inter se conueniunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Quae nam sint parallelarum, seu aequidistantium rectarum linearum elementa, & quibus accidentibus dignoscantur, postea discemus. nunc quae sint parallelae his verbis diffinit. Quae cum in eodem sint plano] si enim altera quidem sit in subiecto plano, altera autem in sublimi iuxta quamuis positionem, inter se non conueniũt, non tamẽ propterea parallelae sunt. Et ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter se conueniunt] non rectae lineae non parallelae, si aliquatenus producantur, non conuenient, in infinitum autem produci, & non conuenire, parallelas designat, neque hoc simpliciter, sed ex vtraque parte, in infinitum produci, & non conuenire. fieri namque potest, vt non parallelae etiam ex vna quidẽ parte in infinitum producantur, ex altera vero minime. annuentes enim in hac parte, in altera plurimum distant. caussa autem hec est, quoniam duae rectae lineae spacium aliquod comprehẽdere non possunt, quòd si ex vtraque parte annuant hoc non continget. & Euclides quidem rectas lineas parallelas in hunc modum diffinit. Possidonius vero parallelae, inquit, sunt, quae neque annuũt, neque abnuunt in vno plano, sed aequales habent omnes perpendiculares, quae à punctis alterius ad alteram ducuntur; quęcunque vero minores faciunt perpendiculares inter se conueniunt. perpendicularis enim, & spaciorum altitudines, & linearum interualla determinare potest. quamobrem cum perpendiculares sint aequales, & rectarum linearum interualla aequalia erunt: cum vero minores, & interuallum minuitur, & conueniunt inter se ad eas partes, in quibus perpendiculares sunt minores. Pitho geometra parallelas rectas lineas explicans non contentus ijs, quae scripsit Euclides, eas aptissime exemplo declarauit. dixit enim rectas lineas parallelas esse, quales in parietibus, vel pauimento columnarum vmbras à lampade è regione ardente, vel lucerna factas videmus, quod quomodo intelligendum sit vt apud Serenum

Possidonius parallelas aliter diffinit.

Perpendicularis spaciorum altitudines & linearũ interualla determinat.

rerum in fine libri de sectione Cylindri. Post diffinitiones sequuntur postulata, deinde axiomata, seu communes notiones. postulata autem & axiomata, vt refert Proclus ex Gemino illud habent commune, vt non indigeant demonstratione aliqua, aut geometrica fide, sed sumatur tamquam nota, & principia fiant eorum, quae sequuntur. at differunt axiomata à postulatis eodem prorsus modo, quo theoremata à problematibus. vt enim in theorematibus quidem id, quod subiecta consequitur, perspicere & cognoscere proponimus, in problematibus vero excogitare aliquid, & facere iubemur: ita & in axiomatibus ea sumuntur, per quae sese manifesta sunt, nostrisq; insitis notionibus sunt in promptu; in postulatis verò ea sumere quaerimus, quae facilia, parabiliaq; sunt, & in quibus sumendis cogitatio non defatigatur, quaeq; nulla neque varietate, neque constructione indigent.

Axiomata a postulatis differunt eodē modo, quo theoremata a problematibus.

POSTVLATA.

I

Postuletur à quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere.

II.

Rectam lineam terminatam in continuum, & directum producere.

III.

Quouis centro, & interuallo circulum describere.

F. C. COMMENTARIVS.



Tria hęc & ob facilitatem, & quod aliquod comparare nobis imperant in postulatis necessario collocanda sunt, ex Gemini sententia. nam illud quidem, A quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere, sequitur eam diffinitionem, quae tradit lineam esse puncti fluxum, & rectam lineam aequabilem, & non decliuem fluxum. si igitur intelligamus punctum aequabili, & breuissimo motu ferri in alterum punctum incidemus, & primum postulatum factum erit, nihil vtique varium intelligentibus nobis, si vero recta linea puncto terminata, similiter intelligamus eius terminum breuissimo, & aequabili motu ferri, secundum postulatum facili, simplicią; aggressione comparatum erit. Quòd si rursus terminatam rectam lineam manere quidem ex altera parte, ex altera autem moueri circa manens punctum intelligamus, tertium fiet postulatum; centrum namque erit punctum manens, interuallum vero recta linea; & quanta ea fuerit, tantum erit interuallum à centro ad omnes circumferentiae partes.

IIII.

Omnes angulos rectos inter se æquales esse.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc quamquam vt manifestum, & nulla indigens demonstratione à nobis concedatur, postulatum tamen non est ex sententia Gemini, sed axioma: accidens enim quoddam per se rectis angulis dicit, nihil simplici notione facere iubens. si cui vero non satis constet rectos angulos omnes inter se aequales esse, is petat demonstrationem à Proclo, quam affert in commentarijs. Pappus recte animaduertit huius conuersum non etiam verum esse, nempe angulum recto aequalem omnino esse rectum, nisi rectilineus sit; potest enim curuilineus quoque angulus recto aequalis ostendi.

V.

Et si in duas rectas lineas recta linea incidēs interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectas lineas illas in infinitum productas, inter se conuenire ex ea parte, in qua sūt anguli duobus rectis minores.



F. C. COMMENTARIVS.

Hoc à postulatis penitus reijciendum censet Proclus, cum theorema sit, quod multas habet & dubitationes, quas Ptolemęus in quodam libro soluere sibi proposuit. multis vero & diffinitionibus, & theorematibus in demonstratione indiget, cuius conuersion Euclides, etiam tanquam theorema ostendit. sed de hoc inferius suo loco agetur.

AXIOMATA, SEV COMMVNES NOTIONES.

I.

Quę eidem ęqualia, et inter se sunt ęqualia.

I I.

Et si ęqualibus ęqualia adijciantur tota sunt ęqualia.

I I I.

Et si ab ęqualibus ęqualia auferantur, reliqua sunt ęqualia.

I I I I.

Et si inęqualibus ęqualia adijciantur, tota sunt inęqualia.

V.

Et si ab inęqualibus ęqualia auferātur, reliqua sunt inęqualia.

V I.

A Et quę eiusdem dupla, inter se sunt ęqualia.

V I I.

Et quę eiusdem dimidia inter se sunt ęqualia.

V I I I.

B Et quę sibi ipsis congruunt, inter se sunt ęqualia.

I X.

Totum est sua parte maius

X.

C Duę rectæ lineæ spacium non comprehendunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Axiomata mathematicis scientijs communia.

Axiomata ferè omnia mathematicis scientijs communia sunt: neque solum in magnitudinibus, sed & in numeris, & motibus, & temporibus vera esse deprehenduntur. aequale enim & inęquale, totum & pars, maius, & minus, quantitatibus continuis, & discretis communia sunt. contemplatio igitur quae circa tempora, & quae circa motus, & quae circa numeros, & quae circa magnitudines versatur, his omnibus tanquam manifestis indiget. communibus autem existentibus vnusquisque vtitur secundum propriam materiam, quoad ipsa requirit: & alius quidem ut in magnitudinibus, alius ut in numeris, alius uero ut in temporibus ipsis utitur, & hoc modo propriae in unaquaque sciētia cōclusiones fiunt, licet axiomata cōmunia fuerint.

Et

Ët quæ eiuſdem dupla inter ſe ſunt æqualia. A

Hoc ex illo ſequitur, Si aequalibus aequalia adyciantur tota aequalia eſſe, nam quae dimidio ſunt aequalia, cum ipſum dimidium aſſumpſerint eiuſdem dupla ſunt, & inter ſe aequalia ob aequale additamentum: & hac ratione non ſolum dupla, ſed & tripla & eiuſdem etiam multiplicia omnia aequalia apparebunt.

Et quæ ſibi ipſis congruunt inter ſe ſunt æqualia] *hoc geometriae proprium eſt.* B

Duæ rectæ lineę ſpacium non comprehendunt] *Hoc non admodum manifeſtum videtur. quare in editione Campani inter petitiones locum obtinuit.* C

His axiomatibus nonnulla alia adycienda cenſuit Pappus, vt videre licet apud Proclum. Cum autē omnis ſcientia duplex ſit. alia quidem circa immediatas propoſitiones verſatur, alia vero circa ea quę ex illis demonſtrantur, comparanturq́; & omnino circa ea, quae principia conſequuntur, ſuam perficit tractationem. hęc rurſus in geometricis rationibus ſe ipſam in problematum per actionem, & in theorematum inuentionem diſpertiuit; problemata quidem appellans ea, in quibus, quae non ſunt quodammodo comparare proponit, in apertumq́; proferre; & machinari: theoremata vero, in quibus id, quod ineſt, vel non ineſt perſpicere, cognoſcereq́; ac demonſtrare inſtituit. & illa quidem ortus, & poſitiones, & applicationes, & deſcriptiones, & circumſcriptiones, & bipartitiones, atque alia huiuſmodi conſtituere iubent; hęc vero ſymptomata, & quae ſubiectis geometriae per ſe inſunt, perſuadere, demonſtrationibuſq́; firmare contendunt. Omne autem problema, & omne theorema perfectum, expletumq́; ſuis partibus, hęc omnia in ſe ipſo habere debet, Propoſitionem, Expoſitionem, Determinationem, Conſtructionem, Demonſtrationem, & Concluſionem. harum autem Propoſitio dicit quo dato quid quęſitum ſit, perfecta enim propoſitio ex vtriſque conſtat. Expoſitio ipſum per ſe datum aſſumens pręparat quęſtioni. Determinatio ſeorſum quęſitum quodnam ſit explicat. Conſtructio ea, quae dato deſunt ad quęſiti uenationem adycit. Demonſtratio perite ex conceſſis quod propoſitum eſt colligit. Concluſio rurſus ad propoſitionem regreditur confirmans id, quod oſtenſum eſt. & omnes quidem problematum, & theorematum partes tot ſunt. maxime autem neceſſariae, & quae in omnibus inſunt Propoſitio, Demonſtratio, & Concluſio: oportet enim ante cognoſcere quęſitum, perq́; media oſtendere. & quod oſtenſum eſt concludere. Harum autem trium, vt aliqua deſit, fieri non poteſt. at reliquae ſępe aſſumuntur, ſępe vero, cum nullam afferant vtilitatem, omittuntur. Determinatio enim, & Expoſitio non ſunt in illo problemate. Aequicrure triangulum conſtituere, quod habeat vtrumque eorum, qui ad baſim ſunt, angulorum duplum reliqui. Conſtructio autem in compluribus theorematibus non eſt, cum ſatis ſit expoſitio abſque alia additione, vt ex datis propoſitum oſtendatur. Quando igitur deficere expoſitionem dicimus? cum in propoſitione nullum fuerit datum. quamquam enim propoſitio diuidatur in datum & quęſitum, non tamen hoc ſemper fit, ſed aliquando ſolum dicit quęſitum, quod cognoſcere, vel comparare oportet, vt in iam dicto problemate. non enim ante dicit, quo dato oporteat aequicrure triangulum conſtituere, habens vtrumque aequalium angulorum duplum reliqui, ſed tantum quod oportet illud comparare. & fit quidem etiam hoc loco ex ante cognitis propoſiti ſumptio. etenim quid aequicrure, & quid aequale, vel duplum ſit cognoſcimus. hoc autem omni dianoeticae diſciplinae proprium eſſe dicit Ariſtoteles. nihil tamen nobis ſubycitur, quemadmodum in alijs problematibus, vt quando dicit, Datam rectam lineam terminatam bifariam ſecare. hic enim recta linea data eſt, iubemur autem ipſam bifariam diuidere. ſeorſum igitur ponitur datum, & ſeorſum quęſitum. Cum autem propoſitio vtrumque habuerit, tum & determinatio inuenitur, & expoſitio; ſed cum deficit datum, & hae deficiant neceſſe eſt. expoſitio etenim eſt dati, & determinatio, quae propoſitioni eadem erit. nam quid aliud dicas determinans in iam dicto problemate, niſi quod aequicrure triangulum inuenire oportet? hoc autem erat propoſitio. ſi igitur propoſitio non habeat datum, & quęſitum, expoſitio quidem tacetur, quod non ſit datum; determinatio vero prętermittitur, ne eadem ſit, quae propoſitio. multa autem alia inuenias huiuſmodi problemata, pręſertim in arithmeticis, & in decimo libro, vt inuenire duas rectas lineas potentia commenſurabiles, quae medium comprehendant, & omnia, quae eiuſmodi ſunt. Animaduertendum tamen Archimedem quidem ſępe, vt in libro de quadratura parabolae, Pappum vero ferē ſemper propoſitionem ipſam omittere, contentos expoſitione, ac determinatione, loco propoſitionis. Datum autem omne, vno horum modorum datur vel poſitione, vel proportione, [illegible] magnitudine, vel ſpecie: punctum enim dumtaxat poſitione datur, linea vero, &

alia

Omne problema [illegible]

Propoſitio, [illegible]

Conſtructio [illegible]

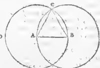
Archimedes & Pappus aliquando propoſitionem omittunt.

Specie. — Magnitudine. — Proportione. — Cum positio uaria sit, & constructio uariabitur. — Demonstrationis perfecta. — Geometricae rationes necessitatē habent ob subiectam materiam. — Cōclusio duplex. — Lemma. — Casus. — Corollariū. — Instantia. — Deductio. — Cubi duplicatio.

alia omnibus. nam cum dicimus datum angulum rectilineum bifariam secare, speciem anguli, quae data est, significamus, nempe rectilineam, vt ne quęramus eisdem methodis etiam curuilineum angulum bifariam secare. Cum vero dicimus, Datis duabus rectis lineis inęqualibus à maiori aequalē minori abscindere, magnitudine datae sunt. maius enim, & minus, terminatum, & infinitum ad magnitudinem referuntur. At cum dicimus, Si quattuor magnitudines proportionales sint, & permutando proportionales erunt, datur eadem proportio in quattuor magnitudinibus, & cum dicimus Ad datum punctum oportet datae lineae aequalem rectam lineam ponere, punctum positione datur. quare cum positio varia esse possit, & constructio variabitur; datur enim punctum vel extra rectam lineam, vel in recta linea, & in extremitate, vel inter ipsius terminos. itaque cum datum quadrupliciter sumatur, & expositio quadrupliciter fit, & quandoque duos etiam, & tres modos complectitur. demonstratio vero interdum quidem quae demonstrationis propria sunt habere inuenietur, ex diffinitionibus medijs quęsitum ostendens; hęc enim demonstrationis perfectio est. interdum uero ex certis notis arguens; quod diligenter attendere oportet, ubique enim geometricae rationes necessitatem habent ob subiectam materiam, non ubique uero demonstrantibus methodis perficiuntur. denique conclusio duplex esse solet, particularis, & uniuersalis. nam cum in dato conclusionem fecerimus, ne uideamur particularia proposuisse, ad uniuersalem transimus conclusionem. Verum cum hęc ita determinata sint, de ijs quae ipsis adnectuntur, breuiter differemus, nempe quid sit lemma, quid casus, quid corollarium, quid instantia, quid deductio. lemma uel sumptio proprie in geometricis est propositio fide indigens. cum enim uel in constructione, uel in demonstratione aliquod sumimus eorum, quae ostensa non sunt, sed ratione indigent, tunc id quod sumptum est, veluti per se ambiguum inquisitione dignum esse arbitrati, lemma ipsum appellamus, à postulato, & axiomate differens quatenus demonstrari potest, cum illa absque demonstratione ad aliorum fidem faciendam per se sumantur. Casus autem differentes constructionis modos, & positionis mutationem indicat, nimirum transpositis punctis, uel lineis, uel planis, uel solidis, & omnino ipsius uarietas circa descriptionem uersatur; ac propterea dicitur casus, quòd sit constructionis transpositio. Corollarium uero dicitur quidem & de quibusdam problematibus, qualia sunt corollaria Euclidi ascripta: sed proprie dicitur corollarium, quando ex demonstratis aliquod aliud theorema apparet, quod à nobis propositum non est, & corollarium ob id uocant, quòd sit tanquam lucrum quoddam accedens preter demonstrationis propositum. Instantia uero totum orationis impedit cursum, uel constructioni, uel demonstrationi occurrens, quam tamen non oportet ut ueram admittere, sed remouere, & ostendere falsam esse. Deductio autem est transitus ab alio problemate, uel theoremate ad aliud; quo cognito, uel comparato etiam illud, quod propositum est, apparet, ut cum quęreretur cubi duplicatio transtulerunt quęsitum in aliud, quod hoc consequitur, uidelicet in duarum mediarum inuentionem. & deinceps quęsierunt quo nam pacto datis duabus rectis lineis duae mediae proportionales inueniantur.

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

In data recta linea terminata, triangulū æquilaterū constituere.



Sit data recta linea terminata A B. oportet in ipsa A B triangulum æquilaterum constituere. centro quidem A interuallo autem A B circulus describatur B C D. & rursus centro B, interualloq; B A describatur circulus A C E, & à puncto C, in quo circuli se inuicem secant ad A B ducantur rectæ lineæ C A C B. Quoniam igitur A centrum est circuli C B D, erit A C ipsi A B æqualis. rursus quoniā B circuli C A E est centrum, erit B C æqualis B A. ostensa est autem et C A æqualis A B. vtraque igitur ipsarum C A C B ipsi A B est æqualis. quæ autem eidē sunt æqualia, et inter se æqualia sunt. ergo C A ipsi C B est æqualis. tres igitur C A A B B C inter

ter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est A B C, & constitutum est in data recta linea terminata A B, quod fecisse oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ea omnia, quae ante dicta sunt, in hoc primo problemate contemplari licet. nam problema esse manifesto apparet: imponit enim nobis trianguli aequilateri ortum machinari. & propositio ex dato; & quæsito constat. datur enim recta linea terminata, quæritur autem quo pacto in ipsa triangulum aequilaterum constituatur. & præcedit quidem datum, sequitur autem quæsitum, vt connexum etiam texere possis, si est recta linea terminata, fieri potest vt in ipsa constituatur triangulum aequilaterum. neque enim non recta ex stente triangulum constituetur, quod ex rectis lineis constat, neque non terminata; angulus enim fieri non potest, nisi ad vnum punctum, infinitae autem extremum punctum non est. post propositionem sequitur expositio. Sit data recta linea terminata A B] *& vides expositionem datum solum explicare, non etiam quæsitum adiungere, post quam determinatio* [oportet in data recta linea triangulum æquilaterũ constituere] *determinatio autem quoddammodo attentionis est causa, attentiores enim ad demonstrationem nos reddit quæsitum pronuntiando, quemadmodum expositio dociliores efficit, datum ante oculos ponendo. post determinationem constructio sequitur* [centro quidem altero rectæ lineæ termino, interuallo autem reliquo circulus describatur, rursusq; centro quidem reliquo, interuallo autem eo, quod prius centrum erat, describatur circulus, et à communi sectionis circulorum puncto ad lineæ terminos rectæ lineæ ducantur] *& vides me ad constructionem vti postulatis, videlicet à quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere. & quouis centro & interuallo circulum describere. vniuerse enim postulata constructionibus, axiomata vero demonstrationibus vtilitatem afferunt. deinde sequitur demonstratio, quae ex circuli diffinitione, & illo axiomate: Quae eidem aequalia, & inter se sunt aequalia, concludit tres rectas lineas C A A B B C inter se esse aequales. vnde colligitur triangulum A B C aequilaterum esse, atque hęc est prima conclusio, quae expositionem consequitur, post hanc est ipsa vniuersalis.* [In data igitur recta linea triangulum æquilaterum constitutum est.] *siue enim duplam eius, quae nunc exposita est, feceris datam, siue triplam, siue aliam quamlibet maiorem, vel minorem; eaedem constructiones, & demonstratione congruent. his apposuit particulam* [quod fecisse oportebat] *ostendens conclusionem problematicam esse; etenim in theorematibus apponit* [quod ostendisse oportebat] *namq; illa factionem alicuius, hęc demonstrationem, & inuentionem denuntiant. In vno igitur hoc primo problemate omnia examinare volumus, ac perspicua facere. oportet autem illos, qui hęc legent, in reliquis eadem quærere, & quę nam eorum assumantur, quęnamue omittantur, & id, quod datum est, quotupliciter detur: & ex quibus principijs vel constructiones, vel demonstrationes pendeant. horum enim perspicax contemplatio non paruam exercitationem, geometricarumq; rationum meditationem affert. sed fortasse non inutile erit reliqua etiam triangula constituere. & primum aequicrure. Sit igitur A B, in qua oportet aequicrure triangulum constituere: & describantur circuli, vt in aequilatero, producaturq; A B ex vtraque parte ad C D puncta. aequalis igitur est C B ipsi A D. quare centro quidem B, interuallo autem C B circulus C E describatur. & rursus centro A, & interuallo D A describatur circulus D E. & à puncto E, in quo se se circuli secant ad A B puncta ducantur E A E B. quoniam igitur E A aequalis est ipsi A D, & E B ipsi B C: aequalis autem A D ipsi B C: erit & E A ipsi E B aequalis. sed & maiores sunt quàm A B. aequicrure igitur triangulum est A B E, quod fecisse oportebat. At propositum sit scalenum constituere triangulum in data recta linea A B, & describantur circuli centris, interuallisq;, vt in superioribus. & sumatur in circumferentia circuli A centrum habentis, punctum F, & ducta A F producatur ad G, & G B iungatur.*

Propositio, quæ ex dato & quæsito constat.

Expositio.

Determinatio.

Cõstructio.

Postulata cõstructionib' vtilia

Demonstratio.

Conclusio prima, & particularis.

Cõclusio uniuersalis.

Quod fecisse oportebat

Quod ostendisse oportebat.

Aequicruris trianguli cõstitutio.

Scaleni trianguli constitutio.

quoniam

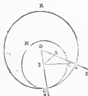
aequalis igitur A cētrum est circuli D E, erit A F ipsi A D aequalis. maior igitur est A G quàm A D, hoc est quàm G B. centrum enim est ipsum B circuli C E. ergo G B est aequalis B C, ac propterea G B quàm B A maior. at G A maior quàm G B. tres igitur C B B A A G inęquales sunt. quare scalenum triangulum est. tria igitur triangula sunt constituta. sed hęc diuulgata sunt. Illud vero in his pulchrum inuenitur Triangulum scilicet aequilaterum vndequaque aequale existens vnico modo constitui, Aequicrure autem in duobus tantum lateribus aequalitatem habens, constitui dupliciter; data namque recta linea, vel ambabus aequalibus minor est, vt nos posuimus, vel maior: scalenum vero vndique inęquale existens tripliciter constitui. vel enim data recta linea maxima est, vel minima trium, vel altera quidem maior, altera vero minor & licet in vna quaque harum positionum vel protendenti, vel contrahenti se exercere. nobis autem quae sunt exposita sufficiant. At si vniuerse contemplabimur dicemus, problematum alia quidem simpliciter, alia vero multipliciter, & alia infinite constitui, & ea, quae simpliciter constituuntur (vt inquit amob nomus) ordinata appellantur, & quae constituuntur multipliciter, media, quae vero finite, inordinata vocantur. Vide reliqua apud Proclum, fortasse enim hęc satis superq́;.

Aequilaterū triangulum unico modo constituitur. Aequicrure dupliciter. Scalenum triplicit.

Problemata ordinata. Media. Inordinata.

PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

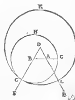
Ad datum punctū datæ rectæ linee ęqualē rectam lineā ponere.



Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C. oportet ad A punctum ipsi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. ducatur a puncto A ad B recta linea A B. et in ipsa constituatur triangulum ęquilaterum D A B, producanturq; in directum ipsis D A D B rectæ lineæ A E B F. et centro quidem B, interuallo autem B C circulus C G H describatur. rursusq; centro D, et interuallo D G describatur circulus G K L. Quoniam igitur punctum B cētrum est C G H circuli, erit B C ipsi B G æqualis. & rursus quoniam D centrum est circuli G K L, erit D L æqualis D G: quarum D A est æqualis D B. reliqua igitur A L reliquę B G est æqualis. ostenta autē est B C æqualis B G. quare vtraque ipsarum A L B C est æqualis ipsi B G. quæ autem eidem æqualia sunt, et inter se sunt æqualia. ergo & A L est æqualis B C. ad datum igitur punctū A datę rectę lineę B C ęqualis posita est A L. quod facere oportebat.

Postul. 1. — Prima huius — Postul. 2. — 3. — Diffin. 15. — Com no. 3. — Com no. 1.

F. C. COMMENTARIVS.

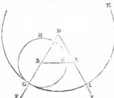


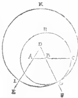
Problematum, & theorematum alia quidem sine casu sunt, alia vero multos habent casus. quęcunque igitur eandem vim habent per plures descriptiones peruadentem, & positiones permutantia eandem demonstrationis rationem seruant, hęc casum habere dicuntur. quęcunque vero iuxta vnam dumtaxat positionem, vnamq́; constructionem procedunt, ea sunt sine casu. simpliciter enim casus circa constructionem tum theorematum, tum problematum consideratur. secundum igitur problema multos habet casus. datur autem in ipso punctum quidem positione, eo enim tantum modo dari potest; linea vero specie, & magnitudine datur. quęritur autem rectae lineae aequalem rectam lineam ponere ad datum punctum, vbicunque situm fuerit. & constat omnino punctum illud in eo-

Problematum, & theorematum alia sunt sine casu, alia multos habent casus.

Secundū problema multos habet casus.

dem esse plano, in quo & recta linea, non autem in sublimi. omnibus si quidem planorum problematibus, & theorematibus unum subiici planum existimare oportet. at vero huius problematis casus fieri iuxta puncti dati differentem positionem manifestum est. aut enim punctum extra rectam lineam ponitur, aut in ipsa. & siquidem in ipsa, vel in altero eius termino, vel intra terminos. si vero extra rectam lineam, vel à lateribus ponitur, ita vt ab eo ad terminum rectae lineae ducta angulum faciat; vel in directum ipsi siue à fronte, siue à tergo, ita vt producta linea ad dictum punctum pertineat. Euclides autem punctum datum extra rectam lineam sumpsit, atque a lateribus. si enim in ipsa, frustra duceretur à puncto A ad B recta linea, quippe quae iam ducta esset at si in recta linea B C punctum sumatur inter B C, vel in directum ipsi, producta nimirum B C ad A, similiter in ipsa B A constituetur triangulum aequilaterum D A B: latera autem eodem protendentur modo, & demonstratio eadem erit. Quòd si loco trianguli aequilateri, aequicruri vti libeat, nihilominus eadem sequentur. denique si punctum datum fuerit in altero rectae lineae termino, non opus erit neque triangulo, neque altero circulo, sed sola descriptio vnius circuli satis erit. centro enim dicto termino, in quo est punctum datum, interuallo autem reliquo, si circulus describatur, quot quot ab eo ad circumferentiam rectae lineae ductae fuerint, problema efficient.

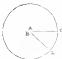


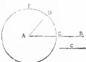


Aequicruri triangulo pro æquilatero uti licet.

RPOBLEMA III.
PROPOSITIO III.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus à maiori minori æqualem abscindere.





Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B C; quarum maior sit A B. oportet à maiori A B minori C æqualem rectam lineam abscindere. ponatur ad A punctum ipsi C æqualis recta linea A D: & centro quidem A, interuallo autem A D circulus describatur D E F. et quoniam A centrũ est D E F circuli, erit A E ipsi A D æqualis. sed & C est æqualis AD. vtraque igitur ipsarum AE C ipsi AD æqualis erit. Quare & A E ipsi C est æqualis. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus AB C à maiori AB minori C æqualis Abscissa est A E. quod fecisse oportebat.

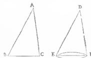
Ex antecedente.

post. 3.

Com. no. 1.

THEOREMA. I. PROPOSITIO. IIII.

A Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo ęquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur.



Sint duo triangula A B C D E F, quæ duo latera A B A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B lateri D E æquale, latus vero A C ipsi D F; et angulum B A C angulo E D F æqualem. Dico & basim B C basi E F æqualem esse, et triangulum A B C æquale triangulo D E F, et reliquos angulos reliquis angulis æquales, alterum alteri; quibus æqualia latera subtenduntur, nempe angu-
B lum A B C angulo D E F: et angulum A C B angulo D F E. triangulo enim A B C congruente ipsi D E F, et puncto quidem A posito in D, recta vero linea A B in ipsa D E: et punctum B puncto E congruet; quòd A B ipsi D E sit æqualis. congruente autem A B ipsi D E; congruet & A C recta linea rectæ lineæ D F, cum angulus B A C sit æqualis angulo E D F. quare et C congruet ipsi F: est enim rursus recta linea A C æqualis rectæ D F. sed et punctum B congruebat puncto E. ergo et basis B C basi E F congruet. nã si puncto quidẽ B congruẽte ipsi E, C vero ipsi F;
Com. no. basis B C basi E F non congruit, duæ rectæ lineæ spacium comprehendent: quòd fieri non potest. congruet igitur B C basis basi E F, & ipsi æqualis erit. quare et totum A B C triangulum congruet toti triangulo D E F, et ipsi erit æquale; et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et ipsis æquales erunt. videlicet angulus A B C angulo D E F, et angulus A C B angulo D F E. si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem et angulũ angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; et triangulum triangulo æquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: quod ostẽdere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant alterum alteri] *in hac propositione duo sunt, quę dantur, videlicet duorum laterum ęqualitas, & ęqualitas eorum angulorum, qui ęqualibus lateribus continentur. quae quidem proportione dari manifestum est. quęruntur autem tria, aequalitas basium, aequalitas triangulorum, & aequalitas reliquorum angulorum. sed quoniam fieri potest vt duo quidem latera duobus lateribus sint aequalia, theorema autem verum non sit, quòd non alterum alteri est aequale, sed vtraque simul: propterea addidit, aequalia esse latera non simpliciter, sed alterum alteri.*

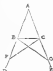
B Triangulo enim A B C congruente ipsi D E F, et puncto quidem A posito in D, recta vero linea A B in ipsa D E: et punctum B puncto E congruet, quod A B ipsi D E sit æqualis, et reliqua.

Demonstratio per superpositionẽ figurarũ mathematicis usitata.

Hic demonstrationis modus, qui fit per superpositionem figurarum pręterquam quod approbatur à Proclo mathematicarum scientiarum peritissimo, est etiam maximo vsu mathematicis Archimedes enim eum vsurpat non solum in planis figuris, vt in libro de centro grauitatis planorum, sed etiam in solidis, vt in libro de conoidibus, & sphęroidibus.

THEOREMA II. PROPOSITIO. V.

Aequicrurium triangulorum qui ad basim anguli inter se sunt æquales: & productis æqualibus rectis lineis anguli qui sunt sub basi inter se æquales erunt.



Sit æquicrure triangulum A B C; habens A B latus lateri A C æquale, et producantur indirectum ipsis A B A C rectæ lineæ B D C E. Dico angulum quidem A B C angulo A C B; angulum vero C B D angulo B C E æqualem esse. sumatur enim in linea B D, quod vis punctum F: atque à maiori A E minori A F æqualis auferatur A G: iunganturq; F C, G B. Quoniam igitur A F quidem est ęqualis A G; A B vero ipsi A C; duæ F A A C, duabus G A A B ęquales sunt, altera alteri; et angulum F A G communem continent. basis igitur F C basi G B est ęqualis; et triangulum A F C ęquale triangulo A G B; et reliqui anguli reliquis angulis ęquales erunt, alter alteri; quibus ęqualia latera subtenduntur: Videlicet angulus quidem A C F ęqualis angulo A B G; angulus vero A F C; angulo A G B. Et quoniam tota A F, toti A G est æqualis; quarum A B est ęqualis A C; erit et reliqua B F reliquę C G ęqualis. ostensa est autem F C ęqualis G B. duę igitur B F, F C duabus C G G B ęquales sunt, altera alteri; et angulus B F C ęqualis angulo C G B: estq; basis ipsorum B C communis. ergo et triangulum B F C triangulo C G B ęquale erit; et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, alter alteri, quibus ęqualia latera subtenduntur. angulus igitur F B C est ęqualis angulo G C B: et angulus B C F angulo C B G. Itaque quoniam totus A B G angulus toti angulo A C F ęqualis ostensus est, quorum angulus C B G est ęqualis ipsi B C F: erit reliquus A B C reliquo A C B æqualis: et sunt ad basim A B C trianguli: ostensus autem est & F B C angulus æqualis angulo G C B; qui sunt sub basi. æquicrurium igitur triangulorum, qui ad basim anguli inter se sunt æquales; et productis æqualibus rectis lineis anguli, qui sunt sub basi inter se æquales erunt. quod ostendisse oportebat.

3 Huius.

Ex præcedente.

Axioma 3.

Ex præcedente.

Axioma 3.

F. C. COMMENTARIVS.

Theorematum alia simplicia sunt, alia composita. dico autem simplicia quęcunque iuxta positiones, & conclusiones indiuidua sunt, vnum habentia datum, et vnum quęsitum. vt si Euclides ita dixisset. omne triangulum aequicrure aequales habet, qui ad basim sunt, angulos. composita verò sunt, quae ex pluribus constantia, vel positiones habēt compositas, vel conclusiones, vel etiam vtrasque. compositorum autem alia sunt complexa, alia incomplexa. incomplexa sunt quęcunque in simplicia theoremata diuidi non possunt, cuiusmodi est quartum theorema; in eo enim & datum componitur, & quęsitum, sed datum in simplicia diuidi minime potest, vt plura fiant theoremata: non enim si triangula aequales habeant angulos, vel eum duntaxat, qui est ad verticem, reliqua contingunt. complexa vero sunt quęcunque in simplicia diuiduntur, vt illud theorema, Triangula, & parallelogramma quae eandem habent altitudinem inter se sunt, vt bases. fieri enim potest, vt diuidentes ita dicamus. Triangula quae eandem habent altitudinem inter se sunt, vt bases, & in parallelogrammis similiter. Omnium autem compositorum alia quidem iuxta conclusionem componuntur, ab eadem positione ortum habentia; alia vero iuxta positiones, & eandem omnibus conclusionem inferunt; & alia iuxta conclusiones, & positiones componuntur. Itaque iuxta conclusionem compositio est in quarto theoremate. in eo enim tria sunt quae concluduntur, videlicet bases aequales esse, & triangula aequalia, & reliquos angulos reliquis angulis aequales; quibus aequalia latera subtenduntur. iuxta positiones compositio inuenitur in theoremate, quod triangulis, & parallelogrammis, eandem habentibus altitudinem commune est. iuxta vtrasque autem

Theoremata simplicia.

Theoremata coposita.

Composit. Theo. alia cōplexa, alia incomplexa.

Complexa theoremata.

Theorema compositū iuxta conclusionem.

Theo cōpo. iuxta positiones.

 in illo.

Complexorum Theorematu alia, uniuersalia, alia ex particularibus uniuersale cõcludunt.

Thales quum Theorematis inuentor.

in illo Diametri circulorum & ellipsium tum spacia, tum lineas spacia continentes bifariam diuidunt Rursus complexorum theorematum alia vniuersalia sunt, alia ex particularibus vniuersale concludunt. omnino autem has compositiones geometrae ob breuitatem, ac resolutiones excogitarunt. multa enim cum incomposita sint, non resoluuntur: composita vero solum commoditates prębent ad resolutionem, quae in principia tendit. his igitur consideratis apparet quantum theorema compositum esse, tum iuxta datum, tum iuxta quęsitum, & vtrumque eorum, quae componuntur perfectum est ac verum. quamobrem resolutio quoque vera est in vtroque siue enim qui ad basim anguli, siue productis aequalibus rectis lineis anguli sub basi aequales sint, aequicrure triangulum erit Huius theorematis inuentor fuit Thales, vt refert Proclus is enim primus dicitur animaduertisse omnis aequicruris angulos qui ad basim esse aequales, ac more antiquorum aequales similes appellasse.

THEOREMA III. PROPO. VI.

Si trianguli duo anguli inter se sint æquales, et æquales angulos subtendentia latera inter se ęqualia erunt.



Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB æqualem. Dico et AB latus lateri AC æquale esse; si enim inæqualis est AB ipsi AC; altera ipsarum est maior. sit maior AB; atque à maiori AB minori AC æqualis auferatur DB; et DC iungatur. Quoniam igitur DB est æqualis ipsi AC; communis autem BC: erunt duæ DB BC duabus AC CB æquales, altera alteri; et angulus DBC æqualis angulo ACB. basis igitur DC basi AB est æqualis; et triangulum DBC æquale triangulo ACB, minus maiori; quod est absurdum. non igitur inæqualis est AB ipsi AC. ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter se sint æquales, et æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt: quod demonstrasse oportuit.

(Margin: p huius. — 4 huius.)

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema præcedẽti conuertitur. Conuersio apud Geometras quæ proprie dicatur.

Conuersio alia.

Quarto octauum conuertitur.

Theoremarũ, q̃ conuertũtur, alia pcedentia sũt alia cõuersa.

Pręsens theorema duo hec in primis ostendit, theorematum scilicet conuersionem, & deductionem ad id, quod fieri non potest. conuertitur enim pręcedenti theoremati, & per deductionem ad id, quod fieri non potest, demonstratur. conuersio autem apud Geometras proprie dicitur, quando conclusiones, & positiones vicissim in theorematibus transmutantur, & quod prioris est conclusio, in posteriori positio fit: & contra positio tanquam conclusio infertur. vt in illo, Aequicrurium triangulorum, qui ad basim anguli ęquales sunt. positio quidem est aequicrure triãgulum: conclusio autem triangulorum, qui ad basim sunt, aequalitas. Et quorum anguli qui ad basim aequales, ea aequicruria sunt, vt in hoc theoremate, in quo positio quidem est, angulorum, qui ab basim, aequalitas; conclusio autem aequalitas laterum, quae aequalibus angulis subtenduntur. est etiam alia conuersio iuxta quandam duntaxat compositorum transmutationẽ. Si enim sit theorema compositum à pluribus positionibus incipiens, & in conclusionem desinens, sumentes conclusionem, & vnam ex positionibus, vel etiam plures, conclusionem faciunt aliquã reliquarum positionum. & hoc modo quarto theoremati octauum conuertitur. In illo enim ponuntur quidem duo latera aequalia; & angulus angulo aequalis, qui aequalibus lateribus continetur: cõcluditur aũt basim basi aequalẽ esse. At in octauo ponuntur duo latera aequalia; basisq́ basi aequalis: & concluditur angulum, qui aequalibus lateribus continetur, aequalem esse. Cum igitur duae sint conuersiones, ea quae proprie sic dicitur, vniformis est, & determinata; altera vero varia, & non in vno, sed in multis conuertens ob multitudinem positionum, quae in compositis theorematibus sunt. Theorematum vero, quae conuertuntur, alia pręcedentia vocare consueuerunt; alia conuersa. Cum enim genus quoddam ponentes, aliquod de ipso symptoma demõstrãt, hoc pręcedens appellatur: & cum è contrario positionem quidem faciunt symptoma; conclusionẽ vero genus, cui illud accidit, conuersum vocatur. vt omne triangulum aequicrure, angulos qui

ad basim sunt, aequales habet. hoc precedens est. Omne triangulum duos angulos aequales habēs, latera quoque aequales angulos subtendentia habet aequalia, & est aequicrure. hoc cōuersum est. & hęc de cōuersionibus geometricis dicta sufficiant. deductiones vero id, quod fieri non pōt, in euidens absurdum desinunt, & cuius opposita omnes fatentur. accidit autem ipsarū alias desinere in ea, quae cōmunibus notionibus, vel postulatis, vel positionibus opponūtur; alias in ea, quae prius demonstratis contradicunt. Nam sextum hoc theorema, quod accidit fieri non posse ostendit, cum destruat communem notionem illam: Omne totum est maius sua parte octauum vero desinit quidem in id, quod fieri non potest; non tamen destruit communem notionem, sed id quod per septimum theorema osteusum est. quod enim septimum fieri posse negauit, hoc illud affirmans consequi ostendit ijs, qui quęsitum non concedunt. omnis autem deductio ad id, quod fieri non potest, sumens quod cum quęsito pugnat, & hoc ponens progreditur, donec euidenti absurdo occurat, perq; illud positionem destruens, cōfirmat id quod à principio quęrebatur. omnino enim scire oportet mathematicas probationes omnes vel à principijs esse, vel ad principia: vt etiā inquit Porphyrius. & quae à principijs sunt, itidem duplices esse. aut enim ex cōmunibus notionibus, & sola euidentia per se fidem faciente emanant; aut ex ijs, quae ante ostensa fuere. Quae vero ad principia aut principia ponunt, aut destruunt. quae principia ponunt resolutiones vocantur; atque his opponuntur compositiones. fieri enim potest, vt à principijs illis ad quęsitum ordinate procedamus, & hoc nihil aliud est, nisi compositio. quae vero principia destruunt, deductiones ad id, quod fieri non potest nuncupantur. aliquid enim eorum, quae concessa, manifestaq; sunt destruere huius ipsius viae munus est; atque est hac syllogismus quidam, sed non idem, qui in resolutione. Nam in deductionibus ad id, quod fieri non potest iuxta secundum hypotheticarum ratiocinationum modum complexio est. vt si triangulorum aequales angulos habentium latera aequales illos angulos subtendentia aequalia non sint; totum parti est aequale. atqui hoc fieri non potest. triangulorum igitur duos angulos aequales habentium latera quoque aequales angulos subtendentia aequalia erunt. Vtitur autem Euclides conuersione quidem in propositione ipsa; vtpote qui conclusionem quinti theoretis, vt datum accipiens, positionem illius adiunxit, vt quęsitum; deductione autem ad id, quod fieri non potest in constructione, & demonstratione vtitur. hec ex Proclo.

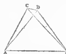
Deductiones ad id, qđ fieri non potest in euidens absurdū desinunt.

Mathematicæ probationes uel a principijs sūt uel ad principia. Resolutiões. Compositiones.

Deductiones ad id, qđ fieri non potest.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO VII.

In eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non constituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.



Si enim fieri potest, in eadem recta linea A B duabus eisdem rectis lineis A C C B aliæ duæ rectæ lineæ A D D B æquales, altera alteri constituantur ad aliud, atque aliud punctum C D; ad easdem partes vt ad C D, eosdem habentes terminos A B, quos primæ rectæ lineæ; ita vt C A quidem sit ęqualis D A, eundem, quem ipsa terminum, habens A; C B vero sit æqualis D B, eundem habens B terminum; & C D iungatur. Itaque quoniam A C est æqualis A D; erit et angulus A C D angulo A D C æqualis. maior igitur est A D C angulus angulo D C B. quare angulus C D B angulo D C B multo maior erit. Rursus quoniam C B est æqualis D B; et angulus C D B æqualis erit angulo D C B: ostensus autem est ipso multo maior; quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri constituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primę rectæ lineæ, terminos habentes; quod ostendisse oportebat.

5. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema rarum quiddam habet; quod haud frequenter propositionibus, quae scientiam

Propositiones theorematum geometricorū, arithmeticorūq; ut plurimū affirmationes sunt.

pariunt euenire consueuit. per negationem enim, & non per affirmationem formari haud quaquam ipsarum proprium est, cum propositiones geometricorum, arithmeticorumq; theorematum magna ex parte affirmationes sint. Caussa autem est (vt inquit Aristoteles) quod vniuersale affirmans scientijs maxime conuenit, tanquam magis idoneum, & non indigens negatione. at vniuersale negans etiam affirmatione indiget. ex negantibus enim tantum neque demonstratio, neque ratiocinatio aliqua constat: ac propterea demonstrantes scientiae plurima affirmantia ostendunt: raro autem negantibus conclusionibus utuntur. hęc Proclus.

Theorematis uarij casus.

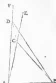
Theorema uero multos habet casus. Nam punctum D vel cadit extra lineas A C C B, vel intra, vel in ipsis. & siquidem extra, hoc duobus modis fit; aut enim altera linearum A C C B secat alteram ipsarum A D D B, aut neutra neutram secat. cadat primum extra, secetq; A D ipsam C B, ut apparet in prima figura, & iūgatur C D. cui quidem constructioni Euclidis demonstratio congruit. Sed cum ea breuis, & quodammodo obscura quibusdam visa sit, planius, & apertius sic explicabitur. Itaque quoniam A C est aequalis ipsi A D, erit angulus A C D angulo A D C aequalis. angulus autem A C D maior est angulo D C B, quippe quòd totum maius sit sua parte. angulus igitur A D C angulo D C B est maior. Sed C D B angulus eadem ratione maior est angulo A D C. Quare angulus C D B angulo D C B multo maior sit necesse est. Rursus quoniam B C est aequalis B D; erit & angulus C D B aequalis angulo D C B. atqui ostensus est multo maior; quod fieri non potest. similiter demonstrabitur idem sequi absurdum si recta linea B D secet ipsam A C. cadat deinde punctum D extra lineas A C C B, ita vt neuttra neutram secet; & producantur rectae lineae A C A D in puncta E F. Quoniam igitur A C est aequalis A D, angulus A C D ad basim angulo A D C aequalis erit; & productis A C A D, erit angulus F D C sub basi aequalis angulo D C E. Rursus cum B C sit aequalis ipsi B D, angulus B C D angulo B D C est aequalis. sed F D C angulus maior est angulo C D B. quare & D C E ipso D C B est maior, pars scilicet toto, quod fieri non potest. Non aliter demonstrabimus sequi absurdum, si punctum D intra dictas lineas cadere ponatur. denique in ipsis cadere non posse manifesto constat. totum enim parti esset aequale. Videtur autem hoc, ut inquit Proclus, lemma esse octaui Theorematis: siquidem ad illius demonstrationem confert, & neque simpliciter elementum est, neque elementare: non enim ad plura suam extendit vtilitatem. rarissimum igitur ipsius vsum apud geometram inueniemus.

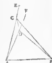
5. huius.

9 com. not.

5. huius.

Theorema hoc sequentis lemma esse uidetur.







THEOREMA V. PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterū alteri; habeant autem, et basim basi ęqualē: angulū quoque, qui ęqualibus lateribus continetur angulo ęqualē habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant alterum alteri; vt sit A B quidē æquale D E; A C uero ipsi D F: habeant autem et basim B C basi E F æqualem. Dico







lem. Dico angulum quoque B A C angulo E D F ęqualem esse. Triangulo enim A B C congruente ipsi D E F triangulo; et puncto quidem B posito in E; recta vero linea B C in E F: congruet, et C punctum puncto F, quoniam B C ipsi E F est ęqualis. Itaque congruente B C ipsi E F; congruent et B A A C ipsis E D D F. si enim basis quidem B C basi E F congruit; latera autem B A A C lateribus E D D F non congruunt, sed permutantur; vt E G G F. constituentur in eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineę ęquales, altera alteri; ad aliud atque aliud punctum; ad easdem partes; eosdem habentes terminos. non constituuntur autem; vt demonstratum est. non igitur, si basis B C congruit basi E F, non congruent et B A A C latera lateribus E D D F. congruent igitur. Quare et angulus B A C angulo E D F congruet, et ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem et basim basi æqualem: angulum quoque ęqualibus lateribus contentum angulo ęqualem habebunt: quod demonstrare oportebat. In antecedente

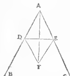
F. C. COMMENTARIVS.

Octauum Theorema quarti conuersum est, vt supra diximus, non tamen iuxta propriam conuersionem, non enim totam illius positionem, conclusionem, totamq; conclusionem positionem facit. Sed aliquam quidem ex positionibus, aliquam vero ex conclusionibus quarti theorematis contexens, vnum quid eorum, quae in illo data fuerunt, ostendit. Octauum Theorema quarti conuersum est.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum bifariam secare. A

Sit datus angulus rectilineus B A C. Itaque oportet ipsum bifariā secare. Sumatur in linea A B quodvis punctum D; & à linea A C ipsi A D æqualis auferatur A E; iunctaq; D E constituatur in ea triangulum æquilaterum D E F; & A F iungatur. Dico angulum B A C à recta linea A F bifariam secari. Quoniam enim A D est æqualis A E; communis autem A F: duæ D A A F duabus E A A F æquales sunt, altera alteri; & basis D F æqualis basi E F. angulus igitur D A F angulo E A F est æqualis. Quare datus angulus rectilineus B A C à recta linea A F bifariam sectus est: quod facere oportebat. 3 huius. L 1. huius. Ex antecedente.



F. C. COMMENTARIVS.

Datum angulum rectilineum bifariam secare] *Angulus hoc loco specie datur, quippe qui rectilineus sit, & non quilibet. namque angulum omnē bifariam secare ex elementari institutione non licet; quandoquidem ambiguum etiam est, num omnis angulus bifariam secari possit. Sectionis autem ratio non ab re distincta fuit: in quamlibet enim proportionem secare pręsentem constructionem trāsgreditur. verbi gratia in tres, vel quattuor, vel quinque partes aequales. nam rectum quidem angulum trifariam secare possumus, paucis eorum, quae posterius tradentur, vtentes: acutū vero minime, nisi ad alias lineas, quae mixtae sunt, transcendamus. Datum enim angulum rectilineum trifariam secare docuit Nicomedes ex conchoidibus. alij vero ex alijs lineis mixtis idem fecerunt, nimirū ijs, quae à gręcis τετραγωνίζουσαι dicūtur, nos quadrātes appellare possumus. alij ex lineis conicis, vt Pappus tradit in quarto libro collectionum mathematicarum. alij denique ex lineis spiralibus, de quibus Archimedes, incitati in datam proportionem datum angulum rectilineum secuerunt. Quorum contemplationes cum difficiles sint, pręsertim ijs, qui instituuntur, in pręsentia omittemus.* A Omnem angulum bifariam secare ex elementari institutione non licet. Rectum angulum trifariam secare possumus, acutū uero minime, nisi ad lineas, mixtas transcendamus.

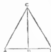
Iunctaq; D E constituetur in ea triangulum æquilaterum D E F. B

Idem

Loco æquilateri trianguli æquicrure constitui potest. *Idem etiam sequetur si loco æquilateri tum in hoc, tum in sequentibus æquicrure triangulum constituamus, & demonstratio eadem erit.*

PROBLEMA V. PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

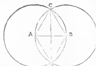


1 huius. Ex antecedente. Sit data recta linea terminata A B. oportet ipsam A B bifariam secare. constituatur in ea triangulum æquilaterum A B C; & secetur A C B angulus bifariam recta linea C D. Dico A B rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim A C est æqualis C B; communis autem C D; duæ A C C D duabus B C C D æquales sunt, altera alteri: et angulus A C D æqualis angulo B C D. basis igitur A D basi B D est æqualis. et ob id recta linea terminata A B bifariam secta est in puncto D: quod facere oportebat. 4 huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc etiam Theorema est, quod rectam lineam terminatam ponit. Si quidem ex vtraque parte infinitam terminare non possumus. Infinitae vero ex altera parte tantum, vbicunque punctum accipiatur, in partes inæquales fit sectio. etenim quae in eisdem partibus est, in quibus recta linea infinita existit, reliqua finita existente necessario est maior. relinquitur igitur, vt ex vtraque parte finita accipiatur, quae bifariam secari debet. Apollonius vero Pergæus rectam lineam terminatam bifariam secat in hunc modum. Sit, inquit, recta linea terminata A B, quam bifariam secare debemus: & centro quidem A, intervallo autem A B circulus describatur: & rursus centro B, & intervallo B A describatur alius circulus; & ducatur C D communes circulorum sectiones coniungens, quae rectam lineam A B bifariam secabit. Iungantur enim A C C B, quae inter se aequales sunt, cum vtraque ipsi A B sit aequalis. communis autem C D; & D A est aequalis D B ob eandem caussam. angulus igitur A C D est aequalis angulo B C D. quare A B per quartum bifariam secta est.

Rectã lineã terminatam quo Apollonius bifariã secat.



PROBLEMA VI. PROPOSITIO XI.

✻ Datæ rectæ lineæ à puncto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.



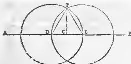
3 huius. 1. Sit data recta linea A B, et datum in ipsa punctum C. oportet à puncto C ipsi A B ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in A C quodvis punctum D. ipsiq; C D æqualis ponatur C E, et in D E constituatur triangulum æquilaterum F D E, et F C iungatur. Dico datæ rectæ lineæ A B à puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse F C. Quoniam enim D C est æqualis C E, et F C communis; erunt duæ D C C F duabus E C C F æquales, altera alteri: et basis D F est æqualis basi F E. angulus igitur D C F angulo E C F est æqualis: et sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insistens, eos qui deinceps sunt, angulos æquales inter se fecerit: rectus est vterque æqualium angulorum. ergo vterque ipsorum D C F, F C E est 8 huius. Diffi. 10.

est rectus. datæ igitur rectæ lineę A B à puncto in ipsa dato C ad rectos angulos ducta est F C recta linea. quod fecisse oportuit.

F. C. COMMENTARIVS.

Datæ rectæ lineę à puncto in ipsa dato.] *linea specie datur; punctum vero positione: quod vel in medio erit rectae linae, vel in altera eius extremitate. Euclides in medio rectae linae sumpsit. Quòd si in extremitate altera sumatur, vel ipsam producentes, reliqua eodem modo construemus; vel aliter propositum assequemur.* Problematis casus.

Appollonius autem rectam lineam ad rectos angulos ducit hoc pacto. Sit data quidem recta linea A B, datum vero in ea punctum C, & in linea A C sumpto quouis puncto D, ab ipsa C B auferatur C E aequalis ipsi C D: & centro quidem D, interuallo autem D E circulus describatur. Rursusq; centro E, & interuallo E D alius circulus describatur: & à puncto F, in quo circuli se inuicem secant, ducatur F C. Dico eam ad rectos angulos esse. si enim iungãtur F D, F E aequales inter se erunt. sed & D C C E aequales; & cõmunis F C. Quare ex octauo anguli qui ad C etiam inter se aequales sint necesse est. Quõ Apollonius rectã lineam ad rectos angulos ducit. 3. huius. Postul. 3



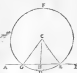
Si vero punctum in extremitate rectae lineae sumatur, ita faciendum censet Proclus. Sit recta linea A B, datumq; punctum A, & sumatur in A B quod vis punctum C, à quo ipsi A B, quemadmodum nos docuit, ad rectos angulos ducatur C E: & ab ea ipsi A C aequalis abscindatur C D. angulus vero qui est ad C per rectam lineam C F bifariam secetur: atque à puncto D ipsi E C ad rectos angulos ducta occurat rectae lineae C F in F puncto; & F A iungatur. Dico angulum, qui ad A rectum esse. Quoniam enim D C est aequalis C A, communis autem C F, & angulos aequales continent, quòd angulus ad C bifariam sectus est: erit & D F ipsi F A aequalis, & omnia similiter per quartum theorema omnibus aequalia. quare & angulus ad A aequalis est angulo ad D. angulus igitur ad A rectus erit; quod facere oportebat. Quãdo pũctum in extremitate lineæ sumitur quõ faciẽdum sit. 3 huius. 9 huius. 4 huius.



PROBLEMA VII. PROPOSITIO XII.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato pũcto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita A B, datum vero punctum C, quod in ea non est. oportet super datam rectam lineam infinitam A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius A B rectæ lineę quod vis punctum D: et centro quidem C, interuallo autem C D circulus describatur E F G: et E G in H bifariam secetur: iunganturq; C G C H C E. Dico super datam rectam lineam infinitam A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem C H ductam esse. Quoniam enim æqualis est G H ipsi H E, communis autem H C, duę G H H C, duabus E H H C æquales sunt, altera alteri; & basis C G est ęqualis basi C E. Postul 3. 10. huius.



8 huius. angulus igitur C H G angulo E H C est ęqualis; & sunt deinceps. cum autem recta linea super rectam lineam insistens eos, qui deinceps sunt angulos, ęquales inter se fecerit; rectus est vterque ęqualium angulorum; et quę insistit recta linea (Diffi.10.) perpendicularis appellatur ad eam, cui insistit. ergo super datam rectam lineam infinitam A B à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularis ducta est C H, quod facere oportebat.

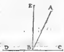
F. C. COMMENTARIVS.

Oenopides hoc problema inuenit. Perpendiculare antiqui gnomonem appellarunt. Perpendicularis plana, & solida.

Hoc problema, vt refert Proclus, Oenopides primus indagauit, vtile ipsum ad astrologiam existimans. perpendicularem vero antiquorum more, gnomonem appellat, quoniam & gnomon horizonti ad angulos rectos est. quae autem ad angulos rectos, eadem est perpendicularis, habitudine tantum ab ea differens, cum subiecto eadem sit, quemadmodum et gnomon. Rursus perpendicularis duplex est, alia plana, alia solida. quando enim punctum, à quo perpendicularis recta linea ducitur in subiecto plano sit, plana appellatur: quando autem punctum sit sublime, atque extra subiectum planum, solida. & plana quidem ad rectam lineam ducitur, solida vero ad planum. Quare necessarium est illam non ad vnam rectam lineam angulos rectos facere, sed ad omnes, quae in subiecto existentes plano ipsam contingunt. In hoc igitur problemate Euclides perpendicularem planam ducere proponit, quippe cum ad rectam lineam ducatur: & quatenus in vno plano omnia consistant, sermo procedat. At in linea quae est ad angulos rectos quoniam punctum in ipsa sumptum est, nulla erit infinitatis necessitas: datam vero rectam lineam infinitam ponit, cum punctum, à quo perpendicularis duci debet, extra ipsam statuatur. si enim non esset infinita, poterat ita punctum sumi, vt extra quidem rectam lineam esset, indirectum autem ipsi, adeo vt protracta recta linea in ipsum incideret, & non fieret problema. Adde, quod nisi esset infinita, possemus etiam punctum ita sumere, vt si duceretur perpendicularis, non in ipsam, sed extra ipsam necessario caderet. His igitur de caussis recta linea, ad quam perpendicularis ducenda est, infinita ponitur.

THEOREMA VI. PROPOSITIO XIII.

* Cum recta linea super rectam cōsistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis ęquales efficiet.



Recta enim linea quædam A B super rectam C D consistens angulos faciat C B A A B D. Dico C B A A B D angulos; vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales. si enim C B A est æqualis ipsi A B D, duo recti sunt; (diffi.10.) sin minus, ducatur à puncto B ipsi C D ad rectos angulos B E. anguli igitur C B E E B D sunt duo recti. Et quoniam C B E, duobus C B A A B E est æqualis, communis apponatur E B D. ergo anguli C B E E B D tribus angulis C B A A B E E B D sunt ęquales. Rursus quoniam D B A angulus est ęqualis duobus D B E E B A, communis apponatur A B C, anguli igitur D B A A B C tribus D B E E B A A B C ęquales sunt. (Axioma.1.) At ostensum est angulos quoque C B E E B D eisdem tribus ęquales esse quę vero eidem sunt ęqualia, et inter se æqualia sunt. ergo et anguli C B E E B D ipsis D B A A B C sunt ęquales. suntq; C B E E B D duo recti. anguli igitur D B A A B C duobus rectis ęquales erunt. ergo cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis ęquales efficiet. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

* Cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit.] *Animaduertendum est, vt inquit Proclus, Euclidem in hac propositione maximam diligentiam adhibuisse. non*

enim simpliciter dixit. Omnis recta linea super rectã lineã consistẽs, vel duos rectos facit, vel duobus rectis aequales, sed ∫ angulos fecerit. quid enim si in rectae lineae extremitate cõsistens vnum efficit angulum? accidit ne quandoque hunc duobus rectis aequalem esse? hoc certe fieri non potest. Omnis si quidem rectilineus angulus duobus rectis est minor, quemadmodum omnis solidus minor est quattuor rectis. Quòd si angulum, qui maxime obtusus esse videatur, accipias, hunc quoque augebis, tanquam eum qui duorum rectorum mensuram adhuc non recipit. Oportet igitur rectam lineam sic consistere, vt angulos efficiat. Omnis angulus rectilineus duobus rectis est minor.

THEOREMA VII. PROPO. XIIII.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duę rectę lineæ non ad easdem partes positę, angulos qui deinceps sunt, duobus rectis ęquales fecerint; ipsę rectæ lineæ indirectum sibi inuicem erunt.



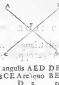
Ad aliquam enim rectam lineam A B, atque ad punctum in ea B, duę rectę lineę B C B D non ad easdem partes positę angulos, qui deinceps sunt, A B C A B D duobus rectis ęquales faciant. Dico B D ipsi C B indirectũ esse. si enim B D non est in directũ ipsi C B, sit ipsi C B in directum B E. Quoniã igitur recta linea A B super rectam C B E consistit; anguli A B C A B E duobus rectis sunt ęquales. Sed et anguli A B C A B D sunt ęquales duobus rectis. anguli igitur C B A A B E ipsis C B A A B D ęquales erunt. cõis auferatur A B C. ergo reliquus A B E reliquo A B D est ęqualis, minor maiori, quod fieri non põt. non igitur B E est indirectũ ipsi B C. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, pręter B D. ergo C B ipsi B D indirectum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duę rectę lineę non ad easdem partes positę angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis ęquales fecerint, ipsę rectę lineę indirectum sibi inuicem erunt. quod demonstrare oportebat. Ex antecedente.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc Theorema pręcedentis conuersum est, & per deductionem ad id, quod fieri non potest, ostẽditur. sic enim conuersa theorematum ostendi debent, vt inquit Proclus. Conuersa theoremata per deductionẽ ad id, quod fieri nõ põt, ostendũtur.

THEOREMA. VIII. PROPOSITIO. XV.

Si duę rectę lineæ se inuicem secuerint, angulos qui ad uerticẽ sunt, inter se ęquales efficient.



Duæ enim rectæ lineæ A B C D se inuicem secent in puncto E. Dico angulum quidem A E C angulo D E B; angulum vero C E B angulo A E D æqualem esse. Quoniam enim recta linea A E super rectã C D consistens angulos facit C E A A E D; erunt hi duobus rectis æquales. 13. huius. Rursus quoniam recta linea D C super rectam A B cõsistens facit angulos A E D D E B; erunt A E D D E B anguli æquales duobus rectis. Ostensum autẽ est angulos quoque C E A A E D duobus rectis esse æquales. anguli igitur C E A A E D angulis A E D D E B æquales sunt. 3. com. not. communis auferatur A E D. ergo reliquus C E A reliquo B E D est

 ęqualis.

æqualis. Similiratione, & anguli C E B D E A æquales oſtendentur. Si igitur duę rectæ lineæ ſe inuicem ſecuerint, angulos, qui ad verticem ſunt, æquales efficient, quod oſtendere oportebat.

COROLLARIVM.

* Ex hoc manifeſte conſtat rectas lineas quot quot ſe inuicem ſecant, facere angulos ad ſectionem quattuor rectis ęquales.

F. C. COMMENTARIVS.

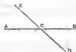
Anguli deinceps. Anguli ad uerticem. Angulorum uertices. Theorema a Thalete inuentũ.

Anguli qui deinceps ſunt ab angulis, qui ad verticem, differunt; horum enim ortus ex duarum rectarum ſectione fit, illorũ uero ex altera tãtũ ab altera ſecta. Nã ſi recta linea ipſa inſecta manẽs, alteramq́; ſuo extremo ſecãs, duos angulos fecerit; hos deincẽps angulos vocamus. Si uero duae rectae lineae, ſe inuicẽ ſecuerant, anguli ad uerticẽ efficiuntur, ſic dicti, quòd vertices in eodẽ puncto coniunctos habeant. Vertices autem ipſorum ſunt puncta, ad quae plana dum contrahuntur, angulos efficiunt. Itaque hoc theorema oſtendit duabus rectis lineis ſe inuicem ſecantibus, angulos ad verticem aequales eſſe: inuentum quidem à Thalete primo, vt inquit Eudemus, ab Euclide vero demonſtratum; in quo deeſt conſtructio, vtpote minus neceſſaria: demonſtratio enim expoſitione contenta conſtructione aliqua non indiget.

* Corollaria quæ nã ſint in elementari inſtitutione. Corollaria geometrica, et arithmet. Huius theorematis conuerſũ a Proclo demonſtratur.

Ex hoc manifeſtum eſt.] *Corollarium eſt quod ex pręcedenti demõſtratione apparet. corollaria enim in elementari inſtitutione ſunt, vt inquit Proclus, quae ſimul cum aliorum demonſtrationibus apparent, ipſa vero non pręcipue quęruntur; veluti id quod in pręſentia propoſitum eſt, nam quęrebatur quidem ſi duabus rectis lineis ſe inuicem ſecantibus, anguli ad verticem ęquales eſſent. dum autem hoc oſtenditur, ſimul etiam oſtẽſum eſt, quattuor, qui ſunt, angulos, quattuor rectis aequales eſſe. Corollarium igitur eſt theorema, quod ex alterius problematis, uel theorematis demonſtratione ex improuiſo emergit. nam ueluti caſu quodam in corollaria incidere uidemur, neque enim proponentibus nobis, neque etiam quęrentibus obuium ſe ſe offerunt. Corollariorum uero alia geometrica ſunt, alia arithmetica, & rurſus alia problematibus conſequentia ſunt, alia theorematibus; & alia directis oſtenſionibus, alia deductionibus ad id, quod fieri non poteſt, oſtẽduntur. Huius autem theorematis conuerſum à Proclo ita demonſtratur.*

Si ad aliquam rectam lineam duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ſumptæ angulos ad uerticem æquales fecerint, ipſæ rectæ lineæ indirectũ ſibi inuicem erunt.



Sit enim recta linea quędam A B, & in ipſa quod vis punctum C; & ad C duae rectae lineae C D C E non ad eaſdẽ partes ſumptae, quae angulos A C D B C E aequales faciant. Dico ipſas C D C E in directum ſibi ipſis eſſe. Quoniam enim recta linea C D ſuper rectam lineã A B inſiſtit, duos angulos duobus rectis efficit aequales; videlicet D C A D C B. Sed angulus D C A angulo B C E eſt aequalis. anguli igitur D C B B C E duobus rectis aequales ſunt. Itaque quoniam ad aliquam rectam lineam B C duae rectae lineae conſequenter C D C E non ad eaſdem partes ſumptae, angulos deinceps duobus rectis aequales efficiunt: indirectum ſibi inuicem erunt.

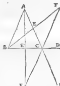
13. huius. 14. huius.

THEOREMA IX. PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore, & oppoſito eſt maior.

Sit

Sit triangulum A B C, et vnum ipsius latus B C ad D producatur. Dico exteriorem angulum A C D vtroque interiore, et opposito, videlicet C B A et B A C maiorem esse. Secetur enim A C bifariam in E, et iuncta B E producatur ad F; ponaturq; ipsi B E equalis E F. iungatur preterea F C, et ducta A C ad G producatur. Quoniam igitur A E quidem est equalis E C, B E vero ipsi E F, duę A E E B duabus C E, E F equales sunt, altera alteri: et angulus A E B angulo F E C est equalis, ad verticem enim sunt. basis igitur A B equalis est basi F C, et A B E triangulum triangulo F E C, et reliqui anguli reliquis angulis equales, alter alteri, quibus equalia latera subtenduntur. ergo angulus B A E est equalis angulo E C F. Sed E C D angulus maior est ipso E C F. maior igitur est angulus A C D angulo B A E. Similiter recta linea B C bifariam secta, ostendetur etiã B C G angulus, hoc est A C D angulo A B C maior. Omnis igitur trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore et opposito maior est. quod oportebat demonstrare.



4.h uius.

THEOREMA X. PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocumque sumpti.

Sit triangulum A B C. Dico ipsius A B C triã guli duos angulos quomodocumque sumptos duobus rectis minores esse. producatur enim B C ad D. et quoniam trianguli A B C exterior angulus A C D maior est interiore, et opposito A B C: cõmunis apponatur A C B. anguli igitur A C D A C B angulis A B C B C A maiores sunt. Sed A C D A C B sunt equales duobus rectis. ergo A B C B C A duobus rectis sunt minores. Similiter demõ strabimus angulos quoque B A C A C B, itemq; C A B A B C duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt; quomodocumque sumpti. quod demonstrare oportebat.



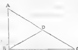
13 huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Nunc quidem, vt inquit Proclus, indeterminate ostenditur, trianguli duos quoslibet angulos duobus rectis minores esse, in sequentibus vero determinabitur etiam quanto sint minores, nempe reliquo trianguli angulo: tres enim ipsius anguli duobus rectis aequales sunt. quare duo tanto minores sunt duobus rectis, quantus est reliquus trianguli angulus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XVIII.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.



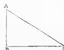
Sit triangulum A B C habens latus A C latere A B maius. Dico et A B C angulum angulo B C A maiorem esse. Quoniam enim A C maior est, quàm A B, ponatur ipsi A B aequalis A D; et B D iungatur. Et quoniam trianguli B D C exterior angulus est A D B, erit is maior interiore, et opposito 16. huius.

5.huius. posito D C B. Sed A D B æqualis est ipsi A B D, quòd et latus A B lateri A D sit æquale. maior igitur est et A B D angulus angulo A C B. quare A B C ipso A C B multo maior erit. Omnis igitur trianguli maius latus maiorem angulum subtendit: quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XIX.

Omnis trianguli maiorem angulum maius latus subtendit.

Sit triangulum A B C maiorem habens A B C angulum angulo B C A. Dico et latus A C latere A B maius esse. Si enim non est maius, vel A C est æquale ipsi A B, vel ipso minus. æquale igitur non est, nam et angulus A B C angulo A C B æqualis esset. non est autem. non igitur A C ipsi A B est æquale. Sed neque minus. esset enim et angulus A B C angulo A C B minor. atqui non est. non igitur A C minus est ipso A B. ostensum autem est neque æquale esse. ergo A C ipso A B est maius. Omnis igitur trianguli maiorem angulum maius latus subtendit. quod oportebat demonstrare.



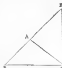
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc præcedentis theorematis conuersum est, quare & per deductionem ad id, quod fieri non potest, demonstratur.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocumque sumpta.

Sit enim triangulum A B C. Dico ipsius A B C triãguli duo latera reliquo maiora esse, quomodocũque sumpta: videlicet latera quidem B A A C maiora latere B C; latera vero A B B C maiora latere A C: et latera B C C A maiora ipso A B. producatur enim B A ad punctum D; ponaturq; ipsi C A æqualis A D, et D C iungatur. Quoniam igitur D A est
5.huius. æqualis A C, erit et angulus A D C angulo A C D æqualis. Sed B C D angulus maior est angulo A C D. angulus igitur B C D angulo A D C est maior. Et quoniam triangulum est D C B, habens B C D angu-
Ex antecedente. lum maiorem angulo B D C: maiorem autem angulum maius latus subtendit: erit latus D B latere B C maius. Sed D B est æquale ipsis B A A C. quare latera B A A C ipso B C maiora sũt. Similiter ostendemus et latera quidem A B B C maiora esse latere C A: latera vero B C C A ipso A B maiora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocumque sumpta. quod ostendere oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema Epicurei impugnarũt tamquam. Asino manifestum.

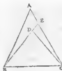
Præsens theorema, vt scribit Proclus, Epicurei impugnare consueuerunt, tum Asino ipsum manifestum esse dicentes, tum nulla egere probatione. Asino autem manifestum esse, ostendunt ex eo, quòd herba in altero laterũ extremo posita, Asinus pabulũ expetens, vnũ latus peragrat, & non duo. Aduersus hæc dicendum. Theorema sensu quidem manifestum esse, non autem & scientiam gignente ratione. multis enim rebus hoc accidit. exempli gratia ignis calefacit. hoc quoque sensu indubitatum

dubitatum est, sed quo nam pacto calefaciat, conuincere scientiae officium est. Sic igitur duo trianguli latera reliquo esse maiora, sensu manifestum, quo aut hoc fiat dicere ad scientiam pertinet. Alij aliter hoc theorema demonstrarunt, recta linea minime producta; vt videre licet apud Proclu.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XXI.

Si à terminis vnius lateris trianguli duę rectæ lineæ intra constituantur, hę reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim A B C in vno latere B C à terminis B C duæ rectæ lineæ intra constituantur B D D C. Dico B D D C reliquis duobus trianguli lateribus B A A C minores quidem esse, maiorem vero continere angulum B D C angulo B A C. producatur enim B D ad E. Et quoniam omnis triãguli duo latera reliquo sunt maiora, erunt trianguli A B E duo latera B A A E maiora latere B E. communis apponatur E C. ergo B A A C ipsis B E E C maiora sunt. Rursus quoniam C E D triãguli duo latera C E E D sunt maiora latere C D, communis apponatur D B. quare C E E B ipsis C D D B sunt maiora. Sed ostensum est B A A C maiora esse B E E C. multo igitur B A A C ipsis B D D C maiora sunt. Rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore, et opposito est maior: erit trianguli C D E exterior angulus B D C maior ipso C E D. Eadem ratione et trianguli A B E exterior angulus C E B ipso B A C est maior. Sed angulus B D C ostensus est maior angulo C E B. multo igitur B D C angulus angulo B A C maior erit. Quare si à terminis vnius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hę reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt. quod demonstrare oportebat.



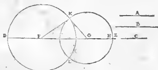
Ex antecedẽte.

16. huius.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXII.

Ex tribus rectis lineis, quę tribus rectis lineis datis ęquales sint, triangulum constituere. oportet autem duas reliqua maiores esse, quomodocumque sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocumque sumpta. *

Sint tres datæ rectę lineæ A B C, quarum duæ re qua maiores sint, quomodocũque sumptæ, vt scilicet A B quidem sint maiores quàm C, A C vero maiores quàm B, et præterea B C maiores quàm A. Itaq; oportet ex rectis lineis ęqualibus ipsis A B C triãgulũ cõstituere. ex



ponatur aliqua recta lineã D E, terminata quidem ad D, infinita vero ad E; et ponatur ipsi quidem A æqualis D F, ipsi vero B æqualis F G, et ipsi C æqualis G H: et

3.postul. centro F, interuallo autem F D circulus describatur D K L. Rursusq; centro G, et interuallo G H alius circulus K L H describatur, et iungantur KF K G. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A B C triangulum KF G constitutum esse. Quoniam enim punctum F centrum est D K L circuli; erit F D æqualis F K. Sed F D est æqualis A. ergo et F K ipsi A est æqualis. Rursus quoniam punctum G centrum est circuli L K H, erit G H æqualis G K. Sed G K est æqualis C. ergo et G H ipsi C æqualis erit. est autem et F G æqualis B. tres igitur rectæ lineæ KF F G G K tribus A B C æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis KF F G G K, quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis A B C, triangulum constitutum est K F G. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Problematū alia indeterminata, alia terminata.

Determinatio duplex.

Præsens problema determinatum est. problematum enim quemadmodum & theorematum alia quidem indeterminata sunt, alia vero determinata. Si enim hoc modo simpliciter dixerimus, ex tribus rectis lineis, quae tribus datis rectis lineis aequales sint, triangulum constituere. problema indeterminatum erit, & fieri non poterit. Si autem addiderimus, quarum duae reliqua sint maiores, quomodocumque sumptae, determinatum erit, & fieri poterit. determinatio enim duplex est, altera quidem pars problematis, vel theorematis, quae post expositionem ponitur, significans quid sit illud, quod quæritur; altera uero, quae propositionem vniuersalem esse prohibet, explicans quando, & qua ratione, & quot modis id quod propositum est fieri possit, vt hoc loco, [oportet autem duas reliqua maiores esse, quomodocumque sumptas. quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocumque sumpta] *& in sexto libro*] Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrāmum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datæ. oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, et eo, quod à dimidia, et eo, cui oportet simile deficere.] *Quemadmodum autem theorematum iuxta verum, & falsum diuisio fit, ita & problematum iuxta id, quod fieri, & quod non fieri potest. Proclus in commentariys citat Euclidis verba, quae à verbis huiusce demonstrationis discrepant, vt luce clarius sit Euclidis demonstrationes aliquibus in locis à Theone immutatas esse, & eas, quas nunc habemus Theonis esse, non Euclidis.*

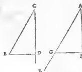
Theorematum diuisio iuxta uerum & falsum.

Probl[illegible] diuisio iuxta id, quod fieri & qd non fieri potest.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO XXIII.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit data quidem recta linea A B, datum vero in ipsa punctum A; et datus angulus rectilineus D C E. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, et ad datum in ea punctum A dato angulo rectilineo D C E, æqualem angulum rectilineum constituere. Sumātur in vtraque ipsarum C D C E quæuis puncta D E, iungaturq; D E, et ex tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus C D D E E C triangulum constituatur A F G, ita ut C D sit æqualis A F, et C E ipsi A G, et D E ipsi F G.

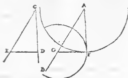


8.huius. Itaque quoniam duæ D C C E duabus F A A G æquales sunt, altera alteri; et basis D E est æqualis basi F G: erit et angulus D C E angulo F A G æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, et ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo D C E æqualis angulus rectilineus constitutus est F A G. quod facere oportebat.

F. C.

F. C. COMMENTARIUS.

Et ex tribus rectis lineis, quę æquales sint tribus CD DE EC triangulum constituatur AFG.] *A recta linea A B abscindatur A G aequalis ipsi C E: & centro quidem A, interuallo autem ipsi C D aequali describatur circulus: & rursus centro G & interuallo aequali ipsi E D alius circulus describatur, vt circuli se inuicem in puncto F secent: & iungantur A F F G. Dico iam factum esse, quod proponebatur. & demonstratio eadem erit. Hoc autem problema ab Oenopide inuentum esse tradit Eudemus.* * 3. Huius. 3. Postul.

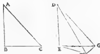


Hoc theorema ab Oenopide inuentum est.

THEOREMA. XV. PROPOSITIO. XXIIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis continetur; et basim basi maiorem habebunt.

Sint duo triangula A B C D E F, quæ duo latera AB AC duobus lateribus D E DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B æquale lateri D E; latus vero A C æquale DF: & angulus B A C angulo E DF sit maior. Dico et basim B C basi E F maiorem esse. Quoniam enim angulus B A C maior est angulo E D F, constituatur ad rectam



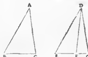
lineam D E, et ad punctū in ea D, angulo B AC ęqualis angulus E D G, ponaturq; alterutri ipsarum A C DF æqualis D G, et G E F G iungantur. Itaque quoniam A B quidem est æqualis D E, A C vero ipsi D G; duæ B A A C duabus E D D G æquales sunt, altera alteri; et angulus B A C est æqualis angulo E D G. ergo basis B C basi E G est æqualis. Rursus quoniam æqualis est D G ipsi D F, et angulus D F G angulo D G F: erit D F G angulus angulo E G F maior. multo igitur maior est E F G angulus ipso E G F. Et quoniam triangulum est E F G, angulum E F G maiorem habens angulo E G F, maiori autem angulo maius latus subtenditur; erit et latus E G latere E F maius. Sed E G latus est æquale lateri B C. ergo et B C ipso E F maius erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribns æqualia habeant, alterum alteri, angulnm autem augulo maiorem, qui æqualibus rectis lineis contimetur: et basim basi maiorem habebunt. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente. * 4. huius. 5. huius. 19. huius.

F. C. COMMENTARIUS.

Hoc theorema quarto oppositum est, illud enim angulos qui sunt ad vertices triangulorū ęquales ponit, hoc inęquales; illud bases aequales, hoc inęquales esse demonstrat.

Et GE FG iungantur] *recta linea EG, vel cadit supra EF, vel in ipsam, vel infra ipsam. Euclides vt supra cadentē accepit. Quòd si in ipsam cadat, vt in secunda figura, idē ostendetur. Sunt enim duę B A AC duabus ED DG aequales: & cū aequales contineant angulos, & basis B C basi E G aequalis erit. Sed E G*



Hoc theorema quarto oppositum. * 4 Huius.

est maior, quàm E F, vt totum est maius, quàm ipsius pars. ergo & BC quàm EF est maior. Cadat postremo infra ipsam. ut in tertia figura. Similiter demonstrabimus basim B C basi EG aequalem esse. Cum aũt duae
21. huius. *F F F D intra triangulum E D G constitutae minores sint, quàm duae E G GD; sitq́; D G ipsi DF aequalis; erit reliqua EG maior, quàm reliqua EF. Sed B C est equalis EG. ergo et BC quàm EF maior sit necesse est.*



THEOREMA XVI. PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi maiorem; & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt.

Sint duo triangula A B C D E F, quæ duo latera A B A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus A B æquale lateri D E, et latus A C lateri D F: basis autem B C basi E F sit maior. Dico et angulum B A C angulo E D F maiorem esse. si enim non est maior, vel æqualis est, vel minor. æqualis autẽ non est angulus B A C angulo E D F: esset enim et basis B C basi E F equalis.



4. huius. non est aũt. nõ igitur æqualis est BAC angulus angulo E D F. sed neque minor. minor enim esset et basis BC basi E F. atqui nõ est. non igitur angulus B A C angulo
Ex antecedenti. E D F est minor. ostensum autẽ est, neque esse equalem. ergo angulus B A C angulo E D F necessario maior erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi maiorem; et angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt. quod demonstrare oportebat.

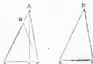
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema octauo oppositũ, est et præcedentis conuersum. *Hoc theorema octauo quidem oppositum est, precedentis vero conuersum, quod alij aliter demonstrarunt, vt tradit Proclus.*

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis equales habeãt, alterum alteri, vnumq́; latus vni lateri equale, vel quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula A B C D E F, quæ duos angulos A B C B C A duobus angulis D E F E F D æquales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem A B C equalem angulo DEF; angulum vero BCA angulo E F D. habeant autem et vnum latus vni lateri æquale, et primum quod equalibus adiacet angulis; nempe latus B C lateri E F. Dico et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterũ alteri, latus scilicet AB lateri DE, et latus AC



ipsi

ipsi D F, et reliquum angulum B A C reliquo angulo E D F æqualem. Si enim inęqualis est A B ipsi D E, vna ipsarum maior est. Sit maior A B, ponaturq; G B ęqualis D E; et G C iungatur. Quoniam igitur B G quidem est ęqualis D E, B C vero ipsi E F, duę G B B C duabus D E E F ęquales sunt, altera alteri: et angulus G B C æqualis angulo D E F. basis igitur G C basi D F est æqualis: et G B C triangulū (4. huius.) triãgulo D E F, et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, alter alteri, quibus ęqualia latera subtēdūtur. ergo G C B angulus est ęqualis angulo D F E. Sed angulus D F E angulo B C A ęqualis ponitur. quare et B C G angulus angulo B C A est æqualis, minor maiori, quod fieri nō pōt. non igitur inæqualis est A B ipsi D E. ergo ęqualis erit. est autem et B C æqualis E F. Itaque duę A B B C duabus D E E F æquales sunt, altera alteri, et angulus A B C æqualis angulo D E F. basis igitur A C basi D F, (4. huius.) et reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F est ęqualis. Sed rursus sint latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur ęqualia, vt A B ipsi D E. Dico rursus et reliqua latera reliquis lateribus ęqualia esse; A C quidem ipsi D F, B C vero ipsi E F: et adhuc reliquum angulum B A C reliquo angulo E D F ęqualem. Si enim inæqualis est B C ipsi E F, vna ipsarum maior est. Sit maior B C, si fieri potest; ponaturq; B H ęqualis E F, et A H iungatur. Quoniam igitur B H quidem est æqualis E F, A B vero ipsi D E; duæ A B B H duabus D E E F æquales sunt, altera alteri, et angulos æquales continent. ergo basis A H basi D F est ęqualis: et A B H triangulum (4. huius.) triangulo D E F, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ęqualis igitur est angulus B H A angulo E F D. Sed E F D est æqualis angulo B C A. ergo et B H A angulus angulo B C A est æqualis. Trianguli igitur A H C exterior angulus B H A ęqualis est interiori; et opposito B C A, quod fieri non potest. quare non inęqualis est B C ipsi E F. ęqualis igitur. est autem et A B æqualis D E. duæ igitur A B B C duabus D E E F æquales sunt, altera alteri: angulosq; æquales continent. quare basis A C æqualis est basi D F, et A B C triangulum æquale triangulo D E F, et reliquus angulus B A C reliquo angulo E D F est æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, vnumq; latus vni lateri æquale, vel quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni ęqualium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema ad Thaletem refertur, vt Proclus ex Eudemo tradit. De triangulorum quidem ortu, & aequalitate, vel inęqualitate quęcunque in elementari institutione dici poterant, ex superioribus didicimus. De quadrilateris deinceps Euclides agit; pręcipue vero de parallelogrammis: simul cum horum contemplatione de trapezijs differens. diuiditur enim quadrilaterum, vt superius dictum est in parallelogrammum, & trapezium. rursusq; parallelogrammum in alias species: & trapezium similiter. Verum quoniam parallelogrammum quidem ob ęqualitatis participationem ordinatum est: trapezium vero neque eundem, neque similem seruat ordinem: non immerito pręcipue quidem de parallelogrammis sermonem habet; simul vero cum his trapezium contemplatur. ex parallelorum enim sectione ortus trapeziorum apparebit, vt procedentibus nobis fiet manifestum. Sed quoniam rursus fieri non potest, vt de parallelogrammorum, vel constructione, vel aequalitate aliquid dicatur absque parallelarum consideratione; vt enim ex ipso quoque nomine apparet parallelogrammum est, quod à parallelis rectis lineis è regione positis describitur: necessario à parallelis doctrinae initium facit. paulum vero progressus ab his ad parallelogrammorum tractationem accedit, vno vsus theoremate medio inter harum, illorumq; institutionem elementarem, quod quidem videtur symptoma quoddam, quod parallelis inest, contemplari: primum autem ortum parallelogrammorum tradit. tale enim est. [Rectæ lineæ, quæ æquales, et parallelas ad easdem partes coniungunt, et ipsæ æquales, et parallelæ sunt.] *nam in hoc consideratur quidem symptoma quoddam aequalibus, ac parallelis; ex coniunctione autem apparet parallelogrammum, quod latera aequalia, et parallela è regione posita habet. Parallelarum*

Hoc theorema ad Thaletem refertur.

Parallelogrāmum ordinatum est, trapeziū vero minime.

Parallelogrāmum est quod a parallelis describitur.

Parallelogrāmorum ortus.

Parallelis tria per se insunt.

igitur sermonem necessaria preassumptum esse, ex his constat. Tria autem assumere oportet, quae parallelis per se insunt, ipsasq; explicant: & cum ipsis conuertuntur. neque solum tria simul, sed & vnum quodque seorsum ab alijs sumptum. quorum vnum hoc est. recta linea parallelas secante, alternos angulos inter se aequales esse: aliud, recta linea parallelas secante angulos interiores duobus rectis esse aequales. reliquum vero, recta linea parallelas secante, angulum exteriorem interiori; & opposito aequalem esse. horum autem symptomatum vnumquodque demonstratum parallelas esse rectas lineas affirmare potest. Hoc modo & alij mathematici de lineis differere consueuerunt, vniuscuiusque speciei symptoma tradentes. Apollonius enim in qualibet conicarum linearum, quid symptoma sit ostendit: & Nicomedes in conchoidibus, & Hippias in quadrantibus, & Perseus in spiricis. nam post earum ortum, quod ipsis per se, & quatenus ipsum inest, assumptum, constitutam nobis formam ab omnibus alijs distinguit. Eodem igitur modo, & elementorum institutor parallelarum symptomata primum inuestigat. Hęc ex Proclo.

Apollonius de conicis lineis aget. Nicomedes de cōchoid. Hippias de quadrātibus Perseus de spiricis.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXVII.

⁂ Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

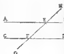


In duas enim rectas lineas A B C D, recta linea E F incidens alternos angulos A E F E F D æquales inter se faciat. Dico rectam lineam A B ipsi C D parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ A B C D, vel ad partes B D conuenient, vel ad partes A C. producantur, conueniantq; ad partes B D in pūcto G. Itaque G E F trianguli exterior angulus AEF maior est interiore et opposito EFG. Sed et æqualis. quod fieri nō pōt. non igitur A B C D productę ad partes B D conuenient. Similiter demonstrabitur neque conuenire ad partes A C. quę vero in neutras partes conueniunt, parallelę inter se sunt. parallela igitur est AB ipsi CD. Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se ęquales fecerit, parallelę inter se erunt rectę lineę. quod ostendere oportebat.

16. huius.

diffi 35.

F. C. COMMENTARIVS.



⁂ Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos] *Alternos angulos appellat eos, qui neque ad easdem partes, neque deinceps sunt, sed ab incidente linea distinguuntur, cum vtrique intra parallelas existant. differunt autem quòd alter sursum alter deorsum ponatur. Vt exempli gratia, rectis lineis A B, & C D existentibus, incidenteq; in ipsas recta linea E F, angulos A E F D F E; itemq; angulos C F E B E F alternos esse dicit. vt pote alterno, commutatóue ordine iuxta positionem se habentes. Illud autem sciendum est, cum talis sit rectarum linearum situs, omnia symptomata ex diuisione sex fieri, quorum tria tantum Geometra accepit, tria vero omisit. vel enim ad easdem partes angulos sumemus, vel non ad easdem: & si ad easdem, vel vtrosque intra rectas lineas, quas parallelas ostendit, vel vtrosque extra, vel vnum quidem intra, alterum vero extra. Si vero non ad easdem partes, similiter vel vtrosque intra, vel extra, vel vnum intra, & alterum extra. Sint enim rursus rectae lineae A B C D, in quas incidat recta linea E F: & ad H G pūcta producatur. Si igitur ad easdē partes angulos accipias, vel vtrosq; intra pones, vt B E F, & E F D, vel ipsos, A E F, & E F C, vel vtrosq; extra, vt H E B D F G, vel H E A C F G, vel vnum quidem intra, alterum vero extra, vt H E B E F D, vel G F D F E B; vel H E A E F C, vel G F C A E F.*

quadruplicitet

quadrupliciter enim hi accipiuntur. Si vero non ad easdem partes, vel vtrosque intra, vt A E F E F D, vel C F E F E B: vel vtrosque extra, vt A E H D F G, vel H E B C F G, vel vnum quidem intra, alterum vero extra; atque hoc rursus quadrupliciter, vel enim A E H E F D, vel H E B E F D, vel G F C F E B, vel G F D F E A. Cum igitur anguli sex modis sumatur, Euclides tres solas sumptiones elegit, vnam quidem ex ijs angulis, qui non ad easdem sunt partes, et qui intra tantum sumũtur; quos alternos appellauit; duas vero ex ijs, qui ad easdem partes vel vtrique intra sumuntur, quos duobus rectis aequales esse dicit: vel vnus quidem extra, alter vero intra sumitur, quos dicit inter se aequales esse. Tres vero reliquas omisit, vt pote quos eadem omnino consequãtur. Sint enim ad easdem partes vtrique extra anguli H E B D F G. Dico hos duobus rectis aequales esse, angulus enim D F E angulo H E B, & angulus B E F angulo D F G est aequalis. Si autem anguli B E F E F D duobus rectis sunt aequales, anguli etiam D F G H E B duobus rectis aequales erunt. Sint rursus non ad easdem partes anguli A E H E F D, quorum alter sit extra, alter intra; ipsi quoque duobus rectis sunt aequales. Quoniam enim angulus A E H aequalis est angulo B E F, anguli vero B E F E F D duobus rectis aaquales sunt; erunt & anguli A E H E F D duobus rectis aequales. Sint postremo non ad easdem partes vtrique extra anguli A E H D F G. Dico eos etiam inter se aequales esse. Nam cum angulus A E H aequalis sit angulo B E F, & angulus D F G angulo E F C, sintq; anguli B E F E F C alterni inter se aequales: anguli etiam A E H D F G inter se aequales sint necesse est.

Cum anguli sex modis sumantur. Euclides tres solas sumptiones elegit, reliquas omisit.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulũ interiori, et opposito, et ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, et ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erũt inter se rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas A B C D recta linea E F incidens exteriorem angulum E G B interiori et opposito G H D æqualem faciat; vel interiores, et ad easdem partes B G H G H D, duobus rectis ęquales. Dico rectam lineam A B rectę C D parallelam esse. Quoniam enim E G B angulus ęqualis est angulo G H D, angulus autem E G B angulo A G H, erit et angulus A G H angulo G H D ęqualis· et sunt alterni, parallela igitur est A B ipsi C D. Rursus quoniam anguli B G H G H D duobus rectis sunt æquales, et sunt A G H B G H ęquales duobus rectis; erunt anguli A G H B G H angulis B G H G H D æquales. communis auferatur B G H. reliquus igitur A G H est ęqualis reliquo G H D: et sunt alterni. ergo A B ipsi C D parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori et opposito, et ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, et ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectę lineę. quod demonstrare oportebat.

15. huius.

Ex antecedente 13. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema à Ptolemęo aliter demonstratur, vt tradit Proclus.

Theorema a Ptolemæo aliter demõstratur.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter se æquales, et exteriorem interiori et opposito, et ad

eaſdem partes ęqualem, et interiores et ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas AB CD recta linea incidat EF. Dico alternos angulos AGH GHD inter ſe æquales efficere, et exteriorē EGB interiori et oppoſito, et ad eaſdē partes GHD æqualē. et interiores et ad eaſdem partes BGH GHD duobus rectis æquales. Si enim inæqualis eſt AGH ipſi GHD, vnus ipſorum maior eſt. Sit maior AGH. et quoniam AGH angulus maior eſt angulo GHD; communis apponatur BGH. anguli igitur AGH BGH angulis BGH
13. huius. GHD maiores ſunt. Sed anguli AGH BGH ſunt æquales duobus rectis. ergo B
* GH GHD anguli ſunt duobus rectis minores. Quæ vero à minoribus, quàm ſint
Poſt. 5. duo recti in infinitum producuntur rectæ lineæ inter ſe conueniunt. ergo rectæ lineæ AB CD in infinitum productæ conuenient inter ſe. atqui non conueniunt, cum parallelę ponantur. non igitur inæqualis eſt AGH angulus angulo GHD.
15. huius. quare neceſſario eſt ęqualis. angulus autem AGH ęqualis eſt angulo EGB. ergo et EGB ipſi GHD ęqualis erit. communis apponatur BGH. anguli igitur EGB BGH ſunt ęquales angulis BGH GHD. Sed EGB BGH ęquales ſunt duobus rectis. ergo et BGH GHD duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter ſe æquales, et exteriorē interiori et oppoſito, et ad eaſdem partes æqualem; et interiores et ad eaſdem partes duobus rectis ęquales efficiet. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema, vt inquit Proclus, vtriſque pręcedentibus conuertitur. quod enim in vtroque illorum eſt quęſitum, poſitionem facit; & quae in illis data ſunt, demonſtrare proponit. atque hęc conuerſorū differentia ſilentio prętereunda non eſt. nam omne quod conuertitur, aut vnum vni conuertitur, vt quinto ſextum, aut pluribus vnum, vt pręcedentibus, quod nunc proponitur: aut plura vni, vt paulo poſt manifeſtum erit.

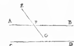
* Quæ vero à minoribus, quàm ſint duo recti in infinitum producuntur rectæ lineę inter ſe conueniunt] *Poſtulatum quintum eſt, quod tamen cum euidens non ſit, & demōſtratione indigere videatur, Proclus ita demoſtrandum cenſuit, duobus pręmiſſis, nimirum axiomate quopiam, quo etiam Ariſtotelęs vſus eſt, & lemmate.*

AXIOMA.

Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes in infinitum producantur, ipſarum diſtantia omnem finitam magnitudinem excedit.

LEMMA.

Si alteram parallelarum ſecuerit recta quædam linea; reliquam quoque ſecabit.

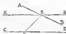


Sint parallelae AB CD; ſecetq; ipſam AB recta linea EFG. Dico EFG reliquam quoque CD ſecare. Quoniam enim duae rectae lineae ſunt, quae ab vno puncto F in infinitum producuntur, BF FG; omni finita magnitudine maiorem habebunt diſtantiam. quare & maiorem ea magnitudine, quae tanta eſt, quantum eſt interuallum inter parallelas interiectum. cum igitur harum linearum diſtantia maior fuerit, quàm diſtantia parallelarum, recta linea FG ſecabit ipſam CD. Quare ſi alteram parallelarum ſe-

cuerit

euerit quędam recta linea, reliquam quoque secabit.

Hoc ante demonstrato consequenter propositum demonstrabitur. Sint enim duae rectae lineae A B C D, & in ipsas incidat recta linea EF, angulos BEF DFE duobus rectis minores efficiens. Dico rectas lineas inter se conuenire ad eas partes, in quibus sunt anguli duobus rectis minores. Cum enim

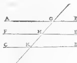


anguli B E F D F E duobus rectis minores sint, sit excessui duorum rectorum aequalis HEB angulus, & HE ad K producatur. Itaque quoniam in rectas lineas H K C D recta linea E F incidit, interioresq́, angulos HEF DFE duobus rectis efficit aequales, rectae lineae HK C D parallelae erunt. & A B secat ipsam H K. ergo reliquam quoque C D secabit per antecedens lemma. conuenient igitur inter se rectae lineae A B C D ad eas partes, in quibus sunt anguli duobus rectis minores, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXX.

Quę eidem rectę lineæ sunt parallelę, & inter se parallelæ erunt. *

Sit vtraque ipsarum A B C D ipsi E F parallela. Dico et A B ipsi C D parallelam esse. Incidat enim in ipsas recta linea G K. Et quoniam in parallelas rectas lineas A B E F, recta linea G K incidit, angulus A G H angulo G H F est æqualis. Rursus quoniam in parallelas rectas lineas E F C D, recta linea incidit G K, ęqualis est G H F angulus angulo G K D. ostensus autem est & angulus AGK angulo GHF æqualis. ergo et A G K ipsi GKD æqualis erit. et sunt alterni. parallela igitur est A B ipsi C D. ergo quæ eidem rectæ lineę sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt. quod oportebat demonstrare.



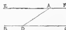
F. C. COMMENTARIVS.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, et inter se parallelæ erunt] *Contingit autem hoc, vt inquit Proclus, non in omnibus respectibus verum esse. non enim quę eiusdem dupla, & inter se dupla sunt, nec quae eiusdem sesquialtera, inter se sunt sesquialtera, sed in illis solis locum habere videtur, quęcunque vniuoce conuertuntur, ut in ęqualitate, in similitudine, in identitate, & in parallela positione. Quae enim parallelae parallela, & ipsa parallela est, quemadmodum, & quod aequali aequale, & ipsum est aequale; & quod simili simile, & ipsum simile. parallelarum enim ad se se respectus similitudo positionis est.* *

PROBLEMA X. PROPOSITIO XXXI.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. *

Sit datum quidem punctum A, data vero recta
linea B C. oportet per A punctum ipsi B C re-
ctæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Suma
tur in B C quod uis punctum D, & iungatur A D:
constituaturq́; ad rectam lineam D A, & ad pun- 23. Huius.
ctum in ipsa A, angulo A D C æqualis angulus
D A E: & in directum ipsi E A recta linea A F producatur. Quoniã igitur in duas
rectas lineas BC EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD ADC inter se
æquales efficit, EF ipsi BC parallela erit. Per datum igitur punctum A datæ rectæ 27. Huius.
lineæ BC parallela ducta est recta linea EAF. quod facere oportebat.



F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Per datum, & a dato pũcto linea ducere.

* Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.] *Videtur hoc problema parallelarũ ortũ tradere. At datum punctũ extra rectam lineam sumere oportet, ita ut à puncto ad ipsam ducta recta linea angulum faciat, alioqui nulla alia præter iam dictã, duci poterit. differunt autem per datum punctum, & à dato puncto rectam lineam ducere. Quando enim punctum rectae lineae, quae ducitur, principium est; ab ipso fit deductio, vt in illo problemate,* [super datam rectam lineam infinitam à puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere] *Quando autem punctum in recta linea est, per ipsum deductio fieri dicitur, vt nunc in parallelis.* [per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelã rectam lineam ducere;] *& quemadmodum non licet ab eodem puncto super datam rectam lineam duas perpendiculares, vel plures ducere, ita neque per idem punctum datae rectae lineae duas, uel plures parallelas ducere. parallelae enim in dicto puncto inter se conuenirent. quod est absurdum.*

THEOREMA XXII. ROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus duobus interioribus, et oppositis est æqualis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.



Ex antecedente.

29. huius.

Sit triangulum A B C: et vnum ipsius latus B C in D producatur. Dico angulum exteriorem A C D duobus interioribus et oppositis CAB ABC æqualem esse; et trianguli tres interiores angulos ABC B C A C A B duobus rectis esse æquales. Ducatur enim per punctũ C ipsi A B rectæ lineę parallela C E. Et quoniam AB ipsi C E parallela est, et in ipsas incidit A C, alterni anguli B A C A C E inter se ęquales sunt. Rursus quoniã AB parallela est CE, et in ipsas incidit recta linea BD, exterior angulus E C D interiori et opposito A B C est æqualis. Ostensus autem est angulus ACE æqualis angulo B A C. Quare totus A C D exterior angulus æqualis est duobus interioribus et oppositis BAC ABC. communis apponatur A C B. anguli igitur A C D A C B tribus A B C B C A C A B ęquales sunt. Sed anguli A C D A C B sunt ęquales duobus rectis. Ergo et A C B C B A C A B duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus & oppositis est ęqualis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis ęquales sunt. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Quantum deficiebat in sextodecimo, & septimodecimo theoremate, tantum in hoc addit, vt notat Proclus. non solum enim ex hoc discimus, trianguli exteriorem angulum vtroque interiore & opposito maiorem esse, sed & quanto maiorem. nam cum vtrisque sit aequalis, maior quàm alteruter reliquo est. nec trianguli duos quoslibet angulos duobus rectis minores esse solum ex hoc cognoscimus, sed quanto etiam minores: reliquo enim trium. illa igitur quodam modo magis indefinita fuerunt theoremata, hoc vero scientiae terminum vtrisque attulit. eius theorematis, triangulum scilicet interiores angulos duobus rectis aequales habere, inuẽtionem ad Pythagoricos refert Eudemus, quod ipsi aliter demonstrarunt, vt Proclus tradit. qui etiam huius theorematis duo ostendit conuersa, ex quibus apparere potest, quomodo vni duo conuertantur. Cum igitur ex hoc constet, trianguli tres interiores angulos duobus rectis esse aequales, aperta est nobis via, per quã caeterarum quoque figurarum rectilinearum angulos inueniemus, quot rectis aequales sint. vt puta

la quadrilaterae, quinquelaterae, & aliarum, quae sequuntur. Itaque primo sciendum est omnem rectilineam figuram in triangula resolui; omnium si quidem constitutionis principium est triangulum. vnaquęque autem in triangula binario pauciora, quàm sint propria latera, resoluitur, vt si Omnis rectilinea figura in triangula binario pauciora quam sit propria latera resoluitur.



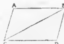
quattuor latera habeat, in duo resoluitur triangula; si quinque in tria, si sex in quattuor, & similiter reliquae. Quòd cum omnis trianguli tres interiores anguli duobus rectis sint aequales, numerus triangulorum, ex quibus vnaquęque figura constat, duplicatus multitudinem prębebit rectorum, quibus ea aequales angulos habet. Quapropter omnis quadrilatera figura ex duobus triãgulis constans angulos habet quattuor rectis aequales. & omnis quinquelatera habet angulos aequales sex rectis, & deinceps eodem modo, Sed & illud sciendum est, [omnem rectilineam figuram vnoquoque ex eius lateribus semel producto, angulos qui extra constituũtur, quattuor rectis æquales habere] *quod nos hoc modo demonstrabimus.* Omnis rectilinea figura angulos qui extra constituitur quattuor rectis æquales habet.

Sit triangulum A B C, et producantur latera A B B C C A ad puncta D E F. Dico angulos C B D B A E A C E, qui extra constituuntur, quattuor rectis æquales esse.

Sumatur enim intra triangulum, quodvis punctum G, & iungãtur G A G B G C. erunt triangulorum A G B B G C C G A omnes anguli sex rectis aequales; Sed & anguli C B A C B D B A C B A F A C B A C E sunt aequales sex rectis. Ergo dictorum triangulorum anguli angulis C B A C B D B A C B A F A C B A C E aequales sunt. communes auferantur C B A B A C A C B. reliqui igitur, qui sunt ad G sunt aequales angulis extra figuram constitutis. anguli autem ad G quattuor rectis sint aequales. ergo & anguli, qui extra figuram constituuntur, videlicet C B D B A F A C E quattuor rectis aequales erunt. quod demonstrare oportebat. eodẽ modo demonstrabimus in reliquis figuris, angulos qui extra ipsas constituuntur, quattuor rectis esse aequales. Corol.15.

THEOREMA. XXIII. PROPOSITIO. XXXIII.

Quę æquales, et parallelas ad easdem partes coniungunt rectę lineę, et ipsæ æquales, et parallelæ sunt.



Sint ęquales et parallelę A B C D: et ipsas cõiungant ad easdem partes rectę lineę A C B D. Dico A C B D æquales, et parallelas esse. iungatur enim B C. et quoniam A B parallela est C D: in ipsasq; incidit B C, alterni anguli A B C B C D æquales sunt. 29. huius. Rursus quoniam A B est æqualis C D, communis autẽ B C, duæ A B B C duabus B C C D sunt ęquales; 4. huius. et angulus A B C ęqualis angulo B C D. basis igitur A C basi B D est ęqualis: triangulumq; A B C trian

gulo B C D: et reliqui anguli reliquis angulis æquales erũt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus A C B angulo C B D est ęqualis. Et quoniam in duas rectas lineas A C B D recta linea B C incidens, alternos angulos A C B C

27 huius B D ęquales inter se efficit, parallela est A C ipsi B D. ostensa autem est et ipsi ęqualis. Quæ igitur ęquales et parallelas ad easdem partes coniungunt rectæ lineæ, et ipsæ æquales et parallelæ sunt. quod oportebat demonstrare.

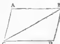
F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema veluti confinium parallelarum, parallelogrammorumq́; considerationis esse dicebamus. aequalium namque & parallelarum rectarum linearum symptoma quoddam dicere videtur, parallelogrammorumq́; ortum latenter tradit. parallelogrammum enim fit ex aequalibus, & parallelis, quae initio ductae sunt, & ex ijs, quae ipsas coniungunt rectis lineis: quae etiam aequales & parallelae ostenduntur. Quapropter quod statim sequitur, veluti constituto iam parallelogrammo, quae per se insunt eiusmodi spacijs, contemplatur. Quanta autem diligentia in hac propositione adhibita sit, accurate & diligenter notauit Proclus.

Parallelogrãmum quomodo fiat.

THEOREMA XXIIII. PROPO. XXXIIII.

Parallelogrammorum spaciorum latera, quæ ex opposito, et anguli, inter se ęqualia sunt; et diameter ea bifariam secat.



Sit parallelogrammum A C D B, cuius diameter BC. Dico A C D B parallelogrammi latera, quæ ex opposito, et angulos inter se æqualia esse; et diametrum B C ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est A B ipsi C D, et in ipsas incidit recta linea B C; anguli alterni A B C B C D inter se ęquales sunt. Rursus quoniam A C ipsi B D parallela est, et in ipsas incidit B C; alterni anguli A C B C B D ęquales sunt inter se. duo igitur triangula sunt A B C C B D, quę duos angulos A B C B C A duobus angulis B C D C B D æquales habent, alterum alteri: et vnum latus vni lateri æquale, quod est ad ęquales angulos, vtrique commune B C. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. ęquale igitur est latus quidem A B lateri C D: latus vero A C ipsi B D; et angulus B A C angulo B D C ęqualis. Et quoniam angulus A B C est ęqualis angulo B C D; et angulus C B D angulo A C B, erit totus angulus A B D æqualis toti A C D. ostensus autem est, et angulus B A C angulo B D C ęqualis. parallelogrammorũ igitur spaciorum latera, quę ex opposito, et anguli, inter se ęqualia sunt. Dico etiam diametrum ea bifariam secare. Quoniam enim æqualis est A B ipsi C D, communis autem B C, duæ A B B C duabus D C C B ęquales sunt, altera alteri, et angulus A B C æqualis est angulo B C D. basis igitur A C basi D B ęqualis. quare et triangulum A B C triangulo B C D æquale erit. ergo diameter B C parallelogramum A C D B bifariam secat. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Theorematum, vt inquit Proclus, alia vniuersalia sunt, alia non vniuersalia. quomodo autem vtrunque horum dicamus, commemorabimus, cum quęsitum partiemur, quod vnam partem habet vniuersalem, alteram vero non vniuersalem. quamuis enim omne theorema vniuersale quidem esse fortasse videretur, & omne, quod ab Euclide ostenditur huiusmodi esse (quemadmodum in presentia quoque non solum latera, quae ex opposito sunt, & angulos aequales habere vniuerse de omnibus parallelogrammis dici videtur, verum etiam diametrum vnumquodque bifariam secare) attamen alia quidem vniuerse ostendi dicimus, alia uero non vniuerse. aliter enim vniuersale appellari consueuit, quod de omnibus verum dicit, de quibus prędicatur, aliter autem quod omnia comprehendit,

Theorematum alia uniuersalia, alia non uniuersalia.

Vniuersale duobus modis appellari consueuit.

comprehendit, quibus idem symptoma inest. vniuersale siquidem est, & quod omne aequicrure tres angulos duobus rectis aequales habet, quoniam de omnibus aequicruribus verum est; vniuersale autem, & quod omne triangulum habet tres angulos duobus rectis aequales, quoniam omnia comprehendit, quibus hoc per se inest. Quocirca primum quoque hoc de triangulo ostendi dicimus, tres angulos duobus rectis aequales habere. Itaque iuxta hanc significationem, alia quidem vniuersalia theorematum dicentes, alia vero non vniuersalia, presens theorema dicimus vnum quidem quesitorum vniuersale habere: alterum vero non vniuersale. nam hoc quidem latera, quae ex opposito sunt, & angulos aequales habere vniuersale est. solis enim parallelogrammis inest. hoc vero, diametrum bifariam spacium secare, non vniuersale, quoniam non omnia comprehendit, in quibus symptoma hoc inspicitur. etenim circulis, & ellipsibus hoc etiam inest. & videntur primae quidem rerum huiuscemodi notiones esse magis particulares, progressae autem totum comprehendere. Cum enim antiqui contemplati fuissent, diametrum bifariam secare circulum, ellipsim, & parallelogrammum, commune in his postea contemplati fuere. Hallucinatur autem, inquit Aristoteles, quidã nõ vniuersale tamquã vniuersale ostendens, eò quod commune est innominatũ, cui primum symptoma inest. nam quid commune sit numeris, & magnitudinibus, & motibus, & sonis, quibus omnibus inest permutata proportio, dicere non licet. quid preterea cõmune sit circulo, ellipsi, & parallelogrammo, difficile est exprimere, nã vna quidem figura rectilinea est, altera circularis, altera vero mixta. Quapropter vniuersale eũ ostẽdere opinamur, qui demonstrat, omne parallelogrãmũ à diametro bifariã secari, eo quod cõmmune simul nõ cernimus, propter quod hoc verum est. Hoc igitur in parallelogrammis etiam huiuscemodi vniuersale non est propter iam dictam caussam. illud vero est, omne parallelogrammum latera, quae ex opposito sunt & angulos habere aequalia. Etenim si aliqua figura posita fuerit, quae ex opposito sunt latera, & angulos aequalia habere, parallelogrammum hęc esse ostendetur. hęc Proclus. Huius autem theorematis conuersum, quatenus ad primam partem attinet, tale est.

Tres angulos duobus rectis æquales habere primũ de triangulo ostenditur.

Diametrum bifariam secare spaciũ, inest non solum parallelogrãmo sed circulis, et ellipsibus.

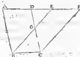
Omne quadrilaterum, quod latera ex opposito, et angulos æqualia habet, parallelogrammum est.

Sit quadrilaterum A B C D, habens latus quidem A B aequale lateri D C; latus vero A D lateri B C; angulumq́; A B C angulo A D C aequalem; & angulum B A D angulo B C D. Dico quadrilaterum A B C D parallelogrammum esse. Ducatur diameter B D. Et quoniam A B est aequalis D C, & A D ipsi B C, duae D A A B duabus B C C D aequales sunt, angulosq́; aequales cõtinẽt, & basis B D vtrique cõis. triangulũ igitur A B D triangulo C D B aequale erit, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, videlicet angulus A B D angulo C D B, & angulus A D B angulo C B D, qui sunt alterni. ergo A B parallela est in ipsi D C & A D ipsi B C, ideoq́; A B C D parallelogrammum est. quod demonstrare oportebat. 27. huius.

Conuersum vero vt ad secundam partem huiusmodi erit [omne quadrilaterum, quod ab vtrisque diametris bifariam secatur, parallelogrammum est. *quod nos Paulo post demonstrabimus.*

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXXV.

Parallelogramma in eadem basi, et in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.



Sint parallelogramma A B C D E B C F in eadem basi B C, et in eisdem parallelis A F B C constituta. Dico A B C D parallelogrammũ parallelogrammo E B C F æquale esse. Quoniã enim parallelogrammum est A B C D, æqualis est A D ipsi B C. Eadem quoque ratione, et E F est ęqualis B C. Quare et A D ipsi E F ęqualis erit: et communis D E. tota igitur A E toti D F est æqualis. est autem et A B æqualis D C. ergo duę E A A B duabus F D D C ęquales sunt, altera alteri, et angulus F D C ęqualis angulo E A B, exterior interiori. basis igitur E B basi F C est æqualis, et E A B 4. huius.

triangulum ęquale triangulo FDC. commune auferatur D G E. reliquum igitur trapezium A B G D reliquo trapezio E G C F est ęquale. commune apponatur G B C triangulum. ergo totum parallelogrammum A B C D toti parallelogrammo E B C F ęquale erit. parallelogramma igitur in eadem basi; et in eisdem parallelis cõstituta inter se æqualia sunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Quemadmodum theorematum, vt inquit Proclus, alia quidem vniuersalia, alia vero particularia esse dicebamus, & quemadmodum hęc diuidentes subiungebamus, alia esse simplicia, alia composita, & quid vnumquodque horum esset ostendebamus, ita sanè iuxta aliã distinctionem, alia quidem localia esse dicimus, alia vero non localia. Voco autem localia, quibuscunque idem symptoma in toto quodam loco accidit. locum uero lineae, vel superficiei situm, qui vnum, idemq́ symptoma efficiat. localium enim alia in lineis constituuntur, alia in superficiebus. Et quoniam linearum aliae sunt planae, aliae solidae. & planae quidem, quarum simplex est in plano intelligentia, ut ipsius rectae: solidae uero quarum ortus ex quadam solidae figurae sectione apparet. ut Cylindicae helicis, canonicarumque linearum, dicerem itique eorum etiam, quae in lineis constituuntur, localium theorematum, alia quidem planum habere locum, alia uero solidum. Pręsens igitur theorema & locale est, & in lineis locale, & planum. totum enim spacium, quod inter parallelas interijcitur, locus est parallelogrammorum, quae in eadem basi constituuntur. quae sanè aequalia quoque inter se Euclides ostendit. eorum uero localium theorematum, quae solida uocantur, tale sit exemplum, [parallelogramma, quæ in asymptotis, et hyperbola describuntur æqualia sunt.] *nam hyperbolen solidam esse lineam, manifestum est, quòd sit una ex coni sectionibus. Cum autem in pręsentia de rectilineis sermo sit, localia plana in rectis lineis tradit; in tertio autem libro, cũ de circulis, eorumq́ symptomatibus pertractet, ea etiam, quae in circumferentijs constituuntur localium simul, & planorum theorematum docebit, tale siquidem in illis est, quod ait* [Qui in eadem portione sunt anguli inter se sunt ęquales] *nec non illud.* [Anguli qui in semicirculo recti sunt] *nam si infiniti quidẽ anguli in circũferentia constituti fuerint, eadẽ existẽte basi, omnes aequales esse ostenduntur. & illa quidem proportione respondent triangulis, & parallelogrammis, quae in eadem basi, & in eisdem sunt parallelis. Species igitur theorematum, quae mox sequuntur talis est, quae apud antiquos mathematicos localis nuncupatur. Sunt pręterea hęc theoremata ex eorum numero, quae admirabilia in mathematicis disciplinis appellantur. stupet enim uulgus statim si longitudo multiplicata spaciorum aequalitatem non destruit, eadem existẽte basi. quantum enim parallelas producimus, tantum parallelogrammorum quoque longitudines augentur. Sciendum autem est angulorum aequalitatem, & inequalitatem maximam uim habere ad augenda minuendaq́ spacia. quo enim magis angulos inęquales efficimus, eò spacium magis diminuimus, si longitudo latitudoq́ eadem sit. Hoc theorema plures habet casus, uel igitur latus B E secat C D, uel non secat. & si non secat, uel E cadit inter A D uel in D. Euclides autem difficiliorem casum elegit, cum scilicet latus BE ipsum CD secat. si uero E cadit inter AD ita argumentabimur. Quoniam enim A D est aequalis EF, quòd utraque ipsi BC sit aequalis, communi ablata E D, erit reliqua A E aequalis reliquae DF. est autem D C aequalis A B. Itaque duae F D D C duabus E A A B aequales sunt, & angulos aequales continent. basis igitur F C basi E B est aequalis. & FDC triangulum triangulo E A B. addatur cõmune trapezium E B C D. erit totum A B C D parallelogrammum toti E B C F parallelogrammo aequale. Quòd si E cadat in D, similiter demonstrabimus triangulum F DC aequale triangulo D A B. quare addito utrique communi D B C triangulo, totum A B C D parallelogrammum toti parallelogrammo D B C F, hoc est E B C F aequale erit.*

Theoremata localia.
Locus lineæ, uel superficiei situs, qui idẽ symptoma efficit.
Linearum aliæ planæ, aliæ solidæ.
Localium theorematũ alia planum habent locũ, alia solidũ.
Hyperbole solida linea.
Localia plana in rectis lineis.
Localia plana in circumferentijs.
Theoremata quæ in mathematicis admirabilia dicuntur.
Angulorum æqualitas, et inæqualitas maximam uim habent ad augenda minuendaq́ spacia.
Theorematis casus.
4. huius.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXXVI.

Parallelogramma in ęqualibus basibus,

et

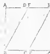
et in eisdem parallelis constituta inter se ęqualia sunt.

Sint parallelogramma ABCD EFGH in æqualibus basibus B C F G, et in eisdẽ parallelis AH BG constituta. Dico parallelogrammum A B C D parallelogrammo E F G H æquale esse. coniungantur enim BE CH. Et quoniam æqualis est BC ipsi FG, & FG ipsi EH; erit et BC ipsi EH æqualis. suntq; parallelæ, et ipsas cõiungunt BE CH. quæ autem æquales, et parallelas ad easdem partes coniungunt, æquales, et parallelæ sunt. 33 huius. Ergo E B, C H et æquales sunt, et parallelæ: quare E B CH parallelogrammum est, et æquale parallelogrammo ABCD; basim enim eandem habet B C, et in eisdem parallelis B C, A D constituitur. Ex antecedente. simili ratione, et EFGH parallelogrammum eidem parallelogrammo EBCH est ęquale. ergo parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH ęquale erit. Parallelogramma igitur in æqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia. quod oportebat demonstrare.

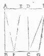


F. C. COMMENTARIVS.

Pręcedens theorema easdem bases accipiebat, hoc vero aequales. commune autem vtrisque est in eisdem esse parallelis. oportet igitur ipsa neque intra subiectas cadere parallelas, neque extra. parallelogramma enim in eisdem dicuntur esse parallelis, cum bases ipsorum, & quae his ex opposito sunt, latera eisdem parallelis aptantur. Casus huius theorematis plures sunt. Nam vel bases omnino seiunctae sunt, vel se se contingunt, uel aliquam partem habent communem, vtcunque se habeant latera, quae basibus opponuntur. & quamquam Proclus dicat Euclidem cum basim seiunctam accepisset, theorema demonstrasse, attamen demonstratio, quam habemus omnibus casibus congruere mihi videtur, vt etiam ex hoc loco colligi possit demonstrationes Euclidis à Theone in meliorem formam redactas esse.



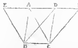
Parallelogrã ma in eisdẽ parallelis, quæ sint. Theorematis casus.



THEOREMA XXVII.
PROPOSITIO XXXVII.

Triangula in eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

Sint triangula ABC DBC in eadem basi BC, et in eisdem parallelis AD BC constituta. Dico ABC triangulum triangulo D B C ęquale esse. producatur AD ex utraque parte in E F pũcta: et per B quidem ipsi CA parallela ducatur BE, 31. huius. per C vero ipsi BD parallela CF. parallelogrammũ igitur est vtrũque ipsorũ EBCA DBCF, et parallelogrammum E B C A est ęquale parallelogrammo D B C F, 35. huius. etenim in eadem sunt basi BC, et eisdem parallelis BC EF, estq; parallelogrammi quidem EBCA dimidium ABC triangulum, cum diameter AB ipsum bifariam secet: parallelogrammi vero 34. huius. DBCF dimidium triangulum DBC; diameter enim DC ipsum bifariã secat. 7. com. no. Quæ autem æqualium dimidia, inter se ęqualia sunt. ergo triangulum A B C triangulo DBC est æquale. Triangula igitur in eadem basi, et in eisdem parallelis constituta inter se ęqualia sunt. quod oportebat demonstrare.



F. C.

Theorema ... trian- gulis localia, & in lineis lo- calia & plana

Sunt etiam hec theoremata de triangulis, quae in eadem basi, vel in aequalibus basibus, & in eisdem parallelis constituuntur localia, & in lineis localia, & plana. dicuntur autem triangula in eisdem esse parallelis, quae cum bases habeant in vna parallelarum, in reliqua vertices figũt.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Triangula in basibus, ęqualibus et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt ęqualia.



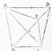
Sint triangula ABC DEF in æqualibus basibus, B C E F, et in eisdem parallelis BF AD constituta. Dico ABC triangulum triangulo D E F æquale esse. producatur enim AD ex vtraq; par
31. huius. te in GH puncta: et per B quidem ipsi CA parallela ducatur B G per F vero ducatur FH parallela ipsi DE. parallelogrammum igitur est utrumque ipso
35. huius. rum GBCA DEFH. atque est parallelogrammum GBCA ęquale parallelogrammo DEFH: in æqualibus enim sunt basibus BCEF, et in eisdem BF GH parallelis.
34 huius. parallelogrammi vero G B C A dimidium est ABC triangulum, nam diameter AB ipsum bifariam secat. et parallelogrammi DEFH dimidium est triangulum DEF, diameter enim D F ipsum secat bifariam. quę autem ęqualiũ dimidia, inter se ęqua
7 com not. lia sunt. ergo ABC triangulum triangulo DEF est ęquale. triangula igitur in ęqualibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Casus in hoc theoremate tot sunt, quot in xxvi. Videtur autem Euclides quod in his quattuor theorematibus ostendit, vno illo theoremate comprehendisse, in principio sexti libri. [triangula et parallelogramma, quę eandem habent altitudinem inter se sunt, ut bases.] *eadem enim altitudo nihil aliud est, nisi in eisdem esse parallelis. nã figurae oẽs quę in eisdẽ sunt parallelis, eandẽ altitudinẽ habent, & contra; altitudo siquidem est perpendicularis, quae ab altera parallelarũ ad reliquã pertinet. illic igitur per proportionem ostensum est, ita se se habere triangula, et parallelogramma, quae eandem altitudinem habent, hoc est quae in eisdẽ sunt parallelis, vt bases: & aequalibus existentibus basibus aequalia esse spatia, & dupla duplis, & aliam proportionẽ habentibus, eandem habere & spatia inter se proportionem: in pręsentia uero, quoniam non decebat proportione uti, qui nondũ de ipsa docuerat, contentus fuit aequalitate sola, atque identitate.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXIX.

A Triangula æqualia in eadem basi, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.



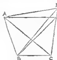
Sint æqualia triangula A B C D B C in easdem basi B C constituta, et ad easdem partes. Dico et in eisdem parallelis esse. Iungatur enim A D. Dico A D parallelam esse ipsi B C. Si enim non est parallela, ducatur per A punctum ipsi B C parallela recta linea A E, et E C iungatur. æquale igitur est A B C triangulum triangulo E B C, in eadem enim est basi BC, et in eisdem BC, AE parallelis. Sed ABC triangulũ triangulo D B C est ęquale. ergo et triangulum

D B C æquale est ipsi E B C triangulo, maius minori, quod fieri non potest. non igitur A E ipsi B C parallela est. Similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam esse, præter ipsam A D. ergo A D ipsi B C est parallela. Triangula igitur ęqualia in eadem basi, et ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema vigesimi septimi conuersum est, & quod sequitur est conuersum vigesimi octaui. nam, vt inquit Proclus, cum triplex sit theorematum conuersio, aut enim totum toti conuertitur, vt duodecimum theorema vndecimo; aut pars toti, vt tertium secūdo; aut pars parti, vt quintum primo. non enim totum in altero datum, quęsitum in altero est, nec quęsitum, datum, sed pars: talia videntur esse hęc quoque theoremata in triangulis. erat siquidem quęsitum in pręcedentibus, triangula aequalia esse. hoc autem non solum in his datum est, quippe cum partem insuper sumpserit eius, quae in illis erat, positionis; hoc enim, in eadem basi esse, & in aequalibus basibus tum in his, tum in illis datum est, pręterquam quòd in hisce positionibus quoddam adiecit, quod quidem nec quęsitum, nec datum in illis erat. particula enim illa, ad easdem partes, extrinsecus insuper fuit assumpta. conuersa vero vigesimi quinti, & vigesimi sexti in parallelogrammis consulto omisit, quod eadem sit in vtrisque demonstratio. Theorematū conuersio triplex.

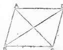
A Et ad easdem partes.] *Quae his respondent, videlicet καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη in aliquibus gręcis exēplaribus, tum in hoc theoremate, tum in sequenti nō legūtur, sed necessario addita sunt. fieri enim potest vt in eadem basi aequalia triangula sumantur, vnum quidē ad partes superiores, aliud vero ad inferiores, quae tamen non sunt in eisdem parallelis, & quandoque non eadem altitudine.*



B Maius minori quod fieri non pōt.] *Idē absurdū sequetur, si recta linea A E sumatur extra ipsam A D, vt notat Proclus. Ex his, quae hoc loco demonstrata sunt, patebit cōuersū secūdę partis vigesimi quarti theorematis, quod erat huiusmodi.*

Omne quadrilaterum, quod ab utrisque diametris bifariam secatur, parallelogrammum est.

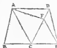
Sit quadrilaterum A B C D, cuius diametri A C B D ipsum bifariam secent. Dico A B C D parallelogrammum esse. Quoniam enim triangula A B C D B C eiusdem sunt dimidia, inter se aequalia sunt: & eandem habent basim B C. quare in eisdem sunt parallelis. parallela igitur est A D ipsi B C. similiter cum triangulum A B C aequale sit triangulo A B D, & sint in eadem basi A B, demonstrabitur rectam lineam D C ipsi A B parallelam esse. Ergo A B C D parallelogrammum erit. quod oportebat demonstrare.



THEOREMA XXX. PROPOSITIO XL.

Triangula æqualia in basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula A B C C D E in æqualibus basibus B C C E constituta. Dico etiam in eisdem esse parallelis. cōiungatur enim AD. Dico A D ipsi B E parallellam esse. Nam si non est, ducatur per A ipsi B E parallela A F, et F E iungatur. triangulum igitur A B C triangulo F C E est æquale, cum in æqualibus basibus, et in eisdem parallelis B E A F constituantur. Sed triangulū A B C ęquale est triangulo D C E. 38.huius.



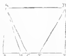
ergo

ergo et triangulum D C E triangulo F C E ęquale erit, maius minori, quod fieri nō potest. non igitur A F ipsi B E est parallela. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter A D. ergo A D ipsi B E parallela erit. Aequalia igitur triangula in basibus æqualibus, et ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Cum tria sint in iam dictis propositionibus, videlicet in aequalibus, vel eisdem basibus esse, in eisdem parallelis, & aequalia esse triangula, & parallelogramma; nos duo semper continentes, unum vero reliquentes varie conuertemus. aut enim bases easdem, vel aequales ponemus, in eisdemq; parallelis triangula, & parallelogramma, & quattuor faciemus theoremata: aut aequalia ipsa suscipiemus, & bases easdem, vel aequales, & faciemus alia quattuor; quorum duo quidem omisit Euclides, nimirum ea, quae sunt in parallelogrammis; reliqua vero duo ostendit, videlicet ea, quae in triangulis sunt: aut etiam cum aequalia sumpserimus, & in eisdē parallelis, reliquum ostendemus, vel in eisdem basibus esse, vel in aequalibus, & faciemus alia quattuor, quae etiam Euclides omisit. in his namque eadem est demonstratio, nisi quòd duo ex his quattuor per se vera non sunt. non enim aequalia parallelogramma, vel triangula, & quae in eisdem sunt parallelis, necessario in eadem basi sunt. Sed totum hoc in hisce positionibus verum est, vel in eisdem esse basibus, vel in ęqualibus, alterum autem, non omnino sumptas positiones consequitur. Quapropter cū decem sint omnia theoremata, sex quidem geometra conscripsit, quattuor vero omisit, ne rursus eadem ratione frustra laboret, cum eadem sit demostratio. ostēdetur enim in triangulis hoc modo.

Triangula æqualia, et in eisdem parallelis constituta, vel in eisdem, vel in æqualibus basibus erunt.



Sint aequalia triangula A B C D E F in eisdem parallelis A D B F constituta. Dico in aequalibus quoque basibus esse. Non enim, sed si fieri potest, sint bases B C E F inaequales, & sit B C maior, abscindaturq; BH aequalis ipsi E F; & 38 huius. *A H iungatur. Itaque quoniam triangula A B H D E F in aequalibus sunt basibus B H F F, & in eisdem parallelis, inter se aequalia sunt. Sed & ipsa A B C D E F triangula posita sunt aequalia. ergo triangulum A B C triangulo A B H est aequale; sed & maius, quod fieri non potest. Non igitur inequales sunt triangulorum A D C D E F bases. Idem demonstrabitur, & in parallelogrammis. Quare cum modus demonstrandi idem sit, & id, quod fieri non potest, idem, totum, scilicet suae parti aequale esse: non immerito ab Euclide pretermissum fuit. hęc ex Proclo.*

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XLI.

Si parallelogrammum, et triangulum eandem basim habeant, in eisdemq; sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.



Parallelogrammum enim A B C D, et triāgulum E B C, basim habeant eandem B C, et in eisdem sint parallelis B C A E. Dico parallelogrammum A B C D trianguli E B C duplum esse. 37 huius. Iungatur enim A C. triangulum igitur A B D triangulo E B C est æquale; namque in eadem basi B C, et in eisdem B C A E 34. huius. parallelis constituitur. Sed A B C D parallelogrammum duplum est trianguli A B C, cum diameter A C ipsum bifariam secet. Quare et ipsius E B C trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, et triangulum

gulum eandem basim habeant, et in eisdem sint perallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIUS.

Huius theorematis duo sunt casus, vel enim triangulum verticem habet intra parallelogrammum, vel extra. Sed in vtrisque demonstratio eadem est. Quòd si bases aequales sint, eodem modo ostendemus, parallelogrammi diametrum ducentes. nam cum triangula in basibus aequalibus constituta inter se aequalia sint, parallelogrammum, quod alterius est duplum, reliqui quoque duplum erit. Sed duo eius conuersa similiter demonstrabuntur, quorum vnum est.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; basim, aut æquales habuerint, et fuerint ad easdem partes: in eisdem etiam parallelis erunt.

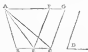
Si enim non ita sit, totũ parti erit aequale, eademq; ratio vigebit. necesse enim est, aut intra parallelas trianguli verticem cadere, aut extra: vtro autem modo se se habuerit, idem sequetur absurdum, parallela ipsi basi per trianguli verticem ducta. alterum vero est.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, in eisdemq; ambo fuerint parallelis; aut in vna eademq; basi, aut in æqualibus erunt.

Si enim in basibus inaequalibus sint, cum aequales sumpserimus, totum parti aequale erit. In hoc igitur commune absurdum omnia hęc theoremata desinunt. Quare elementorum institutor nobis reliquit eam, quae in his est, veritatem inuestigare, cum in simplicioribus ipse, & principalioribus contemplationem contraxerit. ex Proclo.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo ęquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.



Sit datum triangulum A B C, datus autem rectilineus angulus D. Itaq; oportet, dato triangulo ABC ęquale parallelogrãmum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali. secetur B C bifariam in E, et iuncta A E ad rectam lineam E C, atque ad pũctum in ea E, constituatur angulus C E F 23. huius
ęqualis ipsi D: et per A quidẽ ipsi E C parallela ducatur A G, per C vero ipsi F E ducatur parallela C G. parallelogrãmum igitur est F E C G. Et quoniam B E est ęqualis E C, erit et A B E triangulum triangulo A E C ęquale; in ęqualibus enim sunt basibus B E E C, et in eisdem B C A G parallelis. Ergo triangulum A B C trianguli A E C est duplum. est autem et parallelogrammum F E C G duplum trianguli A E C; basim enim eandem habet, et in eisdẽ est parallelis. ęquale igitur est F E C G parallelogrammum triangulo A B C, habetq; C E F angulum ęqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo A B C æquale parallelogrammum F E C G constitutum est, in angulo C E F, qui angulo D est æqualis. quod quidem facere oportebat.

(Margin: 31. huius. 38. huius. 34 huius.)

THEOREMA XXXII. ROPOSITIO XLIII.

Omnis parallelogrammi spacij eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum supplementa inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum A B C D, cuius diameter A C: et circa ipsam A C parallelogramma quidem sint E H F G, quæ vero supplementa dicuntur B K K D. Dico B K suplementum supplemento K D æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est A B C D, et eius diameter A C, ęquale est A B C triangulum triangulo 34. huius.
A D C.

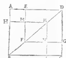


A D C. Rursus quoniam E K H A parallelogrammum est, cuius diameter A K, triangulum A E K triangulo A H K æquale erit. Eadem ratione, et triangulum K G C triangulo K F C est æquale. Cum igitur triangulum quidem A E K ęquale sit triangulo A H K, triangulum vero K G C ipsi K F C; erit triangulum A E K vnà cum triangulo K G C ęquale triangulo A H K vna cum H F C triangulo. est autem et totum triãgulum A B E æquale toti A D E, reliquum igitur B G supplementum reliquo supplemento K D est ęquale. Ergo omnis parallelogrammi spacii eorum, quę circa diametrum sunt, parallelogrãmorum suppleměta inter se æqualia sunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

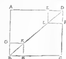
Huius theorematis tres sunt casus. vel enim parallelogramma, quae circa eandem consistunt diametrum, se se in puncto contingunt, vel se se secant, vel quadam diametri parte à se disiunguntur. In omnibus autem eadem congruit demonstratio, quamquam non semper quadrilatera sint supplementa. Euclides sumpsit ea parallelogramma, quae proprie circa diametrum consistere dicuntur, videlicet quae se se in puncto contingunt, in quo casu supplementa B K K D quadrilatera sunt, vt apparet in prima figura. Sit rursus parallelogrammum A B C D, cuius diameter B D, & circa B D parallelogramma sint E F G D H B L K, quae se se in punctis M N secent. Dico quadrilatera A H M E N L C G inter se aequalia esse. Quoniam enim triangulum quidem A B D est aaquale triangulo D B C, triangulum vero E F D triãgulo D F G, erit reliquum quadrilaterum A B F E ęquale reliquo quadrilatero C B F G. Rursus quoniam triangulũ H B K est aequale triangulo K B L, triangulumq́; M F K triãgulo K F N, erit reliquum quadrilaterum H B F M aequale reliquo L B F N. erat autem & totum A B F E aequale toti C B F G, reliquum igitur A H M E quadrilaterum reliquo quadrilatero N L C G aequale sit necesse est; & hęc quidem quadrilatera sunt, quae supplementa dicuntur.

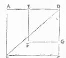
34. huius.



Sit denique parallelogrammum A B C D, & eius diameter B D, circa quam parallelogramma E L F D G B H K, quae à se inuicem disiunguntur parte ipsius diametri K L. Et quoniam triangulum A B D est aequale triangulo D B C, & triangula E L D G B K aequalia sunt triangulis D L F K B H; erit reliquum quinquelaterum A G K L E aequale reliquo H K L F C. atque hęc quidem parallelogrammorum supplementa sunt. At nomen supplementorum à re ipsa sumptũ est, quatenus hęc quoque pręter duo parallelogramma, quae sunt circa diametrum, totum parallelogrammum complent. Illa autem parallelogramma circa eãdem diametrum sunt, quęcunque partem totius diametri pro sua etiam diametro habent. Sed cum totius parallelogrammi diameter aliquod ex lateribus interni parallelogrammi secat, tunc parallelogrãmum hoc toti parallelogrammo circa eandem diametrum non est, vt in parallelogrammo A B C D diameter BD secat E F latus ipsius E F G D parallelogrammi. quare E F G D parallelogrammum non est circa eandem diametrum.

Supplementorũ nomen a re ipsa sũptum.





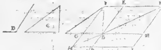
THEO.

PROBLEMA XII. PROPOSITIO XLIIII.

Ad datam rectam lineam dato triangulo ęquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea A B; datum vero triangulum C, et datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D ęquali. constituatur triangulo C æquale parallelogrammum BEFG, in angulo E B G, qui est ęqualis D. et ponatur BE in directum ipsi A B, producaturq; F G ad H: et per A alterutri ipsarum B G E F parallela ducatur A H, et H B iūgatur. Quomã igitur in parallelas A H E F recta linea HF incidit, anguli AHF HFE duobus rectis æquales sunt. quare BHG GFE duobus rectis sunt minores. Quæ vero à minoribus, quàm sint duo recti, in infinitum producuntur, cõueniunt inter se. Ergo H B F E productæ conuenient. producantur, et cõueniant in K: perq; K alterutri ipsarum E A F H parallela ducatur KL, et A H G B ad L M puncta producantur. parallelogrammum igitur est HLKF, cuius diameter HK, et circa HK parallelogramma quidem sunt A G M E; ea vero, quæ supplementa dicuntur L B B F: ergo L B ipsi B F est æquale. Sed et B F æquale est triangulo C quare et L B triangulo C ęquale erit. Et quoniã G B E angulus ęqualis est angulo A B M, sed et æqualis angulo D; erit et angulus A B M angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, dato triangulo C ęquale parallelogrammum constitutum est L B, in angulo A B M, qui est æqualis angulo D. quod facere oportebat.

42 huius. 31 huius. 29 huius. 5 postul. 31 huius. Ex antecedente. 15 huius.



F. C. COMMENTARIUS.

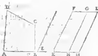
Antiqua hęc sunt, vt ait Eudemus, & pythagoreorum inuenta, applicatio spaciorum, excessus, & defectus. cum enim proposita recta linea, datum spacium toti rectae lineae adaptaueris, tunc spacium illud applicari dicunt; cum vero spatij longitudinem ipsa recta linea maiorem feceris, tunc excedere; cum autem minorem, ita vt spacio descripto aliqua rectae lineae pars extra sit, tunc deficere. & hoc modo Euclides in sexto libro, tum excessus, tum defectus mentionem facit. in pręsentia vero applicatione indiguit ad datam rectam lineam dato triangulo aequale parallelogrammum applicare uolens, vt non solum parallelogrammi dato triangulo aequalis constitutionem habeamus, sed etiam ad terminatam rectam lineam, applicationem. ex Proclo.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO XLV.

Rectilineo dato ęquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum ABCD: datus vero angulus rectilineus E. Itaque oportet rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constituere in angulo ipsi E æquali. coniungatur enim DB, et constituatur triangulo ADB æquale parallelogrammum FH; in angulo HKF, qui est æqualis angulo E. deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale parallelogrammum GM, in angulo GHM, qui angulo E est æqualis. Et quoniam angulus E æqualis est vtrique ipsorum HKF GHM; erit et HKF angulo GHM æqualis. communis apponatur KHG. anguli igitur FKH

42 huius. Ex antecedente.



29. huius. KHG angulis KHG GHM æquales sunt. Sed FHM KHG sunt æquales duobus rectis. ergo et KHG GHM duobus rectis æquales erunt. Itaque ad aliquam rectam lineam GH, et ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad easdem partes positæ angulos deinceps duobus rectis æquales effi-
14 huius. ciunt. in directum igitur est KH ipsi HM. Et quoniam in parallelas KM FG
29. huius. recta linea H G incidit, alterni anguli MHG HGF æquales sunt. communis apponatur HGL. anguli igitur MHG HGL angulis HGF HGL sunt æquales. at anguli MHG HGL æquales sunt duobus rectis. quare et anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt. In directum igitur
34 huius. est FG ipsi GL. Et quoniam KF ipsi HG et æqualis est, et parallela; sed et HG ipsi
30 huius. ML; erit KF ipsi ML et æqualis, et parallela ipsasq; coniungunt rectæ lineæ KM FL.
33 huius. ergo et KM FL æquales et parallelæ sunt. parallelogrammum igitur est KFLM. Quòd cum triangulum quidem A B D æquale sit parallelogrammo HF. triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constitutum est KFLM in angulo FKM, qui est æqualis angulo E dato. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Duobus problematibus, in quibus & constitutionem inuenit, & applicationem aequalium dato triangulo parallelogrammorum, hoc vniuersalius est. siue enim triangulum, siue quadratum, siue omnino quadrilaterum, siue aliquod aliud multilaterum datum fuerit, per hoc problema aequale ipsi parallelogrammum constituemus. Omne enim rectilineum, vt plus diximus, per se in triangula resoluitur, & methodum inueniendae triangulorum multitudinis tradidimus, resoluentes igitur datum rectilineum in triangula, & vni quidem ipsorum aequale parallelogrammum constituentes, reliquas uero ad datam rectam lineam aequalia applicantes parallelogramma, nempe ad illam, ad quam prima applicatio facta est; habebimus ex his parallelogrammum aequale rectilineo, quod ex illis triangulis constat, et factum iam erit, quod proponebatur. Hæc Proclus.

COROLLARIVM.

Ex iam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo.

PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO XLVI.

A data recta linea quadratum describere.



Sit data recta linea AB. oportet ab ipsa AB quadratũ describere. Ducatur rectæ lineæ AB à pũcto in ea dato A ad rectos angulos AC: & ipsi AB æqualis ponatur AD; perq; punctum D ducatur DE ipsi AB parallela: et per B ipsi AD parallela ducatur BE. parallelogrammum igitur est ADEB. et AB quidem est æqualis DE, AD vero ipsi BE. Sed et BA ipsi AD est æqualis. quattuor igitur BA, AD DE EB inter se æquales sunt, ideoq; æquilaterum est ADEB parallelogrammum. Dico etiam rectãgulum esse. Quoniam enim in parallelas AB DE recta linea in-
29 huius. cidit AD, anguli BAD ADE duobus rectis sunt æquales. rectus
34 huius. autem est BAD. ergo et ADE rectus erit. parallelogrammorum vero spaciorum, quæ ex opposito sunt latera, et anguli inter se æqualia sunt. rectus igitur est vterque oppositorum ABE BED angulorum et ob id rectangulum est ADEB, ostensum autem est, et æquilaterum esse. quadratum igitur sit necesse est. atque est à recta linea AB descriptum. quod ipsum facere oportebat.

F. C.

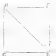
Hoc problemate indigemus potissimum in sequentis theorematis constructionem. Videtur autem Euclides duorum in rectilineis optimorum ortus tradere voluisse. nimirum trianguli ęquilateri, & quadrati, quoniam ad constitutionem quoque mundanarum figurarum, & pręcipue earum quattuor, quarum & ortus est & resolutio, hisce rectangulis opus est. nam icosaedrum quidem, & octaedrum, & pyramis ex aequilateris triangulis constant; cubus vero ex quadratis. Proclus hoc loco duo theoremata demonstrat, quibus mathematici tamquam demonstratis passim vtuntur, nempe hęc.

Quadrata ab ęqualibus rectis lineis descripta, etiam inter se aequalia sunt.

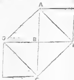


Sint enim aequales rectae lineae AB CD, & ab ipsa quidem AB describatur ABEG quadratum; ab ipsa vero CD quadratum CDFH. Dico hęc quadrata inter se aequalia esse. Quoniam enim rectae lineae AB CD aequales sunt, erunt & ipsae AG CH aequales, angulosq; aequales continent. ergo & basis GB est aequalis basi HD, & triangulum ABG aequale triangulo CDH, 4 huius. *& ipsorum dupla sunt aequalia. quadratum igitur ABEG quadrato CDFH aequale erit. Sed & huius ipsius conuersum.*

Quadrata ęqualia ab ęqualibus rectis lineis descripta sũt.



Sint enim quadrata aequalia AF CG: & ponatur ita, vt latus AB sit in directum ipsi BC. Cum igitur anguli recti sint, recta quoque linea FB rectae BG in directum erit. iungantur FC CG GA AF rectae lineae. Et quoniam AF quadratum est aequale quadrato CG, & AFB triangulum aequale erit triangulo CBG. commune apponatur BCF triangulum: totum igitur triangulum ACF toti CFG est aequale; ideoq; parallela est AG ipsi FC. 39 huius. *Rursus quoniam angulus AFG est aequalis angulo CGB, cum vterque sit dimidia pars recti; erit AF ipsi CG parallela.* 28.huius. *aequalis igitur est recta linea AF rectae lineae CG, parallelogrammi siquidem latera ex opposito iacentia sunt.* 34.huius. *Itaque quoniam duo sunt triangula ABF BCG, quae alternos angulos aequales habent, quippe quòd AF CG parallelae sint, & latus vnum AF est aequale lateri CG; erit & latus AB lateri BC, & latus BF lateri BG aequale. Ostensum igitur est latera etiam à quibus descripta sunt AF CG quadrata inter se aequalia esse, cum illa aequalia sint. possumus etiam aliter propositum demonstrare per deductionem ad id, quod fieri non potest in hunc modum.*



Sint aequalia quadrata ABCD EFGH. Dico rectas lineas AB EF à quibus ea describuntur inter se aequales esse. Si enim AB EF aequales non sint, altera earum est maior, sit maior AB, & abscindatur AK, quae ipsi EF sit aequalis, & ex AK quadratum AKLM describatur. Quoniam igitur AK est aequalis EF, erit & quadratũ AKLM, ex ante demõstratis, aequale quadrato EFGH; sed et quadratum ABCD aequale erit eidem EFGH quadrato. ergo quadratum ABCD quadrato AKLM est aequale, totum parti, quod fieri non potest. non igitur aequalibus existentibus quadratis ABCD EFGH rectae lineae AB EF à, quibus ea describuntur, inęquales sunt. ergo inter se aequales sint necesse est.

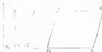




Non

Non inutile autem erit ad parallelogrammorum etiam constitutionem problema, quod sequitur.

Ex duabus rectis lineis, quæ duabus datis æquales sint, et in dato angulo rectilineo parallelogrammum constituere.

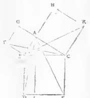


Sint datae quidem rectae lineae A B, datus autem angulus rectilineus C. oportet ex duabus rectis lineis, quae ipsis A B aequales sint, & in angulo ipsi C aequali, parallelogrammum constituere. exponatur recta linea D E, quae ipsi A sit aequalis. Itaque ad datam rectam lineam D E, & ad datum in ea punctum D, dato angulo rectilineo C aequalis angulus constituatur F D E: ita vt FD sit aequalis ipsi B rectae lineae datae. postea per F ducatur F G parallela ipsi D E, & per E ducatur parallela ipsi D F, quae cum F G in puncto G conueniat. parallelogrammum igitur est F D E G, ex rectis lineis D E D F constitutum, quae datis rectis lineis A B sunt aequales, & angulum continent F D E dato angulo C aequalem. quod facere oportuit.

23 huius.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XLVII.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.



Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens B A C angulum. Dico quadratum descriptum à recta B C æquale esse quadratis, quæ ab ipsis B A A C describuntur. Describatur enim à B C quidem quadratum B D E C, ab ipsis vero B A A C quadrata G B H C, perq; A alterutri ipsarum B D C E parallela ducatur A L; et A D F C iungatur. quoniam igitur vterque angulorum B A C B A G rectus est, ad aliquam rectam lineam B A, et ad datum in ea punctum A duę rectæ lineæ A C A G non ad easdem partes positę, angulos qui deinceps sunt duobus rectis ęquales efficiunt. in directum igitur est C A ipsi A G. eadem
14 huius. ratione, et A B ipsi A H est in directum. Et quoniam angulus D B C est ęqualis angulo F B A, rectus enim vterque est, communis apponatur A B C. totus igitur D B A angulus toti F B C est æqualis. Quòd cum duæ A B B D duabus F B B C ęquales sint, altera alteri, et angulus D B A æqualis angulo F B C; erit
4 huius.
41. huius. et basis A D basi F C æqualis, et A B D triangulum triangulo F B C ęquale. estq; trianguli quidem A B D duplum B L parallelogrammum; basim enim eandem habent B D, et in eisdem B D A L sunt parallelis. trianguli vero F B C duplum est G B quadratum. rursus enim basim habent eandem F B, et in eisdem sunt parallelis F B G C. Quæ autem ęqualium dupla inter se æqualia sunt. ergo æquale est parallelogrammum B L ipsi G B quadrato. Similiter iunctis A E B K, ostendetur etiam C L parallelogrammum æquale quadrato H C. totum igitur D B E C quadratum duobus quadratis G B H C est æquale. et describitur quidem D B E C quadratum à recta linea B C, quadrata vero G B H C ab ipsis B A A C. quadratum igitur B E, a latere BC descriptum ęquale est quadratis, quæ describuntur a lateribus B A A C. ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod describitur à latere rectum angulum

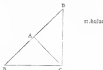
gulum subtendente æquale est quadratis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc theorema ad pythagoram referunt, dicuntq́, eum cum illud inuenisset, bouem immolasse. Quod autem ab Euclide in sexto libro conscribitur multo vniuersalius est. ostendit enim in rectangulis triangulis figuram, quae fit à latere rectum angulum subtendente aequalem esse figuris, quae à lateribus rectum angulum continentibus, priori illi similes, & similiter positae, describuntur.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XLVIII.

Si quadratum, quod describitur ab vno laterum trianguli æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.



Trianguli enim A B C, quod ab vno latere B C describitur quadratum æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus B A A C describuntur. Dico angulum B A C rectum esse. Ducatur enim à puncto A ipsi A C ad rectos angulos A D; ponaturq́; A D ipsi B A æqualis, & D C iungatur. Quoniam igitur D A est æqualis A B, erit et quadratum, quod describitur ex D A, æquale quadrato, quod ex A B. cõmune apponatur quadratum, quod ex A C, ergo quadrata, quæ ex D A A C æqualia sunt quadratis, quæ ex B A A C describuntur. Sed quadratis quidem, quæ ex D A A C, æquale est, quod ex D C quadratum; rectus enim angulus est D A C; (47. huius.) quadratis vero, quæ ex B A A C æquale ponitur quadratum, quod ex B C. quadratum igitur, quod ex D C æquale est ei, quod ex B C quadrato. ergo et latus D C lateri C B est æquale. Et quoniam D A est æqualis A B, communis autem A C, duæ D A A C duabus B A A C æquales sunt; et basis D C est æqualis basi C B. angulus igitur D A C angulo B A C est æqualis. (8. huius.) rectus autem est D A C. ergo et B A C rectus erit. Si igitur quadratum, quod describitur ab vno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Conuertitur hoc theorema praecedenti, & totum toti conuertitur. si enim triangulum rectangulum fuerit, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum aequale est quadratis, quae à reliquis trianguli lateribus describuntur. & si quod ab hoc eis, quae à reliquis aequale fuerit, triangulum rectangulum erit, quippe quòd eum. qui reliquis continetur angulum rectum habeat.

LIBRI PRIMI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

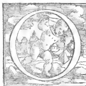
LIBER SECVNDVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.



DIFFINITIO. I.



MNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur duabus rectis lineis, quæ rectum angulum constituunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Quid sit parallelogrammum rectangulum dictum est superius. dicitur autem contineri duabus rectis lineis, quae sunt circa rectum angulum, quoniam ex ductu alterius in alteram prouenit eius rectanguli area, quod non contingit in alijs parallelogrammis, quae rectangula non sint. Sit enim parallelogrammum rectangulum A B C D. & sit, exempli gratia, latus quidem A B pedum trium, latus vero B C quattuor erit totius rectanguli area pedum duodecim quadratorum. At in alijs parallelogrammis area nota efficitur ex area rectangulorum, quae eadem sunt altitudine, & bases, vel easdem, vel aequales habent. Sit parallelogrammum non rectangulum E F G H, cuius basis F G sit pedum quattuor, ducta vero à puncto E ad F G perpendicularis E K sit duorum pedum. producatur K G ad L, ita vt K L sit ipsi F G aequalis, & iungatur H L. erit E K L H parallelogrammum rectangulum. Quare parallelogramma E F G H E K L H cum aequales habeant bases F G K L, sintq; eadem altitudine, hoc est in eisdem parallelis, inter se aequalia sunt: sed parallelogrammi E K L H area est pedum octo. ergo & area parallelogrammi E F G H totidem pedum sit necesse est. Verum parallelogrammi rectanguli aream prouenire ex ductu laterum, quae circa rectum angulum sunt, in præsentia ponatur, quo ad ita esse manifesto apparebit. Demonstratur autem hoc à Ioanne Regiomontano in principio primi libri de triangulis, & à nobis in commentarijs in librum Archimedis de dimensione circuli.





DIFFINITIO II.

Omnis parallelogrammi spacij vnumquodque eorum, quæ circa diametrum ipsius sunt, parallelogrammorum, cum duobus supplementis gnomon vocetur.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Sciendum est gnomonem breuitatis caussa à geometris inuentum fuisse. nomen vero ex accidente impositum est; ab ipso enim forma cognoscitur, vel totius spacij, vel reliqui, cum vel circumponitur, vel aufertur. & in horoscopijs eius officium dumtaxat est præsentes horas notas efficere. supplementa autem dicit, non vt quæ parallelogramma non sint, sed vt non similia toti, complentia vero totius ad ipsum similitudinem.

Gnomon a Geometris breuitatis caussa inuentus.

Gnomonis officium in horoscopijs.

Supplementa.

F. C. COMMENTARIVS.

Quae parallelogramma dicantur proprie circa diametrum consistere, superius dictum est, ut quae se inuicem in puncto contingunt. Sit parallelogrammum ABCD, cuius diameter AC, parallelogramma vero circa diametrum sint AEKH, KGCF: & supplementa BK KD. Itaque duo supplementa vnà cum alterutro parallelogrammorum, quae sunt circa diametrum, gnomon appellatur. & si parallelogrammo quidem GF circumponatur gnomon, reddit totum parallelogrãmum AC simile ipsi GF. Si vero à parallelogrammo AC auferatur gnomõ BFH reliquũ est parallelogrãmũ EH simile toti. Quamobrẽ ab Aristotele dictum est, quadratũ circũposito gnomone creuit quidem, alteratum vero nihil factum est. Illud autem, quod in scholio additur supplementa non esse similia toti, non omnino verum est. fieri enim potest ut quandoque etiam sint similia. Sit parallelogrammum ABCD circa diametrum AC, & secetur AC bifariam in E, perq; E ducatur FG alterutri ipsarum AD BC parallela, & per idem punctum E ducatur HK parallela alterutri ipsarum AB DC. erunt supplementa BE ED similia quidem toti, ipsis vero FH KG parallelogrammis, & similia & aequalia, quod ex ijs, quae in sequentibus tradentur, facile demonstrare possumus.

THEOREMA I. PROPO. I.

Si sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum æquale est eis rectangulis, quæ recta linea insecta, et singulis partibus continentur.

Sint duæ rectæ lineæ A BC; et secta sit BC vtcumque in punctis D E. Dico rectangulum rectis lineis A BC contentum æquale esse rectangulo; quod continetur A BD, et rectangulo, quod A DE, et ei, quod A EC continetur. Ducatur enim à puncto B ipsi BC ad rectos angulos BF: 15 primi atque ipsi A ponatur æqualis BG: et per G quidem ipsi BC parallela ducatur GH; per D E C 3 primi vero ducantur DK EL CH parallelæ ipsi BG. 31 primi rectangulum igitur BH est æquale rectangulis BK DL EH atque est BH quidem, quod A BC continetur; etenim continetur GB BC: et BG ipsi A est æqualis; rectangulum

H autem

autẽ B K est quod continetur ipsis A BD; continetur enim GB BD, quarũ GB est æqualis A. et rectangulum D L est quod continetur A DE, quoniam D K, hoc est B G ipsi A est ęqualis. et similiter rectangulum E H est quod A E C continetur. ergo rectangulum contentum A B C est æquale rectanguloq; contento A BD, et contento A D E, et adhuc contento A E C. Si igitur sint duę rectæ lineę, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcumque partes, rectangulum duabus rectis lineis contentum est æquale eis, quę recta linea insecta, et singulis partibus continentur. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & non nulla his similia demonstrare libuit, quae tum ad alia, tum ad ea, quae in decimo libro traduntur, vtilia erunt.

THEOREMA PRIMVM.

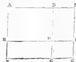
Si fuerint duę rectæ lineæ, quæ secentur in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum est æquale rectangulis, quæ vnaquaque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata continentur.



Sint duae rectae lineae A B B C rectum angulum A B C continentes, & secetur A B quidem in punctis D E, B C vero in punctis F G. dico rectangulum contentum A B B C aequale esse rectangulis, quae singulis ipsarum A D D E E B ad singulas B F F G G C applicatis continentur. completo enim parallelogrammo A B C H, ducantur per D E puncta rectae lineae D K E L, alterutri ipsarum A H B C parallelae; & per F G ducantur F M N O G P Q R parallelae alterutri ipsarum A B H C. erit parallelogrammum A C aequale parallelogrammis A N D M E F O Q N P M G R K Q L P C: & sunt parallelogramma A N D M E F, quae continentur ipsa B F, & singulis partibus rectae lineae A B, videlicet A D D E E B: parallelogramma vero O Q N P M G sunt, quae continentur F G, & singulis partibus A D D E E B: & denique parallelogramma R K Q L P C, quae continetur G C, & singulis partibus eiusdem rectae lineae A B. Si igitur fuerint duae rectae lineae, quae secentur in quotcumque partes, rectangulum duabus rectis lineis contentum est aequale rectangulis, quae vnaquaque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata continentur. quod oportebat demonstrare. [margin: 31. primi]

THEOREMA II.

Si fuerint duę rectæ lineæ, quæ vtcumque secentur; rectangulum totis contentũ vnà cum eo, quod continetur duabus partibus ipsarum est ęquale rectangulis, quæ continentur totis, et dictis partibus vnà cum eo, quod reliquis partibus continetur.



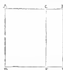
Sint duae rectae lineae A B B C, rectum angulum A B C continentes & secetur A B quidem in puncto D; B C vero in puncto E. Dico rectangulum A B C vnà cum rectangulo contento duabus partibus ipsarum, videlicet D B E C aequale esse & rectangulo contento tota A B, & dicta parte rectae lineae B C, videlicet E C, & contento tota B C, & dicta parte D B vnà cum eo, quod reliquis partibus A D B E continetur. compleatur enim parallelogrammum A B C F, & à puncto D alterutri ipsarum B C A F parallela ducatur D G: à puncto autem E ducatur E H K parallela alterutri ipsarum A B F C. itaque constat rectangulum A B C aequale esse rectangulis A E K C. addatur vtrinque commune rectangulum H C, quod continetur duabus partibus [margin: 31. primi]

D B

D B E C. Rectangulum igitur A B C vnà cum rectangulo H C est aequale tribus rectangulis A E K C, & H C. quorum rectangulum quidem K C est quod continetur tota A B, hoc est K E, & parte E C: rectangulum vero D E vna cum rectangulo H C est quod continetur tota B C, & parte D B: & reliquum A H est quod continetur reliquis partibus A D B E, hoc est A D D H. ergo rectangulum A B C vnà cum rectangulo H C est aequale & rectangulo contento tota A B, & E C, & contento tota B C, & D B vnà cum eo, quod reliquis partibus A D B E continetur. Si igitur duae rectae lineae vtcumque secentur et reliqua, quod oportebat demonstrare. Eodem modo demonstrabitur & in alijs partibus.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si recta linea secta fuerit vtcumque; rectangula quæ tota, et singulis partibus cõtinẽtur æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato.



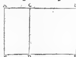
Recta enim linea A B secta sit vtcumque in pũcto C. Dico rectangulum, quod A B B C continetur, vnà cum contento B A A C ęquale esse quadrato, quod fit ex A D. Describatur enim ex A B quadratũ ADEB, et per C ducatur alterutri ipsarum A D B E parallela C F. æquale igitur est A E rectãgulis A F C E. atque est A E quidem quadratum, quod ex A B; A F vero rectangulum cõtentum B A A C; etenim D A A C continetur, quarum A D ipsi A B est ęqualis: et rectangulum C E continetur AB BC, cum B E sit ęqualis AB. ergo rectangulum B A C vnà cum rectangulo A B C æquale est quadrato ex A B. Si igitur recta linea vtcumque secta fuerit, rectangula, quę tota, et singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato. quod demonstrare oportebat. 46.primi. 31.huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter vt superius demonstrabitur, si recta linea secetur in quotcumque partes, quadratum totius lineae aequale esse rectangulis, quae singulis partibus ad singulas applicatis continentur.

THEOREMA. III. PROPOSITO. III.

Si recta linea vtcumque secta fuerit; rectangulum tota, et vna eius parte contentum ęquale est et rectangulo, quod partibus continetur, et ei quod à prædicta parte fit quadrato.



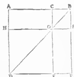
Recta enim linea A B secta sit vtcumque in puncto C. Dico A B C rectangulum ęquale esse rectangulo A C B vnà cum quadrato, quod fit ex B C. Describatur enim ex B C quadratũ C D E B; producaturq; E D in F; et per A alterutri ipsarum C D B E parallela ducatur A F. ęquale vtique erit rectangulũ A E ipsis A D C E: et est A E quidem rectãgulum contentum A B B C; etenim A B B E continetur, quarum B E est æqualis B C: rectangulum vero A D est quod continetur A C C B, cum D C 46.primi. 31.primi.

 ipsi

ipsi C B sit ęqualis:et D B est quadratum,quod fit ex B C.ergo rectangulum A B C est ęquale rectangulo A C B vna cum quadrato quod ex B C. Si igitur recta linea vtcumque secta fuerit; rectangulum tota, et vna eius parte contentum æquale est rectangulo,quod partibus continetur,et ei, quod à prædicta parte fit quadrato.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea secta fuerit vtcumque, quadratum quod fit à tota ęquale erit,et quadratis, quę à partibus fiunt,et ei,quod bis partibus continetur rectangulo.



Recta enim linea A B secta sit vtcumque in C.
Dico quadratum, quod fit ex A B æquale esse, et
quadratis ex A C C B, et ei rectangulo quod bis
A C C B continetur. Describatur enim ex A B
46 primi. quadratum A D E B, iungaturq; B D, et per C
31 primi. quidem alterutri ipsarum A D B E parallela ducatur C G F, per G vero alterutri ipsarum A B D
E ducatur parallela H K. Et quoniam C F est parallela ipsi A D, et in ipsas incidit B D. erit exte-
29 primi rior angulus B G C interiori et opposito A D B
æqualis:angulus autem A D B est ęqualis angulo
5 primi. A B D, quòd et latus B A æquale est lateri A D.
quare C G B angulus angulo G B C est æqualis:
6 primi. ac propterea latus B C lateri C G æquale. Sed et latus C B æquale est lateri G K, et
34 primi. C G ipsi B K.ergo et G K est æquale K B,et C G K B æquilaterum est. dico insuper
etiam rectangulum esse.quoniam enim C H est parallela ipsi B K, et in ipsas incidit
29 primi. C B,anguli K B C G C B duobus rectis sunt æquales.rectus autem est K B C angu-
34 primi lus.Ergo et rectus G C B,et anguli oppositi C G K G K B recti erunt. rectangulũ
igitur est C G K B. Sed ostensum fuit et æquilaterum esse. quadratum igitur est C
G K B,quod quidem fit ex B C.eadem ratione et H F est quadratum, quod fit ex H
G.hoc est ex A C.ergo H F C K ex ipsis A C C B quadrata sunt.et quoniam rectã-
43 primi gulum A G est æquale rectangulo G E, atque est A G quod A C C B continetur,
est enim G C ipsi C B æqualis erit et G E æquale ei, quod continetur A C C B.qua
re rectangula A G G E ęqualia sunt ei quod bis A C C B continetur. Sunt autem
et H F C K quadrata ex A C C B. quattuor igitur H F C K A G G E et quadratis
ex A C C B,et ei quod bis A C C B continetur rectangulo sunt æqualia.Sed H F C
K A G G E sunt totum A D E B quadratum, quod fit ex A B.quadratum igitur ex
A B æquale est,et quadratis ex A C C B, et ei quod bis A C C B continetur rectan
gulo.quare si recta linea vtcumque secta fuerit; quadratum quod fit à tota æquale
erit et quadratis, quę à partibus fiunt,et ei rectangulo, quod bis partibus contine-
tur,atque illud est,quod demonstrare oportebat.

ALITER. Dico quadratum ex A B æquale esse,& quadratis ex A C C B. et ei
rectangulo,quod bis A C C B continetur. quoniam enim in eadem figura æqualis
5 primi. est B A ipsi A D, et angulus A B D angulo A D B æqualis erit:et cum omnis trian
32 primi guli tres anguli duobus rectis sint æquales; erunt trianguli A B D tres anguli A B
D A D B B A D æquales duobus rectis. rectus autem est angulus B A D.ergo reli
qui A B D A D B sunt vni recto æquales, et sunt ęquales inter se se. vterque igitur
ipsorum A B D A D B est recti dimidius. Sed rectus est B C G, æqualis namque est
29 primi. angulo opposito, qui ad A. reliquus igitur C G B dimidius est recti ac propterea C
6 primi G B angulus angulo C B G est ęqualis; et latus B C æquale lateri C G. Sed C B est
æqualis G K,et C G ipsi B K. æquilaterum igitur est C K; et cum habeat rectum an-
gulum C B K,etiam est quadratum,quod quidem fit ex C B.eadem ratione et H E

quadratum

quadratum est, et æquale quadrato quod ex A C. quadrata igitur sunt C K H F, et quadratis ex A C C B ęqualia. Rursus quoniam rectangulum A G est ęquale ipsi G E, atque est A G id quod A C C B continetur, est enim C G ipsi C B æqualis · erit et G E æquale contento A C C B. quare A G G E ęqualia sunt ei, quod bis A C C B continetur. Sunt autem et C K H F ęqualia quadratis ex A C C B. ergo C K H F A G G E æqualia sunt et quadratis ex A C C B, et ei quod bis A C C B cõtinetur. Sed C K H F et A G, G E sunt totum A E, quod fit ex A B quadratum. quadratum igitur ex A B ęquale est, quadratisq́; ex A C C B, et ei quod bis A C C B continetur rectangulo. quod ostendere oportebat. 14 primi. 43 prim.

C O R O L L A R I V M.

Ex hoc perspicue constat in quadratis spacijs parallelogrammis, quæ sunt circa diametrum, quadrata esse.

T H E O R E M A V. P R O P O S I T I O V.

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales, rectangulum inęqualibus totius partibus contentum vnà cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interijcitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato.



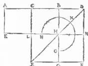
Recta enim linea quædam A B secta sit in partes ęquales ad punctum C, et in partes inæquales ad D. Dico rectangulum contentum A D D B vnà cum quadrato quod fit ex C D æquale esse ei quod ex C B quadrato. Describatur enim ex B C quadratum C E F B · iungaturq́; B E, et per D quidem alterutri ipsarũ C E B F parallela ducatur D H G; per H vero ducatur K L O parallela alterutri ipsarum C B E F et rursus per A ducatur alterutri C L B O parallela A K. Et quoniã C H supplementum æquale est supplemento H F, commune apponatur D O. totum igitur C O toti D F est æquale: sed C O est æquale A L, quoniam et A C ipsi C B. ergo et A L æquale est D F. commune apponatur C H. totum igitur A H ipsis F D D L æquale erit. Sed A H quidẽ est quod A D D B continetur, etenim D H ipsi D B est æqualis: F D D L vero est gnomon M N X. gnomon igitur M N X æqualis est ei, quod A D D B continetur. commune apponatur L G, ęquale scilicet quadrato quod ex C D. ergo M N X gnomon, et L G ęqualia sunt rectangulo, quod continetur A D D B, et ei, quod fit ex C D quadrato. Sed M N X gnomon, et L G sunt totum quadratum C E F B, quod quidem fit ex C B. ergo rectangulum A D B vnà cum quadrato quod ex C D æquale est ei, quod ex C B quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, et in partes inæquales, rectangulum inęqualibus totius partibus cõtẽtum vnà cum quadrato lineę, quæ inter sectiones interijcitur, æquale est ei, quod à dimidia fit quadrato. quod demonstrare oportebat. 46 primi. 31 primi. 43 primi. 36 primi.

T H E O R E M A VI. P R O P O S I T I O. VI.

Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in rectum adijciatur quædam recta linea; rectangulum tota cum adiecta, et adiecta cõtentũ, vnà cum quadrato dimidię, ęquale est quadrato, quod ab ea

quę ex dimidia, et adiecta cōstat tāquā ab vna linea describitur.

Recta enim linea quędam A B secetur bifariam in puncto C, adiciaturq; ipsi in rectum B D. Dico rectangulum A D B vnà
4ª.primi, cū quadrato ex B C æquale esse ei, quod fit
31 primi, ex C D quadrato. Describatur enim ex C D quadratum C E F D, et iungatur D E; perq; B alterutri ipsarum C E D F parallela ducatur B H G. et per H ducatur K L M parallela alterutri ipsarum A D E F. et adhuc per A alterutri C L D M parallela A
36 primi. K. Itaque quoniā A C est æqualis C B, erit
43 primi, et rectangulum A L rectangulo C H æquale. sed C H æquale est H F. ergo et A L ipsi HF æquale erit. commune apponatur C M. totum igitur AM gnomoni N X O est ęquale: atq; est A M, quod A D D B cōtinetur, etenim DM est ęqualis DB. ergo et gnomon NXO ęqualis est rectāgulo ADB. rursus commune apponatur L G, æquale scilicet quadrato, quod ex C B. rectangulum igitur A D B vnà cum quadrato quod ex B C ęquale est gnomoni N X O, et ipsi L G. Sed gnomon N X O, et L G totum sunt C E F D quadratum; quod quidem fit ex C D. ergo rectangulum A D B vnà cum quadrato ex B C æquale est ei, quod fit ex C D quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, adiciaturq; ipsi in rectum quædam recta linea, rectangulum tota cum adiecta, et adiecta contentum vnà cum quadrato dimidiæ æquale est quadrato, quod ab ea, quę ex dimidia, et adiecta constat, tamquàm ab vna linea describitur. quod oportebat demonstrare.



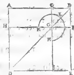
SCHOLIVM.

In hoc ostenditur arithmetica anologia. quo enim A D superat D C, videlicet ipsa C B, eo & C D superat D B. quod per numeros manifestius cognoscitur, cum medius semper æqualiter & excedatur, & excedat. Theorema autem est. Quadratum quod fit ab excessu vnà cum eo, quod extremis continetur, quadrato medij æquale esse.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si recta linea vtcumque secta fuerit, quæ à tota, et vna parte fiunt vtraque quadrata ęqualia sunt, et rectangulo, quod bis tota, ac dicta parte continetur, et ei, quòd à reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quædam A B secta sit vtcum-
46 primi, que in pūcto C. Dico quadrata ex A B B C ęqualia esse et rectangulo, quod bis A B B C contine-
43 primi, tur, et ei quod fit ex A C quadrato. Describatur enim ex A B quadratum A D E B, et figura construatur. itaque quoniam A G rectangulū æquale est rectangulo G E. commune apponatur C F. quare totum A F toti C E est æquale, rectangula igitur A F C E dupla sunt rectanguli A F Sed A F C E sunt K L M gnomon, et quadratum C F. ergo K L M gnomon, et quadratū C F dupla erūt rectanguli A F. est autem id quod bis A B B C continetur duplum ipsius A F; etenim B F est



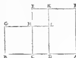
æqualis

æqualis BC. gnomon igitur KLM, et quadratum CF æqualia sunt ei, quod bis AB BC continetur. commune apponatur DG, quod est ex AC quadratum. Ergo gnomon KLM, et quadrata BG GD ęqualia sunt ei, quod bis AB BC continetur, et quadrato ex AC. at gnomon KLM, et quadrata BG GD totum sunt ADEB, et CF; quæ sunt ex AB BC quadrata. quadrata igitur ex AB BC ęqualia sunt rectãgulo, quod bis AB BC cõtinetur vna cum eo, quod fit ex AC quadrato. ergo si recta linea vtcumque secta fuerit; quæ à tota, et vna parte fiunt vtraque quadrata æqualia sunt rectanguloq;, quod bis tota, ac dicta parte continetur, et ei, quod à reliqua parte fit, quadrato, quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Non alienum esse videtur hoc loco apponere theorema, quod etiam in commentarijs in Apollonij pergei conica demonstrauimus: eo enim ad sequentia vtemur.

Si recta linea in partes inęquales secetur; earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur vnà cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

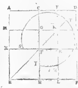


Secetur recta linea AB in partes inęquales in C ita vt AC maior sit quàm CB; & ipsi CB aequalis ponatur AD. Dico quadrata ex AC CB aequalia esse rectangulo, quod bis ACB continetur vnà cum quadrato rectae lineae DC, qua scilicet AC ipsam CB superat. constituantur enim ex AC CB quadrata ACEF CBGH: & per D ducta linea DK, ipsi CE parallela, producatur GH, vt secet DK in L. Itaque quoniam AD est aequalis CB, addita vtrique communi DC; erit DB ipsi AC aequalis. Sed GL est aequalis BD, & CE aequalis AC. ergo & GL ipsi CE aequalis erit. est autem & CH aequalis HG. reliqua igitur EH reliquæ HL est aequalis: ideoq; KH est quadratum, quod à linea KE, hoc est DC describitur. rectangula vero AK DG sunt quae continentur lineis AC CB; etenim AD est aequalis BC, & DB ipsi AC. quadrata igitur ex AC CB aequalia sunt rectangulo, quod bis AC CB continetur vnà cum ipsius DC quadrato. Si igitur recta linea in partes inęquales secetur, earum partium quadrata aequalia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur vnà cum quadrato eius lineae, qua maior pars superat minorem, quod demonstrare oportebat.

46 primi.
31 primi.
34 primi.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si recta linea vtcumque secta fuerit; et quod quater tota, et vna parte continetur rectangulum vnà cum quadrato reliquę partis ęquale est quadrato, quod ex tota, et dicta parte tamquam ex vna linea describitur.



Recta enim linea AB secta sit utcumque in C. Dico rectangulum quater AB BC contẽtum vnà cum quadrato quod ex AC æquale esse quadrato, quod ex AB BC, tamquam ex vna linea describitur. Producatur enim recta linea AB in D, et ipsi CB ponatur æqualis BD; describaturq; ex AD quadratum AEFD; et dupla figura construatur. Quoniam igitur CB est æqualis BD, atque est CB ipsi GK ęqualis; BD vero ipsi KN: erit et GK ęqualis KN. eadem ratione et PR ipsi RO est æqualis. et quoniam CB est ęqualis BD, et GK ipsi KN; erit rectangulum 34 primi.

36 primi.

quidem

43 primi. quidem CK rectangulo KD; rectãgulũ vero GR ipsi RN ęquale. Sed CK est æquale RN, supplemẽta enim sunt parallelogrãmi CO. ergo et KD æquale est GR, et quattuor rectãgula DK KC GR RN inter se æqualia; ideoq; quadrupla sunt rectãguli CK. Rursus quoniã CB est ęqualis BD, et BD quidẽ ipsi BK, hoc est ipsi CG æqualis; CB vero ipsi GK, hoc est GP: erit et CG æqualis GP. est autem et PR ipsi RO æqualis. rectangulum igitur AG rectangulo MP, et rectangulum PL ipsi RF æquale erit.
43 primi. Sed MP est æquale PL; supplementa enim sunt ML parallelogrammi. quare et AG ipsi RF est æquale. quattuor igitur AG MP PL RF inter se æqualia sunt. ac propterea ipsius AG quadrupla. Ostensum autem est et quattuor CK KD GR RN quadrupla esse CK. quare octo continentia gnomonem STY ipsius AK quadrupla sunt. et quoniam AK est quod AB BC continetur; etenim BK est æqualis BC; erit contentum quater AB BC ipsius AK quadruplum. At demonstratus est gnomon STY quadruplus AK. quod igitur quater AB BC continetur ęquale est gnomoni STY. commune apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC est æquale. ergo quod quater AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC ęquale est ipsi STY gnomoni, et quadrato XH. Sed STY gnomon, et YH totum sunt AEFD quadratum, quod describitur ex AD. rectangulum igitur quater AB BC contentum vnà cum quadrato ex AC æquale est ei, quod ex AD, hoc est ex AB BC tamquam ex vna linea describitur, quadrato. ergo si recta linea vtcumque secta fuerit; quod quater tota, et vna parte continetur rectangulum, vnà cum quadrato reliquę partis æquale est quadrato, quod ex tota, et dicta parte tamquam ex vna linea describitur. quod ostendendum fuerat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si recta linea in partes ęquales, et in partes inęquales secta fuerit, quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt et quadrati dimidiæ, et quadrati lineæ eius, quę inter sectiones interijcitur.



Recta enim linea quędam AB secta sit in partes ęquales ad C, et in partes inęquales ad D. Dico quadrata ex AD DB, quadratorum ex AC
11 primi. CD dupla esse. Ducatur enim à puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE, et vtrique ipsarum AC CB ęqualis ponatur, iunganturq; EA EB.
31. primi. ac per D quidem ipsi CE parallela ducatur DF; per F vero ipsi AB parallela FG, et AF iungatur.
5. primi. 32. primi tur. itaque quoniam AC est ęqualis CE; erit et angulus EAC angulo AEC ęqualis. Et cum rectus sit angulus ad C, reliqui AEC, EAC vni recto ęquales erunt. et sunt æquales inter se. vterque igitur ipsorum AEC EAC recti est dimidius. eadem ratione et recti dimidius est vterque ipsorum CEB EBC. ergo totus angulus AEB rectus est. et quoniam angulus GEF dimidius
29 primi. est recti, rectus autem EGF; ęqualis enim est interiori, et opposito ECB; erit et re-
6 primi. liquus EFG recti dimidius: æqualis igitur est GEF angulus ipsi EFG. quare et latus EG lateri GF est ęquale. rursus quoniam angulus ad B dimidius est recti, rectus autem FDB, quòd sit æqualis interiori, et opposito ECB; reliquus BFD recti erit dimidius. angulus igitur ad B æqualis est angulo DFB; ideoq; latus DF lateri DB æquale. et quoniam AC est æqualis CE, erit et ex AC quadratum æquale quadrato ex CE. quadrata igitur ex AC CE dupla sunt quadrati ex AC. quadratis autem ex
41. primi. AC CE ęquale est quadratum ex EA, siquidem rectus est angulus ACE. ergo quadratum ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam EG æqualis est GF; et quadratũ ex EG quadrato ex GF est æquale. quadrata igitur ex EG GF dupla sunt quadrati ex GF, at quadratis ex EG GF æquale est quod ex EF quadratum. Ergo

quadratum

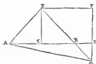
quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. ęqualis autem est GF ipsi CD. quadratum igitur ex EF duplum est quadrati ex CD. Sed et quadratum ex AE quadrati ex AC est duplum. ergo quadrata ex AE EF dupla sunt quadratorũ ex AC CD. quadratis vero ex AE EF æquale est ex AF quadratum; quoniam angulus AEF rectus est. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC CD est duplum. Sed quadrato ex AF ęqualia sunt ex AD DF quadrata. rectus enim est angulus qui ad D. ergo ex AD DF quadrata dupla sunt quadratorum ex AC CD. est autem DF ipsi DB æqualis. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, et in partes inęquales secta fuerit, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata dupla sunt, et quadrati dimidię, et quadrati lineæ eius, quæ inter sectiones intercicitur. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Possumus etiam illud aliter demonstrare hoc modo. Iisdem enim positis quoniam recta linea A B secatur in partes æquales ad punctum C, et in partes inęquales ad D; erit DB recta linea, qua A C ipsam C D superat. Ergo ex ijs, quę demonstrauimus ad septimam huius, quadrata ex A C C D æqualia sunt, & rectangulo, quod bis A C C D continetur, & ipsius D B quadrato: ideoq́ quadrata ex A C C D unà cum rectangulo, quod bis A C C D continetur, & quadrato ipsius DB, dupla sunt quadratorũ ex A C C D. Sed quadratum ex A D est æquale quadratis ex A C C D, & rectangulo bis A C C D contento. quadrata igitur ex A D D B quadratorum ex A C C D sunt dupla. quod oportebat demonstrare. 4 huius.

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

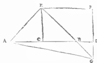
Si recta linea secetur bifariam, et ipsi in rectum quædam recta linea adijciatur; quæ à tota cum adiecta, et adiecta fiunt vtraque quadrata dupla sunt, et quadrati dimidię, et quadrati, quod ab ea quæ ex dimidia, et adiecta constat, tamquam ab vna linea describitur.



Recta enim linea A B secetur bifariam in C, et ipsi in rectum adiiciatur quędam recta linea B D. Dico quadrata ex ad D B quadratorum ex A C C D dupla esse. ducatur enim à puncto C ipsi A B ad rectos angulos C E, et vtrique ipsarum A C C B æqualis ponatur; iunganturq́; A E E B: et per E quidem ipsi A D parallela ducatur EF; per D vero ducatur D F parallela ipsi C E. et quoniã in parallelas E C F D 11 primi. 31 primi.

recta quædam linea E F incidit, anguli C E F E F D ęquales sunt duobus rectis. anguli igitur F E B E F D duobus rectis sunt minores. quæ autem à minoribus, quàm sint duo recti in infinitum producuntur, conueniunt inter se se. Ergo E B F D productæ ad partes B D conuenient; producantur, et conueniant in puncto G, et A G iungatur. itaque quoniam A C est æqualis C E, et angulus A E C angulo E A C æqualis erit: atque est rectus qui ad C. vterque igitur ipsorum E A C A E C est recti dimidius. eadem ratione et recti dimidius est vterque C E B E B C. ergo A E B est rectus. et quoniam E B C est dimidius recti; erit et recti dimidius D B G; cum sit aduerticem. Sed et B D G rectus est; etenim est æqualis ipsi D C E alterno. reliquus igitur D G B dimidius est recti, et ob id ipsi D B G ęqualis. ergo et latus B D ęquale lateri D G. rursus quoniam E G F est dimidius recti, rectus autem, qui ad F, est 29 primi. Ex demonstratis ad 29 primi. 5 primi. 32 primi. 15 primi. 29 primi.

I enim



enim angulo opposito qui ad C ęqualis; erit et reliquus FEG recti dimidius, et æqualis ipsi EGF. quare et latus GF lateri EF est ęquale. et cũ EC sit ęqualis CA; et quadratũ ex EC ęquale est ei, quod ex CA, quadrato. ergo quadrata ex EC CA dupla sũt quadrati ex CA. quadratis aũt ex EC CA ęquale est quadratũ ex EA. quadratũ igitur ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniã GF est ęqualis FE, æquale est et ex GF quadratũ quadrato ex FE. quadrata igitur ex GF FE quadrati ex EF sũt dupla. at quadratis ex GF FE æquale est, quod ex EG quadratũ. ergo quadratũ ex EG duplum est quadrati ex EF æqualis aũt est EF ipsi CD. quadratũ igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. Sed ostensum est quadratũ ex EA duplum quadrati ex AC. ergo ex AE EG quadrata quadratorũ ex AC CD sũt dupla. quadratis vero ex AE EG æquale est quod ex AG quadratum. quadratum igitur ex AG duplũ est quadratorũ ex AC CD. at quadrato ex AG æqualia sunt ex AD DG quadrata. ergo quadrata ex AD DG sunt dupla quadratorum ex AC CD. Sed DG est æqualis DB. quadrata igitur ex AD DB quadratorũ ex AC CD sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, et ipsi in rectũ quædam recta linea adiiciatur; quę à tota cũ adiecta, et adiecta fiunt vtraque quadrata dupla sunt, et quadrati dimidię, et quadrati, quod ab ea, quæ ex dimidia, et adiecta constat tamquam ab vna linea describitur. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

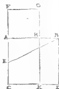
Hoc quoque aliter demonstrabimus.

Quoniam enim recta linea AB secatur bifariam in C, & ipsi adiicitur BD, erit BD linea, qua DC ipsam CA superat quare ex demõstratis ad septimã huius quadrata ex AC CD aequalia sunt rectangulo, quod bis continetur AC CD, & quadrato ipsius BD. ergo quadrata ex AC CD vnà cum rectangulo, quod bis AC CD cõtinetur, & ipsius BD quadrato dupla sunt quadratorum ex AC CD. at quadratum ex AD est aequale quadratis ex AC CD, & rectangulo bis AC CD contento quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. quod demonstrare oportuit.

PROBLEMA I. PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineã secare, ita vt quod tota, et altera parte cõtinetur rectãgulũ ęquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato.

Sit data recta linea AB. oportet ipsam AB ita secare, vt quod tota, et altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Describatur enim ex AB quadratum ABCD: seceturq; AC bifariam in E, et BE iungatur: deinde producta CA in F, ponatur ipsi BE ęqualis EF: describaturq; ex AE quadratum FGHA: et GH ad K producatur. Dico AB sectam esse in H, ita vt ABH rectangulum æquale sit quadrato ex AH. Quoniam enim recta linea AC bifariam secatur in E, adiiciturq; ipsi in rectum AF, rectãgulum CFA vnà cum quadrato ex AE ęquale erit quadrato ex EF. Sed EF est æqualis EB. rectangulum igitur CFA vnà cum quadrato ex AE æquale est ei, quod fit ex EB, quadrato. quadrato autem ex EB æqualia sunt quadrata ex BA AE etenim angulus ad A rectus est. ergo rectangulum CFA vnà cum quadrato ex AE æquale est quadratis ex BA AE. commune auferatur, quod ex AE quadratum. reliquum igitur rectangulum



6 huius.
47 primi.

lum

lum CF A æquale est quadrato ex A B. est autem CF A quidem rectangulum F K. siquidem A F est æqualis F G quadratum autem ex A B est ipsum A D. rectangulum igitur F K æquale est quadrato A D. commune auferatur A K. ergo reliquum F H reliquo H D est æquale. atque est H D rectangulum A B H, cum A B sit æqualis B D, et F H est quadratum ex A H. rectangulum igitur A B H quadrato ex A H æquale erit. quare data recta linea A B secta est in H, ita vt A B H rectangulum quadrato ex A H sit æquale. quod facere oportebat.

SCHOLIVM.

Ex hoc constat geometricam esse analogiam. quoniam enim A B secta est in H, & quod A B B H continetur quadrato A H est æquale. hoc autem soli geometricæ accidit medietati. Hanc in sequentibus extrema, ac media ratione secari dicit. nunc autem, quoniam de proportione nihil traditum est, non dicit extrema, ac media ratione secari.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XII.

In obtusiangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum maius est quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protracta perpendicularis cadit, et linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusiangulum triangulum A B C. obtusum angulum habens B A C: et ducatur à puncto B ad C A protractam perpendicularis B D. Dico quadratum ex B C maius esse, quàm quadrata ex B A AC, rectangulo, quod bis C A A D continetur. Quoniam enim recta linea C D secta est vtcumque in puncto A, erit quadratum ex C D æquale, et quadratis ex C A A D, et ei quod bis C A A D continetur rectangulo. com- 12 primi. 4 huius.
mune apponatur ex D B quadratum. quadrata igitur ex C D D B æqualia sunt et quadratis ex C A A D D B, et rectangulo, quod bis C A A D continetur. Sed quadratis ex C D D B æquale est quadratum ex C B. rectus enim est angulus ad D, cum sit B D perpendicularis. quadratis vero ex A D D B æquale est quadratum ex A B. quadratum igitur ex C B æquale est et quadratis ex C A A B, et rectangulo bis C A A D contento. Ergo quadratum ex C B maius est, quàm quadrata ex C A A B, rectangulo quod bis C A A D continetur. In obtusiangulis igitur triangulis, quadratum, quod à latere obtusum angulum subtendente fit, maius est quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, ad quod protractum perpendicularis cadit, et linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum. quod demonstrare oportebat. 47 primi.

F. C. COMMENTARIVS.

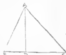
Ex iis, quæ in hoc theoremate demõstrata sunt possumus cuiuslibet trianguli; obtusum angulum habentis aream dimetiri.



Sit triangulum obtusiangulum A B C, habens angulum A C B obtusum, sitq́; latus AB exempli gratia pedum viginti, B C octo, & C A sexdecim: & à puncto A ad B C protractam ducatur perpendicularis A D. Primum igitur quanta sit linea C D, quae adiungitur lateri, in quod perpendicularis cadit, hoc modo comperiemus. Quadrata vtrorumq́; laterum AC C B, quae fiunt circa obtusum angulum simul sumpta à quadrato lateris A B, quod obtuso angulo subtenditur, detrahemus, & quod reliquum fuerit, diuidemus per duplum lateris BC. ex hac enim diuisione prouenit linea, quam quęrimus. est autem quadratum lateris A C 256, & quadratum ipsius B C 64, quae simul sumpta faciunt 320. demptis igitur 320 à 400, quod est quadratum lateris A B, relinquuntur 80, atque his diuisis per 16, videlicet per duplum ipsius B C prodibunt 5, & tot pedum erit 47.primi. *linea C D. Itaque quoniam triangulum A C D rectangulum est, quadratum lateris A C aequale erit quadratis, quae fiunt ex C D D A. quare dempto quadrato lineae C D, quod est 25 à quadrato ipsius A C 256, reliquum erit quadratum perpendicularis A D, quod est 231, cuius latus AD est $15\frac{1}{5}$ proximè. Quomodo autem numeri non quadrati propinquum latus inuenatur, docuimus in nostris commentarijs in librum Archimedis de circuli dimensione. Vt igitur trianguli A B C aream habeamus, secetur B D bifariam in puncto E, & ab eo ducatur E F ipsi D A parallela; rursusq́; à puncto A ducatur parallela ipsi D B, & conueniens cum E F in F puncto. Erit parallelogrammum rectangulum A D E F aequale triangulo A B D: vtrunque enim dimidium est parallelogrammi, cuius basis est B D, & altitudo eadem A D. Ergo ducta E D, quae est $6\frac{1}{2}$ in AD $15\frac{1}{5}$ prouenıet area rectanguli A D E F, & ob id etiam A B D trianguli $98\frac{4}{5}$ pedum quadratorum. Eadem ratione inuenietur area trianguli A C D esse eius modi pedum 38. Quare demptis 38 à $98\frac{4}{5}$ relinquentur $60\frac{4}{5}$ proximè, pro area trianguli A B C, quam nobis inquirendam proposuimus.*

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XIII.

In acutiangulis triangulis, quod à latere acutum angulum subtendente fit quadratum minus est, quàm quadrata, quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpēdicularis cadit, et linea à perpēdiculari intus assumpta ad angulũ acutũ.



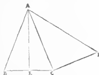
Sit acutiangulum triangulum A B C acutum ha- 12.primi, bens angulum ad B et ducatur à puncto A ad B C perpendicularis A D. Dico quadratum, quod fit ex A C minus esse, quàm quadrata, quę ex C B B A, rectangulo, quod bis C B B D continetur. Quoniam 7.huius, enim recta linea C B secta est vtcumque in D, erũt quadrata ex C B C D æqualia, et rectangulo quod bis C B B D continetur, et quadrato ex D C. commune apponatur quod ex A D quadratum. quadrata igitur ex C B B D D A æqualia sunt, et rectangulo bis C B B D contento. 47.primi, et quadratis ex A D D C. Sed quadratis ex B D D A ęquale est quod ex A B quadratum; rectus enim angulus est qui ad D. quadratis vero ex A D D C ęquale est quadratum ex A C. quadrata igitur ex C B B A sunt æqualia quadrato ex A C, et ei quod bis C B B D continetur, rectangulo. quare solum quadratum ex A C minus est quàm quadrata ex C B B A rectangulo, quod bis C B B D continetur. In acutiangulis igitur triangulis quadratum, quod à latere acutum angulum subtēdēte fit, minus est quàm quadrata, quæ fiunt a lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis vno laterum, quę sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutũ. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM

SCHOLIUM.

Quoniam in diffinitionibus dixit Acutiangulum triangulum esse, quod tres acutos angulos habet, sciendum est hoc loco non ita dicere, sed triangula omnia appellare acutiangula, propterea quod omnia angulum habent acutum, & quamquam non omnes acutos, vnum tamen habent. propositio igitur huiusmodi est. Omnis trianguli latus, quod acutum subtendit angulum, minus potest, quàm latera acutum angulum continentia, rectangulo contento bis vno laterum, & reliqua quæ sequuntur. Itaque si rectangulũ sit triangulum ex lateribus acutum angulum contimentibus accipiemus illud, quod recto angulo subtenditur, vt in ipsum perpendicularis cadat. & similiter faciemus, si obtusiangulum sit. Conuersum vero theorematis est hoc.

Sit quadratũ ex AB minus quàm quadrata ex BC CA, eo, quod bis BC CE cõtinetur, et reliqua deinceps; atque à pũcto C ipsi CA ad rectos angulos ducatur CD, quæ ipsi CB sit ęqualis. ergo quadrata ex BC CA ęqualia sunt quadratis ex DC CA. Sed quadratis ex BC CA minus est quadratum ex AB. ergo & quadratis ex DC CA minus erit. quadratis autem ex DC CA æquale est quadratum ex DA. quadratum igitur ex DA quadrato ex AB maius, et ipsa DA maior, quàm AB. Itaque quoniam duæ



47 primi.

DC CA duabus BC CA æquales sunt, et basis DA maior basi AB, erit et angulus DCA angulo ACB maior. rectus autem est DCA. ergo ACB acutus erit. quod oportebat demonstrare. 25 primi

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc non solum in triangulis acutiangulis verum est, sed etiam in obtusiangulis, & rectangulis, quæ duos angulos necessariò habent acutos. Quare dicemus præsens theorema tres habere casus, vel enim ducta perpendiculari AD, punctum D cadit inter BC, vel extra, vel in ipsum C, ita vt AD sit eadem, quae AC. Euclidis demonstratio congruit primo casui in triangulis, quae acutiangula dicuntur; in alijs autem si modo perpendicularis cadat in latus, quod angulo recto, vel obtuso subtenditur. At si cadat in alterum latus eorum, quae acutis angulis subtenduntur, nihilominus idem sequetur, vt demonstrabimus.

Sit obtusiangulum triangulum ABC, obtusum habens ACB angulum, et ducatur à puncto A ad BC protractam perpendicularis AD. Dico quadratum, quod fit ex AC, acutum angulum ABC subtendente minus esse. quàm quadrata, quæ ex AB BC fiunt, rectangulo, quod bis CB BD continetur.

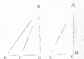


Quoniam enim ABD triangulum rectangulum est, quadratum, quod fit ex AB aequale est quadratis, que ex BD DA. commune addatur quadratũ ex BC. ergo quadrata ex AB BC aequalia sunt quadratis ex BD DA BC. Sed quadrato ex BD

aequalia

aequalia sunt quadrata ex BC CD vnà cum rectangulo, quod bis BC CD continetur. quadratis autem ex CD DA quadratum ex AC est aequale. Quadrata igitur ex AB BC aequalia sunt quadrato ex AC, & duplo quadrati, quod ex BC vna cum rectangulo, quod bis BC CD continetur. Sed quadrata ex BC, et rectangulo, quod BC CD continetur aequale est rectangulum CBD, ac propterea duplo quadrati ex BC, & rectangulo, quod bis continetur BC CD aequale est rectangulum, quod bis CB BD continetur. ergo quadrata ex AB BC aequalia sunt, quadrato ex AC vnà cum rectangulo, quod bis continetur CB BD. Quadratum igitur ex AC minus est, quàm quadrata ex AB BC, rectangulo, quod bis CB BD continetur.

Sit triangulum rectangulum ABC rectum angulum habens ACB. Dico quadratum lateris AC, quod acutum angulum ABC subtendit minus esse, quàm quadrata ex AB BC, rectangulo, quod bis CB BD continetur.



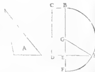
Quoniam enim triangulum rectangulum est, erit perpendicularis AD eadem, quae latus trianguli AC, & punctum D idem, quod C quadratum vero, quod fit ex AB aequale quadratis ex BC CA. commune addatur quadratum ex BC. Ergo quadrata ex AB BC equalia sunt quadrato ex AC, & duplo quadrati eius, quod fit ex BC. hoc est rectangulo, quod bis continetur CB BD. Quadratũ igitur ex AC minus est quàm quadrata ex AB BC rectangulo, quod bis CB BD continetur. quod demonstrare oportebat.

Ex proxime demonstratis licebit cuiusque trianguli, siue acutianguli, siue rectanguli, siue obtusianguli quod nota latera habeat, aream inuenire.



Sit triangulum ABC habens angulos ad BC acutos, & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD, quae inter BC necessario cadet. Sit autem latus AB pedum 13, BC 14, & CA 15. Itaque primum quadratum lateris AC, quod angulo acuto B subtenditur, à quadratis reliquorum laterum AB BC simul iunctis auferemus, & quod relinquitur, diuidemus per duplum lateris BC, in quod perpendicularis cadit; & prouenit recta linea BD, quae à perpendiculari intus assumitur ad angulum acutum. Deinde à quadrato lateris AB, quod subtenditur angulo ADB recto, auferemus quadratum ipsius BD, et eius, quod prouenerit quadrati latus erit perpendicularis AD magnitudo, ex qua denique totius ABC trianguli area nota efficietur. Quadratum igitur lateris AC est 225. quadratum vero ipsius AB 169, & quadratum BC 196, quae duo simul iuncta faciunt 365. ergo sublatis 225 à 365 relinquentur 140: atque his per 28 diuisis prouenient 5; ac propterea BD erit pedum quinque. Rursus si a quadrato lateris AB, hoc est à 169 auferatur quadratum BD, quod est 25, relinquẽtur 144, cuius quadrati latus est 12. ergo perpendicularis AD duodecim pedum erit. Itaque ductis 12 in basis BC dimidium, videlicet in 7 producentur 88, et totidem pedum quadratorum erit area trianguli ABC, quam à principio querebamus.

PROBLEMA II. ROPOSITIO XIIII.



Dato rectilineo ęquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A. oportet ipsi A rectilineo ęquale quadratum constituere. constituatur rectilineo A ęquale parallelogrammum rectangulum BCDE. Si igitur BE est æqualis ED factum iam erit, quod proponebatur, etenim rectilineo A æquale quadratum cõstitutum est BD: sin minus, vna ipsarum BE ED maior est. sit BE maior; et producatur ad F, ponaturq; ipsi ED ęqualis EF. deinde secta FB bifariã in G, centro

45 primi.

centro quidem G, interuallo autem vna ipsarum GB GF semicirculus describatur BHF, producaturq; DE in H, et GH iúgatur. quoniã igitur recta linea BF secta est in partes ęquales ad G, et inæquales ad E; erit rectangulum BEF vna cum quadrato, quod fit ex EG æquale quadrato ex GF. est autem GF æqualis GH rectangulum igitur BEF vna cum quadrato ex GE æquale est quadrato ex GH. Sed quadrato ex GH ęqualia sunt ex HE EG quadrata. ergo rectangulum BEF vna cum quadrato ex EG æquale est quadratis ex HE EG. commune auferatur ex EG quadratum. reliquum igitur rectangulum BEF est æquale quadrato ex EH. Sed rectãgulum BEF est ipsum BD parallelogrammum, quoniam EF est æqualis ED. ergo BD parallelogrammũ quadrato ex EH est ęquale. parallelogrammum autem BD est ęquale rectilineo A. rectilineum igitur A quadrato ex EH descripto æquale erit. quare dato rectilineo A æquale quadratum constitutum est, quod videlicet ex ipsa EH describitur. quod facere oportebat. 5 huius

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc problemate multo vniuersalius est, quod in sexto libro demonstratur, nempe. Dato rectilineo simile, et alteri dato æquale idem constituere.

LIBRI SECVNDI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER TERTIVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.



SCHOLIVM.

Propositum Euclidi est hoc loco tractare de ijs, quæ circulis accidunt cum ad rectas lineas, & ad angulos comparantur.

DIFFINITIONES.

I.



EQVALES circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum quæ ex centris sunt æquales.



II.

Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, et producta ipsum non secat.



III.

Circuli contingere se se dicũtur, qui contingentes se ipsos non secant.



Incirculo

IIII.

In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpédiculares ductę sūt ęquales.



V.

Magis autem distare à centro dicitur ea, ad quam maior perpendicularis cadit.

VI.

Portio circuli est figura, quę recta linea, et circuli circumferētia continetur.



VII.

Portionis autē angulus est, qui recta linea, et circuli circūferentia cōprehēditur.



VIII.

In portione angulus est, quando in circū ferentia portionis sumatur aliquod punctum, atque ab ipso ad terminos lineæ eius, quæ basis est portionis, rectę lineæ ducantur, angulus vero ductis lineis sit cōtentus.



IX.

Quando autem continentes angulum rectæ lineæ assumunt circumferentiam, in illa consistere angulus dicitur.

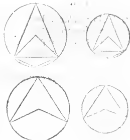


X.

Sector circuli est, quando angulus ad centrum cōstiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, et circumferentia ab ipsis assumpta.



X I.



Similes circulorum portiones sunt, quæ angulos suscipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales consistunt.

X I I.

A FED. C O M M A N.

A D D I T A.

Similes circumferentiæ circulorum sunt, in quibus anguli consistunt æquales.

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

Dati circuli centrum inuenire.



S t datus circulus A B C. oportet circuli A B C centrum inuenire. ducatur in ipso quędam recta linea AB vtcũque, et in puncto D bifariam secetur. à puncto autem D ipsi AB ad rectos angulos ducta DC in E producatur; et secetur CE bifariam in F. Dico punctum F circuli A B C centrum esse. Non enim, sed si fieri potest, sit G, et GA GD GB iungantur. itaque quoniam AD est æqualis DB, communis autem DG, erunt duæ AD DG duabus GD DB ęquales, altera alteri: et basis G A ęqualis est basi G B. sunt enim ex centro G. angulus igitur ADG angulo GDB est ęqualis. Cum autem recta linea super rectam lineam insistens, angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est vterque æqualium angulorum. ergo angulus GDB est rectus. Sed et rectus F D B. ęqualis igitur est angulus FDB angulo G D B, maior minori, quod fieri non potest. quare G non est circuli ABC centrum. Similiter ostendemus neque aliud esse, præter ipsum F. ergo F centrum est circuli ABC. quod facere oportebat.

> 10 primi.
> 11. primi.
> 8. primi.
> Axioma 15 primi.
> 8. primi.
> diffi. 10. pri.

C O R O L L A R I V M.

Ex hoc perspicuum est, si in circulo quędam recta linea rectam lineam quandam bifariam, et ad angulos rectos secet, in secante circuli centrum inesse.

S C H O L I V M.

> Conuersum diffinitionis circuli.

Ex theoremate ostenditur conuersum diffinitionis circuli. Si enim in ambitum figuræ ab aliquo puncto eorum, quæ sunt intra, incidant æquales rectæ lineæ, ea circulus est.

Non enim,sed si fieri potest,sit rectilineum, et sit aliquod ipsius latus, in quod incidant duæ rectæ lineę ipsum determinantes.erit igitur æquicrure triangulum: atque eius basi bifariam secta, si ducatur recta linea rectos angulos faciet, et vtroque latere trianguli minor erit. quod est absurdum, ponitur enim omnes rectæ lineæ, quæ incidũt,æquales esse.



A L I V D.

Quemadmodum in primo libro figurarum elementarium triangulorum dico,eam,quæ maxime elementaris est,triangulum videlicet æquilaterum in factionẽ initio proposuit, ob constructiones earum, quæ deinceps sunt,demonstrationum, ita & hoc loco centrum inuenire proponit. hoc enim circuli ipsius ortus caussa est.

Triangulum æquilaterum figura maxime elementaris est.

Cẽtrum, circuli ipsius ortus caussa est.

A L I V D.

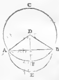
Omnis quidem circulus habet proprium centrum natura determinatum;quatenus vero ad nos pertinet, non omnis,sed is tantum, cuius ortum videmus. In prioribus igitur theorematibus, tamquam factus iam circulis,etiam centra manifesta sunt.at in his cum quæratur substantia, centrum etiam quæritur : quod quidem substantiam circuli complet. hoc autem primum,vt inquiunt,inter problemata,et theoremata mediũ est. Quatenus enim quærere, etiam aliquo modo facere proponit ; quatenus vero non in factionem,sed in inuentionem, ob id proponit contemplari. Itaque mihi videtur formatam habens propositionem theorema esse, vt si de quarto quis dixerit. Duorum triangulorum, quorum duo latera æqualia sunt, & anguli, inuenire si bases sint æquales. quemadmodum enim illic symptoma quoddam inquirit, quod duorum triangulorum naturæ inest,ita & hoc loco, quod inest naturæ circuli. At si problematis proprium, & contrarium propositioni suscipit, multo magis quod propositum est problematis denominationem effugiet.

Cẽtrum substantiam circuli cõplet.

Inter proble[illegible], ac th[illegible]mata medium.

THEOREMA I. PROPOSITIO. II.

Si in circumferentia circuli, duo quęuis puncta sumantur; quæ ipsa coniungit recta linea intra circulum cadet.



Sit circulus ABC, et in circumferentia ipsius sumantur duo quęuis puncta AB. Dico rectam lineam,quæ a puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. non enim ; sed si fieri potest, cadat extra, vt AEB, et sumpto circuli ABC centro,quod sit D, iungantur DA DB,et producatur DF in E. Quoniam igitur DA est æqualis DB ; erit et angulus DAE angulo DBE æqualis:et quoniam trianguli DAE vnũ

Ex antecedente.

5.primi.

16 primi. latus AEB protéditur, angulus DEB anguloDAE ma ior erit.angulus autem DAE çqualis eſt angulo DBE.
18.primi. ergo DEB angulus angulo DBE eſt maior. Sed maiori angulo maius latus ſubtéditur. maior igitur eſt DB ipſa DE.eſt aũt DB æqualis DF. Ergo DF eſt maior D E,minor maiore,quod fieri nõ poteſt.non igitur à pũ- ✱ cto A ad B ducta recta linea extra circulũ cadet.Similiter oſtẽdemus neque in ipſam cadere circũferentiã.Ergo extra cadat neceſſe eſt. Si igitur in circũferentia circuli duo quçuis pũcta ſumãtur,quæ ipſa cõiũgit recta linea intra circulũ cadet.quod oportebat demõſtrare.



F. C. COMMENTARIVS.

✱ Similiter oſtendemus neque in ipſam cadere circumferentiam.
16.primi. 18.primi. *Si enim in ipſam circumferentiam caderet,eadem ratione ſequeretur angulum DFB maiorem eſſe angulo DAF, hoc eſt angulo DBF, ac propterea latus DB latere DF maius eſſet. ſed & aequale,quod fieri non poteſt.non igitur in ipſam circumferentiam cadet.*

THEOREMA II. PROPOSITIO III.

Si in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductã per cẽtrũ bifariã ſecet, et ad angulos rectos ipſam ſecabit. quòd ſi ad angulos rectos ipſam ſecet,et bifariam ſecabit.

Sit circulus ABC, et in ipſo recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam ſecet in puncto F. Dico et ad angulos rectos
1.huius. ipſam ſecare. Sumatur enim circuli ABC centrum, quod ſit E,et EA EB iungantur. quoniam igitur AF eſt æqualis FB, communis autem FE,duæ duabus æquales ſunt, et baſis EA baſi EB eſt ęqualis.ergo et angulus AFE angulo BFE æqua-
Diff.10.primi. lis erit. Cum autem recta linea ſuper rectam inſiſtens angulos,qui deinceps ſunt,æquales inter ſe fecerit,rectus eſt vterque æqualium angulorum. vterque igitur AFE BFE eſt rectus.quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineã AB non ductam per centrum bifariam ſecans, et ad angulos rectos ipſam ſecabit. Sed CD ſecet AB ad rectos angulos. Dico et bifariam ipſam ſecare, hoc eſt AF ipſi FB ęqualem eſſe. Iiſdem enim conſtructis,quoniam EA,quæ ex centro eſt ęqualis E
5 primi. B,et angulus EAF angulo EBF æqualis erit.eſt autem et AFE rectus æqualis recto BFE. duo igitur triangula EAF EBF duos angulos duobus angulis æquales habẽt, vnumq́; latus vni lateri æquale EF, commune ſcilicet vtriſque, quod vni angulorũ
26.primi. æqualium ſubtenditur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus ęqualia habebunt. atque erit AF ipſi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam ſecet, et ad angulos rectos ipſam ſecabit. quòd ſi ipſam ſecet ad rectos angulos,et bifariam ſecabit. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA. III. PROPOSITO. IIII.

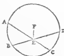
Si in circulo duę rectæ lineæ ſe inuicem ſecent non ductę per centrum,ſe ſe bifariam non ſecabunt.

Sit circulus ABCD; et in ipſo duæ rectæ lineæ AC BD ſe inuicem ſecent in puncto E,non ductę per centrum. Dico eas ſe ſe bifariam nõ ſecare. Si enim fieri poteſt, ſecent

secent se se bifariam, ita vt AE sit æqualis EC, et BE ipsi ED: sumaturq; centrum ABCD circuli, quod sit F; et EF iungatur. quoniam igitur recta linea FE per centrū ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam secat, et ad rectos angulos ipsam secabit. quare rectus est FEA angulus. rursus quoniā recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per centrum bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam secabit. rectus igitur angulus est FEB. ostensus autem est rectus et FEA. ergo FEA angulus ipsi FEB equalis erit, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur AC BD se se bifariam secant. quare si in circulo duæ rectæ lineæ se inuicem secent, non ductæ per centrum, se se bifariam non secabunt. quod ostendere oportebat.

3 huius.

Ex antecedente.



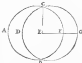
SCHOLIVM.

Si rectæ lineæ per centrum transirent, quærendum vtique non esset, an bifariam se inuicem secent. ipsorum enim centrum bipartita sectio est. similiter & si altera per centrum transeunte, altera non sit per centrum. nam quæ per centrum transit bifariam non secatur.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO V.

Si duo circuli se inuicem secent, non erit ipsorum idem centrū.

Duo enim circuli se inuicem secent ABC CDG in punctis BC. Dico ipsorum idem cētrum nō esse. Si enim fieri potest, sit centrum E; iūgaturq; EC, et EFG vtcumque ducatur. Et quoniam E cētrum est circuli ABC, erit CE ipsi EF equalis. rursus quoniam E centrum est CDG circuli, equalis est CE ipsi EG. Sed ostensa est CE equalis EF. ergo EF ipsi EG equalis erit, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrum est circulorum ABC CDG. quare si duo circuli se inuicem secent, non erit ipsorum idem centrum. quod ostendendum fuit.



THEOREMA V. PROPOSITIO. VI.

Si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

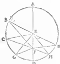
Duo enim circuli ABC CDE contingat se se intra in puncto C. Dico ipsorum non esse idem centrum. si enim fieri potest, sit F, iūgaturq; FC, et FEB vtcumque ducatur. quoniam igitur F centrum est circuli ABC, equalis est CF ipsi FB. rursus quoniam F centrum est circuli CDE, erit CF equalis FE. ostensa autem est CF æqualis FB. ergo et FE ipsi FB est æqualis, minor maiori; quod fieri non potest. non igitur F punctum centrum est circulorum ABC CDE. quare si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idē centrum non erit. quod demonstrare oportebat.



THEO-

THEOREMA VI. PROPOSITIO VII.

Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli; et ab eo in circulum cadant quędam rectæ lineæ: maxima quidem erit, in qua centrum, minima vero reliqua: aliarum autem propinquior ei, quę per centrum transit, semper remotiore maior est. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad vtrasque partes minimę.

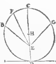


Sit circulus ABCD, cuius diameter AD: et in ipsa AD sumatur aliquod punctum F, quod non sit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: et à puncto F in circulum ABCD cadant quędam rectę lineę FB FC FG. Dico FA maximam esse, et FD minimam: aliarum vero FB quidē maiorem quàm FC, et FC maiorem quàm FG. Iungātur
20 primi. enim BE CE GE. Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora; erunt BE EF maiores quàm BF. est aūt AE æqualis EB. Ergo BE EF ipsi AF sūt æquales. maior igitur est AF quàm FB. rursus quoniā BE est ęqualis EC, communis autem FE, duę BE EF duabus CE EF
24 primi. æquales sunt. Sed BEF angulus maior est angulo CEF. basis igitur BF basi FC est maior. eadem ratione et CF maior est quàm FG. rursus quoniam GF FE maiores sunt quàm EG, æqualis autem GE ipsi ED; erunt GF FE maiores quam ED. communis auferatur EF. ergo reliqua GF maior est quàm reliqua FD. maxima igitur est FA, et FD minima: maior vero BF quàm FC, et CF quàm FG maior. dico et à puncto F duas tantum rectas lineas cadere in circulum ABCD ad vtrasque partes
23. primi. minimæ FD. constituatur enim ad lineam EF, atque ad datum in ea punctum E angulo GEF æqualis angulus FEH: et FH iungatur. quonia igitur GE est æqualis EH, communis autem EF, duæ GE EF duabus HE EF æquales sunt: et angulus G
4 primi. EF est æqualis angulo HEF. basis igitur FG basi FH æqualis erit. dico à puncto F in circulum non cadere aliam ipsi FG ęqualem. Si enim fieri potest, cadat FK. et quoniam FK est æqualis FG, estq; ipsi FG æqualis FH; erit et FK ipsi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum transit, æqualis remotiori, quod fieri non potest. Vel hoc modo. iungatur EK. et quoniam GE ipsi EK est ęqualis, communis autem FE, et basis GF ęqualis basi FK, erit et angulus GEF ęqualis angulo KEF. Sed angulus GEF angulo HEF est æqualis. angulus igitur HEF ipsi KEF æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. quare à puncto F in circulum non cadet alia recta linea æqualis ipsi GF. ergo vna tantum cadet. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, et reliqua quę sequuntur. quod demonstrare oportebat.

S C H O L I V M.

CONVERSVM. Si intra circulum punctum sumatur, atque à puncto in circulum cadant quotcumque rectæ lineæ, quarum vna quidem maxima sit, vna vero minima, & reliquarum aliæ sint æquales, aliæ inæquales; maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem sunt centro propinquiores, æquales autem ab eo æqualiter distant.

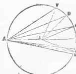
Per



Per punctum enim E, quod est intra circulum maxima quidem sit EC, minima vero ED, et FE quàm EB maior. Dico CE per centrum transire, et DE ipsi esse in directum, EF vero centro propinquiorem esse, quàm EB. Si enim CE non transit per centrum, sed alia quædam à puncto E in circulum cadēs, illa maxima erit per septimum theorema. est autem et EC maxima, quod fieri non potest. diameter igitur est CE, et ipsi in directum ED. Dico EF centro H propinquiorem esse, quàm EB. Si enim non est propinquior, vel remotior est, vel æqualiter distat: et siquidem remotior, maior erit BE, quàm EF, quod fieri non potest. non enim ponitur ita esse. Quòd si æqualiter distant, ęquales sunt. sed neque hoc ponitur. propinquior igitur est FE ipsi H, quàm EB, et GE ipsi EB est æqualis. Ergo à centro H æqualiter distant, inæqualiter enim distantes inęquales sunt, per septimum theorema. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Illud quoque verum est, quod nos demonstrauimus in commentario in propositionem octauam libri Archimedis de lineis spiralibus.



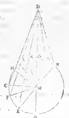
Si in circumferentia circuli aliquod sumatur punctum, ab eoq; in circulum ducantur rectæ lineę; quæ per centrum transit, omnium erit maxima, aliarum verò quæ transeunti per cētrum propinquiores sunt, remotioribus erunt maiores; duę autem tantum ęquales sunt ad vtrasque partes maximæ.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectę lineæ, quarum vna per centrum transeat, aliç vero vtcumque: earum quidem, quæ in concauam circumferentiam cadunt, maxima est, quę per centrum transit; aliarum autem propinquior ei, quę per centrum, semper remotiore maior est. at earum, quæ in curuam circumferentiam cadunt minima est, quæ inter punctum, et diametrum interijcitur; aliarum vero quæ propinquior minimæ semper remotiore est minor. duæ autem tantum ęquales à puncto in circulum cadunt ad vtrasque partes minimæ.

Sit circulus ABC, et extra circulum sumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectę lineæ quędam DA DE DF DC: sitq; DA per cētrum. Dico earum quidem quæ in concauam AEFC circumferentiam cadunt, maximam esse DA, quæ per centrum transit; et minimam, quæ inter punctum D, et diametrum AG interiicitur, videlicet DG: maiorem autem DE quàm DF, et DF maiorē quàm DG. earum vero, quæ in curuam circumferentiam HLKG cadunt, quæ propinquior minimę DG semper remotiore esse minorem, hoc est DK minorem, quàm DL, et DL minorem quàm DH. Sumatur enim centrum circuli ABC, quod sit M, et iungantur ME MF MC MK ML MH. et quoniam AM est æqualis ME, communis

ponatur MD. Ergo AD est æqualis ipsis EM MD.
20 primi sed EM MD sunt maiores quàm ED. Ergo et AD quàm ED est maior. rursus quoniam æqualis est ME ipsi MF, cõmunis apponatur MD. erũt EM MD ipsis MF MD ęquales; et angulus EMD maior est angulo FMD. basis igitur
24 primi ED basi FD maior erit. Similiter demonstrabimus et FD maiorẽ esse quam CD. ergo maxima est DA; maior aũt DE quàm DF, et DF quàm DC maior. pręterea quoniam MK KD sũt maiores quã MD, et MG est ęqualis MK; erit reliqua KD quam reliqua GD maior. quare GD minor quam KD, et idcirco GD minima est. et quoniam trianguli MLD in vno latere MD, duæ rectę lineæ MK KD in-
21. primi tra constituuntur, erunt MK KD minores ipsis ML LD, quarum MK est æqualis ML. reliqua igitur DK minor est quam reliqua DL. Similiter ostendemus et DL quam DK minorẽ esse. Ergo DG minima est. minor vero DK quàm DL, et DL minor quàm DH. dico ẽt duas tantum æquales à puncto D in circulum cadere ad vtrasque minimæ
34 primi. partes. constituatur ad rectam lineam MD, ad datumq; in ea punctum M angulo KMD ęqualis angulus DMB, et DB iungatur. itaque quoniam MK est æqualis MB, cõ-
4 primi munis autem MD, duæ KM MD duabus BM MD æquales sunt, altera alteri. et angulus KMD æqualis angulo BMD. basis igitur DK basi DB est ęqualis. dico à puncto D nullam aliam ipsi DB æqualem in circulum cadere. si enim fieri potest, cadat DN. et quoniam DK est æqualis DN, et DK ipsi DB est ęqualis, erit et DB æqualis DN, propinquior scilicet minimæ ęqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est, vel et aliter. iungatur MN. et quoniam æqualis est KM ipsi MN, communis autẽ MD, et basis DK basi DN ęqualis erit, et propterea angulus KMD ęqualis angulo DMN. Sed KMD angulus est æqualis angulo BMD. angulus igitur BMD angulo NMD æqualis erit, minor maiori, quod fieri non potest. quare, non plures quàm duæ rectæ lineæ à puncto D in circulum ABC ad vtrasque partes minimæ GD cadent. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, et reliqua deinceps. quod ostendere oportebat.



THEOREMA VIII. PROPOSITIO IX.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duę rectæ lineæ æquales; punctũ quod sumitur, circuli centrum erit.

Sit circulus ABC, et intra ipsum sumatur punctum D, à quo in circulum cadant plures, quam duæ rectę lineæ æquales, videlicet DA DB DC. Dico punctum D circuli ABC centrum esse. Iungantur enim AB BC, secenturq; bifariam in punctis EF; et iunctæ ED DF ad puncta GK HL producantur. quoniam igitur AE est ęqualis EB, communis autem ED, erunt duæ AE ED duabus BE ED ęquales; et basis DA est æqualis basi DB. angulus igitur AED angulo BED ęqualis erit, et idcir-



8 primi co vterque angulorũ AED BED est rectus. Ergo GK bifariam secans AB, et ad an-
13 primi. gulos rectos secat, et quoniam si in circulo quædã recta linea, rectam lineam quandam

dam bifariã, et ad angulos rectos secet, in secante est circuli centrum; erit in GK centrum circuli ABC. Eadẽ ratione et in HL centrum est ABC circuli, et nullum aliud commune habent rectæ lineę GH HL, nisi punctum D. Ergo D circuli ABC est centrum. Si igitur intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ ęquales; punctum, quod sumitur circuli centrum erit. Corol 1.huius.

ALITER.

Sumatur enim intra circulum ABC punctum aliquod D: atque à puncto D in circulum ABC cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales DA DB DC. Dico punctum D, quod sumitur, circuli ABC esse centrum. non enim, sed si fieri potest, sit E, et iũcta DE in FG producatur. ergo FG diameter est ABC circuli. itaque quoniam in FG diametro circuli ABC sumptum est aliquod punctum D, quod non est centrum circuli; maxima quidem erit DG, maior autem DC quàm DB, et DB quàm DA maior. Sed et ęquales, quod fieri non potest. non igitur E centrum est circuli ABC. Similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse præter ipsum D. ergo D circuli ABC centrum erit. quod oportebat demonstrare. 7.huius.

THEOREMA IX. PROPO. X.

Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat.

Si enim fieri potest, circulus ABC circulum DEF secet in pluribus punctis, quàm duobus, videlicet in B G H F: et iunctæ BG BH bifariam secentur in KL. atque à punctis KL ipsis BG BH ad rectos angulos ductæ KC LM in puncta AE producantur. quoniã igitur in circulo ABC quędam recta linea AC rectam lineam quandam BH bifariam et ad angulos rectos secat, in ipsa AC circuli ABC erit centrum. rursus quoniam in eodẽ circulo ABC quædam recta linea NX rectam lineam quãdam BG bifariam secat, et ad rectos angulos; in ipsa NX centrum erit circuli. ostensum autem est et in ipsa AC centrum esse, et in nullo alio puncto conueniunt inter se rectæ lineę AC NX, præterquàm in O. ergo O circuli ABC est centrum. Similiter ostendemus punctum O centrum esse circuli DEF. ergo duorum circulorum se se secantium ABC DEF. idem erit centrum O. quod fieri non potest. non igitur circulus circulum secat in pluribus punctis, quàm duobus. Corol 1.huius. 5.huius.

ALITER.

Circulus enim ABC rursus circulum DEF secet in pluribus punctis, quàm duobus; nempe in B G F H, et circuli ABC centrum sumatur, quod sit K; et KB KG KF iungãtur. qm̃ igitur intra circulũ DEF sumptum est aliquod punctum K, à quo in circulum DEF incidant plures, quàm duæ rectæ lineæ KB KG KF; erit punctum K circuli DEF centrum. est autem et circuli ABC centrum K. duorũ igitur circulorum, qui se se secant, idem erit K centrum, quod fieri non potest. quare circulus circulum in pluribus, quàm duobus pũctis non secat, quod oportebat demonstrare.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XI.

Si duo circuli se se intus contingant, et sumantur centra ipso-

rum; recta linea ipsorum centra coniungens, et producta in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli ABC ADE se se intus contingant in puncto A, et sumatur circuli quidem ABC cẽtrum, quod sit F, circuli vero ADE centrum G. Dico rectam lineam a puncto G ad F ductam, si producatur in punctum A cadere. Non enim, sed si fieri potest, cadat vt F G D H. et AF AG iungantur. Itaque quoniã AG GF maiores sunt, (20 primi.) quàm F A, hoc est quàm F H, communis auferatur F G. reliqua igitur AG maior est, quàm reliqua GH. Sed AG est æqualis GD. ergo GD ipsa GH est maior, minor maiore, quod fieri non potest. Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra cõtactum A cadet. quare in ipsum cadat necesse est. Si igitur duo circuli se se intus contingant; recta linea ipsorum centra coniungens, si producatur in contactum circulorum cadet. quod oportebat demonstrare.



ALITER.

Sed cadat vt GFC, et producatur in directum CF G ad pũctum H. iunganturq́; AG AF. Quoniam igitur AG GF maiores sunt quàm AF, et AF est ęqualis (20 primi.) FC, hoc est ipsi FH, communis auferatur FG. reliqua igitur AG reliqua GH est maior: hoc est DG maior ipsa GH, minor maiore, quod fieri non potest. Similiter et si extra circulum paruum sit centrum maioris circuli, idem sequi absurdum ostendemus.



THEOREMA XI. PROPOSITIO XII.

Si duo circuli se se extra contingant, recta linea ipsorũ centra coniungens per contactum transibit.

Duo enim circuli ABC ADE se se extra contingant in puncto A; et sumatur circuli quidem ABC centrum, quod sit F: circuli vero ADE cẽtrum G. Dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactum A transire. Non enim sed si fieri potest, cadat, vt FCDG et FA AG iungantur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC, erit AF æqualis FC. Rursus quoniam G centrum est ADE circuli, erit AG ipsi GD æqualis. ostensa est autem et AF ęqualis FC. sunt igitur FA AG ipsis FC DG ęquales. ergo tota FG maior est, quam FA AG. Sed et minor, quod (20 primi.) fieri non potest. Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea per contactum A nõ transibit. quare per ipsum transeat necesse est. Si igitur duo circuli se se extra cõtingant, recta linea ipsorum centra coniungens per contactum transibit. quod oportebat demonstrare.

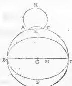


THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

Circulus circulum non contingit in pluribus pũctis, quàm vno, siue intus, siue extra contingat.

Si

Si enim fieri poteſt, circulus ABDC circulum EBFD contingat primum intus in pluribus punctis, quàm vno, videlicet in BD: et ſumatur circuli quidē ABDC centrum G; circuli vero EBFD centrum H. ergo recta linea, quę à puncto G ad H ducitur, in puncta BD cadet, cadat vt BGHD. et quoniam G centrum eſt circuli ABDC, erit BG ipſi GD æqualis. maior igitur eſt BG, quàm HD: et BH quàm HD multo maior. Rurſus quoniam H centrum eſt EBFD circuli, æqualis eſt BH ipſi HD. atqui oſtenſa eſt ipſa multo maior, quod fieri non poteſt. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quàm vno. Dico etiam neque extra contingere. Si enim fieri poteſt, circulus ACK circulum ABDC extra cōtingat in pluribus pūctis, quàm vno, videlicet in AC, et AC iungatur. Itaque quoniam in circumferentia vtrorumque circulorum ABDC ACK ſumpta ſunt duo quæuis puncta A C; recta linea, quę ipſa coniungit intra vtrumque ipſorum cadet. Sed intra circulum quidem ABDC cadit, extra circulum vero ACK, quod eſt abſurdum. non igitur circulus circulū extra cōtingit in pluribus punctis, quàm vno. oſtenſum autem eſt neque intus contingere. circulus igitur circulū non contingit in pluribus punctis, quàm vno, ſiue intus, ſiue extra contingat. quod oportebat demonſtrare.



THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIIII.

In circulo ęquales rectæ lineæ æqualiter à centro diſtant, et quę æqualiter à centro diſtant, inter ſe ſunt æquales.

Sit circulus ABDC; et in ipſo æquales rectę lineæ AB CD. Dico eas à centro æqualiter diſtare. Sumatur enim circuli ABDC centrum, quod ſit E, et ab ipſo ad AB CD perpendiculares ducantur EF EG, et AE EC iungantur. Quoniam igitur recta linea quędam per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat, et bifariam ipſam ſecabit. quare AF eſt æqualis FB, ideoq; AB ipſius AF dupla. Eadem ratiõne et CD dupla eſt CG. atque eſt AB ipſi CD æqualis. æqualis igitur et AF ipſi CG. Et quoniam AE eſt æqualis EC, erit et quadratum ex AE quadrato ex EC ęquale. Sed quadrato quidem ex AE ęqualia ſunt ex AF FE quadrata, rectus enim angulus eſt ad F: quadrato autem ex EC æqualia ſunt quadrata ex EG GC, cum angulus ad G ſit rectus. Quadrata igitur ex AF FE æqualia ſunt quadratis ex CG GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG eſt ęquale, etenim æqualis eſt AF ipſi CG. reliquum igitur, quod fit ex FE quadratum æquale eſt reliquo, quod ex EG; ac propterea FE ipſi EG eſt æqualis. in circulo autem æqualiter diſtare à centro rectę lineę dicuntur, quando à centro ad ipſas perpendiculares ductæ ęquales ſunt. ergo AB CD à centro æqualiter diſtant. Sed AB CD æqualiter diſtent à centro, hoc eſt æqualis ſit FE ipſi EG. Dico AB ipſi CD æqualem eſſe. Iiſdem enim cōſtructis, ſimiliter oſtendemus AB duplam eſſe ipſius AF, et CD duplā ipſius CG. Et quoniā æqualis eſt AE ipſi EC, erit et ex AE quadratū quadrato ex EC ęquale. Sed quadrato quidē ex AE ęqualia ſunt quadrata ex EF FA: quadrato aũt ex EC æqualia quadrata ex EG GC. quadrata igitur ex EF FA quadratis ex EG GC æqualia ſunt. quorum quadratū ex EG ęquale eſt quadrato ex EF; eſt enim EG ipſi EF æqualis. reliquum igitur ex AF quadratū ęquale eſt reliquo ex CG. ergo AF ipſi CG eſt æqualis, atque eſt AB ipſius AF dupla, et CD dupla ipſius CG. quare AB ipſi CD æqualis erit. In circulo



3 huius.

47 primi.

igitur ęquales rectæ lineę æqualiter à centro distant, et quę ęqualiter à centro distant, inter se sunt æquales. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XV.

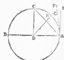
In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore maior est.



Sit circulus ABCD, cuius diameter AD; centrum E; et propinquior quidem diametro AD sit BC; remotior vero FG. Dico AD maximam esse, et BC maiorem quàm FG. Ducantur enim à centro ad BC FG perpendiculares EH EK. Et quoniam BC propinquior est ei, quæ per centrum transit, remotior autem FG; erit EK, quam EH maior. ponatur ipsi EH æqualis EL, et per L ipsi EK ad rectos angulos ducta LM in N producatur, et iungantur E
Ex antecedente. M EN EF EG. Quoniam igitur EH est æqualis EL, erit et BC ipsi MN ęqualis. Rursus quoniam æqualis est AE ipsi EM, et DE ipsi EN, erit et AD ipsis ME EN æqualis. Sed M E EN maiores sunt, quàm MN. ergo et AD maior est quam MN. at MN est æqualis BC. est igitur AD quàm BC maior. Quòd cū duæ
24. primi. EM EN duabus FE EG ęquales sint, angulusq; MEN maior angulo FEG, et basis MN basi FG maior erit, ostensa autem est MN æqualis BC. ergo et BC quàm FG est maior. Maxima igitur est AD diameter, et BC maior, quàm FG. Quare in circulo maxima est diameter, aliarum vero semper propinquior ei, quæ per centrum transit remotiore est maior. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVI.

Quę diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: et in locum qui inter rectam lineam, et circumferentiam interijcitur altera recta linea non cadet: et semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.



Sit circulus ABC circa centrum D, et diametrum AB. Dico rectam lineam, quæ à puncto A ipsi AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. non enim, sed si fieri potest, cadat intus, vt AC, et DC iungatur. Itaque quoniam æqualis est DA ipsi DC,
5 primi. erit et angulus DAC angulo ACD ęqualis. rectus autem est DAC. ergo et ACD est rectus; ac propterea
17. primi. anguli DAC ACD duobus rectis ęquales sunt. quod fieri non potest. Non igitur à puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. Similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere. extra igitur cadat necesse est, cadat vt AE. Dico in locum, qui inter rectam lineam AE, et circumferentiam CHA interiicitur, alteram rectam lineam non cadere. Si enim fieri potest, cadat vt FA, et à puncto D ad FA perpendicularis ducatur DG. Et quo-
19 primi. niā rectus est angulus AGD, minor autem recto DAG, erit AD quàm DG maior, æqualis autem est DA ipsi DH. maior igitur est DH ipsa DG, minor maiore, quod fieri non potest. Non igitur in locum, qui inter rectam lineam, et circumferentiam interiicitur, altera recta linea cadet. Dico præterea angulum semicirculi, qui recta

linea

linea BA, et circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo maiorem esse; reliquum vero contentum circumferentia CHA, et recta linea AE omni angulo acuto rectilineo esse minorem. Si enim est aliquis angulus rectilineus maior quidem contento recta linea BA, et CHA circumferentia, minor autem contento CHA circumferentia, et recta linea AE, in locum, qui inter circumferentiam CHA, et rectam lineam AE intercidit, cadet aliqua recta linea, quæ faciet angulum maiorem quidem contento recta linea BA, et CHA circumferentia, qui scilicet rectis lineis continetur, minorem vero contento circumferentia CHA, et AE recta linea. non cadit autem. non igitur erit angulus acutus, qui rectis lineis continetur, maior angulo contento recta linea BA, et CHA circumferentia, neque minor contento circumferentia CHA, et AE recta linea.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, rectam lineam, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere: et rectam lineam contingere circulum in vno tantum puncto, quoniã quæ occurrit in duobus pũctis intra ipsũ cadit, vt ostẽsum est.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XVII.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.

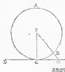
Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus BCD. oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat. Sumatur enim centrum circuli E; et iuncta AE, centro quidem E, interuallo autem EA circulus AFG describatur: et à puncto D ipsi EA ad rectos angulos ducatur DF, iunganturq; EBF AB Dico à puncto A ductam esse AB, quæ circulum BCD contingit. Quoniam enim E centrum est circulorum BCD AFG, erit EA æqualis EF, et ED ipsi EB. Duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales sunt, et angulum communem continent, qui est ad E. ergo basis DF basi AB est æqualis; triangulumq; D EF æquale triangulo EBA, et reliqui anguli reliquis angulis. æqualis igitur est angulus EBA angulo EDF. et EDF rectus est. quare et rectus EBA: atque est EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulũ contingit. ergo AB contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB, quæ circulum BCD contingit. quod facere oportebat. 4.primi. Ex antecedente.



THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

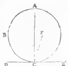
Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C: et circuli ABC centrũ sumatur F, à quo ad C ducatur FC. Dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse. Si enim non ita sit, ducatur à puncto F ad DE perpendicularis FG. Quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus; ac propterea FGC angulus maior angulo FCG. maiorem autem angulum 12.primi. 19.primi.



angulum maius latus subtendit. maior igitur est FC, quàm FG. æqualis autem FC ipsi FB. ergo FB ipsa FC est maior, minor maiore, quod fieri non potest. non igitur FG est perpendicularis ad DE. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse preter ipsam FC. ergo FC ad DE est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, a centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli centrum erit.



Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in C, et à puncto C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA. Dico in ipsa AC circuli centrú esse. Non enim, sed si fieri potest, si. F centrum, et iungatur CF. Quoniam igitur circulum ABC cótingit quędam recta linea DE, et a centro ad contactum ducta est FC erit FC ad ipsam DE perpendicularis. rectus igitur angulus est FCE. est auté et ACE rectus. ergo FCE angulus est æqualis angulo ACE, minor maiori, quod fieri non potest. Non igitur F centrum est ABC circuli. Similiter ostendemus neque aliud aliquod esse, præterquàm in ipsa AC. Quare si circulum contingat quædam recta linea, à cótactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea extra circulum ducatur, producta ad eas partes, in quibus est circulus in circuli centrum cadet.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

In circulo angulus, qui ad centrum duplus est eius, qui ad circumferentiam, quando circumferétiam eandem pro basi habeát.



Sit circulus ABC, ad cuius centrum quidem angulus sit BEC, ad circumferentiam vero BAC, et eandé circumferentiam BC pro basi habeant. Dico BEC angulum anguli BAC duplum esse. Iungatur enim AE et ad F producatur. Itaque quoniam EA est æqualis
5 primi. EB, erit et angulus EAB angulo EBA æqualis. anguli igitur EAB EBA dupli sunt ipsius anguli EAB. Sed
32. primi. angulus BEF est æqualis angulis EAB EBA. ergo BEF angulus anguli EAB est duplus. Eadem ratione et angulus FEC duplus est ipsius EAC. totus igitur BEC totius BAC duplus erit. Rursus inflectatur, et sit alter angulus BDC, iunctaq; DE ad G producatur. Similiter ostendemus angulum GEC anguli EDC duplum esse, quorum GEB duplus est ipsius EDB. ergo reliquus BEC reliqui BDC est duplus

plus. In circulo igitur angulus, qui ad centrum duplus est eius, qui ad circumferẽtiam, quando circumferẽtiam eandẽ pro basi habeant. quod oportebat demõstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Illud quoque verum est, spacium quod est ad cẽtrum duplum esse anguli, qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro basi habuerint.

Sit enim circulus ABC, cuius cẽtrum E. Dico spacium BEC quod est ad centrum duplum esse anguli BAC. iuncta enim AE, & ad D producta, iunctisq; BD DC, similiter demonstrabitur angulus BED anguli BAE duplus, et angulus CED duplus anguli CAE, totum igitur spacium BEC quod est ad centrum, anguli BAC qui ad circumferentiã duplum erit quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

In circulo qui in eadem portione sunt anguli inter se æquales sunt.



Sit circulus ABCDE, & in eadem portione BAED anguli sint BAD BED. Dico eos inter se ęquales esse. Sumatur enim circuli ABCDE centrum quod sit F: iunganturq; BF FD. & quoniam angulus quidẽ BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiã, & circumferentiam eandem pro basi habent BCD; erit BFD angulus anguli BAD duplus. Eadem ratione angulus BFD duplus est etiam anguli BED. ergo angulus BAD angulo BED ęqualis erit. In circulo igitur qui in eadẽ portionẽ sunt anguli, inter se æquales sunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Euclidis demonstratio congruit in maiore tantum circuli portione, nisi fortasse spacium quodcũque ad cẽtrum pro angulo accipiatur, ex iis quę nos proxime demonstrauimus. possumus autem & hoc modo demonstrare.



Sint in portione BAED circuli ABCDE, anguli BAD, & BED. Dico eos inter se ęquales esse. Sit enim primum BAED maior portio, vt in antecedenti figura signatumq; circuli centrum quod sit F: & BF FD iungantur. quoniam igitur angulus BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, & eandem basim habent, nempe circumferentiam BCD; erit angulus BFD anguli BAD duplus: & eadem ratione duplus quoque anguli BED angulus igitur BAD angulo BED aequalis erit. Sit deinde BAED portio minor: & iungantur BC AC EC DC. Itaque quoniam ex iis, quae proxime demonstrauimus, angulus BAC est aequalis angulo BEC, itemq; angulus CAD angulo CED; erit et totus angulus BAD toti BED aequalis. Ex antecedente.

ALITER.

Iungatur AE. erit angulus ABE aequalis angulo ADE. angulus autem AGB ad verticem angulo EGD est aequalis. ergo & reliquus angulus BAD reliquo BED aequalis erit. In circulo Ex demonstratis 15 primi

igitur

igitur, qui in eadem portione sunt anguli, inter se aequales sunt. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XX. PROPO. XXII.

Quadrilaterorum, quę in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis ęquales sunt.

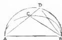
Sit circulus AB CD, et in ipso quadrilaterum ABCD. Dico angulos ipsius oppositos duobus rectis aequales esse. Iungantur AC BD. Quoniam igitur omnis trianguli
32 primi. tres anguli duobus rectis sunt aequales, erunt trianguli ABC tres anguli CAB ABC BCA aequales duobus rectis. Sed angulus CAB est ęqualis angulo B D C, in eadem enim sunt portione BADC, et angulus ACB aequalis ipsi ADB, quòd sint in eàdem ADCB portione. totus igitur angulus ADC angulis BAC ACB est aequalis. communis apponatur ABC angulus duobus angulis, qui sunt ad A et C, et seorsum vni angulo, qui est ad D; erunt anguli ABC BAC ACB angulis ABC ADC aequales. Sed ABC BAC ACB sunt aequales duobus rectis. ergo et anguli ABC ADC duobus rectis ęquales erunt. Similiter ostendemus angulos quoque BAD DCB duobus rectis esse aequales. Quadrilaterorum igitur, quę in circulis describūtur, anguli oppositi duobus rectis aequales sunt. quod oportebat demonstrare.



THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

* In eadem recta linea duae circulorum portiones similes et inaequales ex eadem parte non constituentur.

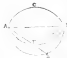
Si enim fieri potest, in eadem recta linea AB duae circulorum portiones similes, et inęquales constituantur ex eadem parte A C B A D B; ducaturq; ACD, et CB BD iungantur. Itaque quoniam portio A C B similis est portioni A D B, similes autem
Diffi.11. circulorum portiones sunt, quae angulos suscipiunt aequales; erit A C B angulus ęqualis angulo A D B, exterior interiori, quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea, duę circulorum portiones similes, et inaequales ex eadem parte constituentur. quod demonstrare oportebat.



F. C. COMMENTARIUS.

* Ex eadem parte. ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

In vetusto codice hęc non leguntur, quamquam ad demonstrationem necessaria sint, tamen neutra ex parte similes, & inęquales circulorum portiones constitui possunt in eadem recta linea. Si enim fieri potest, in eadem recta linea AB constituatur ex altera parte portio AEB similis, & inęqualis portioni ACB. Intelligatur autem ex eadem parte portio AFB similis & aequalis ipsi ACB; & ducta AFE, iunctisq; FB BE, similiter demonstrabitur angulus AFB aequalis angulo

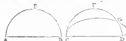


gulo AEB, exterior interiori, quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea similes & inæquales circulorum portiones constituentur. quod demonstrandum fuerat.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO. XXIIII.

In æqualibus rectis lineis similes circulorum portiones inter se æquales sunt.

Sint enim in æqualibus rectis lineis AB CD similes circulorum portiones AEB CFD. Dico portionem AEB portioni CFD æqualem esse. congruente enim AEB portione portioni CFD, et posito puncto quidem A in



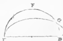
C, recta vero linea AB in CD; congruet et B punctum puncto D, propterea quòd AB ipsi CD sit æqualis. congruente autem recta linea AB rectæ CD, congruet et AEB portio portioni CFD. Si.n. AB congruet ipsi CD, portio autē AEB portioni CFD non congruet, sed permutabitur, vt CGD, circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. etenim circulus CGD circulum CFD secat in pluribus pūctis, quàm duobus, videlicet in punctis CGD, quod rursus fieri non potest. Non igitur congruente recta linea AB rectæ CD, non congruet et ACB portio portioni CFD. quare congruet et ipsi æqualis erit. In æqualibus igitur rectis lineis similes circulorū portiones inter se æquales sunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Si enim AB congruet ipsi CD; portio autem AEB portioni CFD non congruet, sed permutabitur, vt CGD, et reliqua.



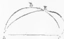
Si enim AB recta linea ipsi CD congruente, portio AEB portioni CFD non congruet, circūferentia eius vel extra ipsam AEB cadit, vel intra, vel partim extra partim intra. cadat primum extra, vel intra. ergo in eadem recta linea duae circulorum portiones similes & inæquales ex eadem parte constituentur, quod fieri non posse in antecedēte demonstratum est. cadat deinde partim extra, partim intra, vt CGD. circulus igitur circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. quod itidem fieri nō potest, ex decima huius. Euclides autem primum casum velut nimis perspicuum omisisse videtur.



Sed & cuiusque prædictorum cōuersum etiam verum est, quod ita demonstrari potest.

In eadem recta linea, vel in æqualibus rectis lineis æquales circulorum portiones similes sunt.

Si enim fieri potest, sint primum in eadem recta linea AC portiones ABC AEC aequales, sed tamen dissimiles: necesse erit circumferentiam AEC neque congruere circumferentiae ABC, alioqui & aequales essent & similes: neque extra, vel intra ipsam cadere. aequales enim non essent. quare relinquitur vt partim intra, partim ex-



tra cadat. quòd si ita sit, circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis secabit. quod fieri non potest. Similiter demonstrabitur neque ex altera parte, neque in aequalibus rectis lineis constitui posse aequales & dissimiles circulorum portiones, nempe altera portione alteri aptata; vt superius dictum est. In eadem igitur recta linea vel in aequalibus rectis lineis aequales circulorũ portiones similes sunt. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XXV.

Circuli portione data describere circulum, cuius ea portio est.



Sit data circuli portio ABC. itaque oportet portionis ABC describere circulũ, cuius est portio. Secetur AC bifariam in D: et à puncto D ipsi AC ad rectos angulos ducatur DB; et AB iungatur. vel igitur angulus ABD maior est angulo BAD,
23 primi. vel minor, vel ipsi æqualis. Sit primum maior et ad rectam lineam BA, atque ad datum in ea punctum A constituatur angulus BAE æqualis angulo ABD, et DB ad E producatur, iungaturq; EC. Quoniam igitur angulus ABE est ęqualis angulo BA
6. primi. E, erit et BE recta linea ipsi EA æqualis. et quoniam AD est æqualis DC, communis autẽ DE, duæ AD DE duabus CD DE æquales sunt, altera alteri; et angulus ADE æqualis angulo CDE, rectus. n. vterque est. ergo et basis AE basi EC est ęqualis. Sed ostensa est AE æqualis EB. quare et BE ipsi EC est æqualis, ac propterea tres rectæ lineę AE EB EC inter se ęquales sunt. centro igitur E, interuallo autem vna ipsarum AE EB EC circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, et circulus descriptus erit. Quare circuli portione data descriptus est circulus, cuius ea portio est. Sed et illud constat, portionem ABC semicirculo minorem esse; propterea quòd centrum ipsius extra cadit. Similiter et si angulus ABD sit ęqualis angulo BAD, facta AD æquali vtrique ipsarum BD DC, erunt tres rectæ lineę AD DB DC inter se æquales, atque erit D circuli descripti centrum, et portio ABC semicirculus. Si vero angulus ABD minor sit angulo BAD, constituetur ad rectam lineam BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD æqualis angulus intra portionem ABC. erit centrum in ipsa DB, atque erit ABC portio semicirculo maior. Circuli igitur portione data descriptus est circulus, cuius portio est. quod facere oportebat.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis æquales anguli ęqualibus insistunt circũferentijs, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.

Sint ęquales circuli ABC DEF, & in ipsis æquales anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circũferentias vero BAC EDF. Dico BKC circumferentiam circumferentię ELF æqualem esse. Iungantur enim BC EF. Et quoniã æquales sunt ABC DEF circuli, erũt et quæ ex cẽtris æquales. duæ igitur



BG GC duabus FH,HF ęquales sunt:& angulus ad G æqualis angulo ad H. Ergo et basis BC basi EF est ęqualis. Rursus quoniã æqualis est angulus ad A angulo ad D, portio BAC similis erit portioni EDF. et sunt in æqualibus rectis lineis BC EF. quę autem in æqualibus rectis lineis similes sunt circulorum portiones inter se æquales sunt. portio igitur BAC portioni EDF est æqualis. Sed et totus ABC circulus ęqualis est toti DEF. ergo et reliqua circumferentia BKC reliquę ELF æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistunt circũferentiis siue ad centra siue ad circumferentias insistat. quod oportebat demonstrare. 4 primi Diffi 11. 24 huius

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter demonstrabitur in eisdem circulis, & propositio magis vniuersalis erit hoc modo.

In eisdem vel æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, siue ad centra siue ad circumferentias insistant.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO. XXVII.

In æqualibus circulis anguli, qui ęqualibus insistunt circumferentijs inter se æquales sunt; siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.



In æqualibus enim circulis ABC DEF, ęqualibus circumferentiis BC EF insistant anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. Dico angulum BGC angulo EHF, et angulum BAC angulo EDF æqualem esse, Si quidem igitur angulus BGC æqualis sit angulo EHF, manifestum est angulum quoque BAC angulo EDF esse ęqualem. Sin minus, vnus ipsorum est maior. sit maior BGC, et constituatur ad rectam lineam BG, et ad punctum in ipsa G angulo EHF æqualis angulus BGK. æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint. Ergo circumferentia BK æqualis est circumferentię EF. Sed circumferentia EF ęqualis est ipsi BC. ergo et BK ipsi BC est ęqualis, minor maiori, quod fieri non põt. Non igitur inæqualis est angulus BGC angulo EHF. ergo est æqualis. atque est anguli quidem BGC dimidius angulus qui ad A; anguli vero EHF dimidius qui ad D. angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis. In ęqualibus igitur circulis anguli, qui ęqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt siue ad centra, siue ad circumferentias insistant. quod oportebat demonstrare. 23 primi. Ex antecedente.

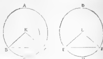
F. C. COMMENTARIVS.

***Eadem demonstratio erit**, si anguli aequalibus circumferentiis eiusdem circuli insistant, vt propositio magis vniuersalis fiat, hoc pacto.*

In eisdem vel ęqualibus circulis anguli, qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVIII.

In ęqualibus circulis ęquales rectę lineę circumferentias ęquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.



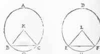
Sint ęquales circuli ABC DEF; et in ipsis æquales rectę lineę BC EF, quæ circumferentias quidem BAC EDF maiores auferant, circumferentias vero BGC EHF minores. Dico circumferentiam BAC maiorem maiori circumferentiæ EDF, et minorem circumferentiam BGC minori EHF æqualem

1.huius. Diffi.1. 8.primi. 26.huius.

esse. Sumatur enim centra circulorum K L, iunganturq; BK KC EL LF. Et quoniam circuli ęquales sunt, erunt et quæ ex centris ęquales. duæ igitur BK KC sunt ęquales duabus EL LF. et basis BC æqualis est basi EF. Ergo angulus BKC angulo ELF est æqualis. æquales autem anguli ęqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint. quare cirumferentia BGC æqualis est circumferentiæ EHF. Sed et totus ABC circulus toti DEF est ęqualis. reliqua igitur circumferentia BAC reliquę EDF ęqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, ęquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.



1.huius.

Sint æquales circuli ABC DEF: et in ipsis æquales assumantur circūferentiæ BGC EHF: et BC EF iungantur. Dico rectam lineam BC rectæ EF ęqualem esse. Sumantur enim centra circulorum K L, et iungantur BK KC EL LF. quoniam igitur circumferentia BGC

16 huius. Diffi.1. 4 primi.

est ęqualis circumferentiæ EHF, erit et angulus BKC angulo ELF ęqualis. Et quoniam circuli ABC DEF sunt æquales, et quæ ex centris ęquales erunt. duę igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF; et ęquales angulos continent. quare basis BC basi EF est ęqualis. In ęqualibus igitur circulis æquales circumferentias ęquales rectæ lineę subtendunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Non aliter etiam in duabus antecedentibus cum demonstrationes eędem sint, propositiones magis vniuersales fieri poterunt, in hunc modum.

In eisdem vel æqualibus circulis ęquales rectæ lineæ circumferentias ęquales auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.

In eisdem vel ęqualibus circulis æquales circumferentias æquales rectę lineę subtendunt.

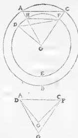
Sed & harum quoddammodo conuersas, atque alias his non dissimiles demonstrare hoc loco non inutile arbitrati sumus.

PROPOSITIO I.

Si æquales rectæ lineæ æquales, et similes circumferentias auferant, circuli ęquales erunt, quorum illæ sunt circumferentiæ.

Si enim

Si enim fieri potest, sint circuli inęquales, & in maiori circulo ABC, circa idem centrum G aequalis minori describatur DEF: & iūgātur AG GC DG GF, ita vt punctum F cadat in recta linea GC: & AG secet circulum DEF in H. Quoniam igitur rectae lineae AC DF aequales sunt, erit angulus AGC minor angulo DGF; quod deinceps de monstrabitur. quare circumferentia HF minor erit circumferentia DF. Sed circumferentia HF similis est circumferentiae AC, ex 12 diffinitione huius. in ipsis enim idem angulus AGC consistit. ergo circumferentia DF circumferentiae AC non est similis. atqui similis ponebatur. quod est absurdum. non igitur circuli in aequales sunt. ergo aequales esse necessarium est. At vero angulum AGC minorem esse angulo DGF, ita demonstrabimus.



Intelligatur triangulum AGC seorsum, & triangulum DGF punctum D in A statuatur; & punctum F in C. sunt enim AC DF inter se aequales. cadet triangulum DGF intra triangulum AGC. quare ex 21 primi libri angulus AGC minor est angulo DGF. quod demonstrare oportebat.

PROPOSITIO. II.

In circulis inęqualibus ęquales rectę lineę dissimiles circumferentias auferunt.

Hoc autem ex iis, quae nos proxime demonstrauimus perspicue apparet. aequales enim rectae lineae AC DF dissimiles auferunt circumferentias.

PROPOSITIO. III.

In circulis inaequalibus similes circumferentias inaequales rectae lineae subtēdūt.

Et hoc similiter apparet ex ante demonstratis. repetatur enim eadem figura, & iungatur HF. Itaque quoniam triangulum DGF duo latera DG GF aequalia habet duobus lateribus HG GF trianguli HGF, & angulum DGF maiorem angulo HGF, erit basis DF basi HF maior. Sed recta linea AC est aequalis ipsi DF. ergo AC HF inęquales sunt, & similes circumferentias subtendūt. quod oportebat demonstrare.

PROPOSITIO IIII.

Similes et inęquales circumferentias inaequales rectę lineę subtendunt.

Si enim rectae lineae aequales sint, & circuli item aequales, erunt circumferentiae, quas subtendunt, & aequales & similes. Si vero circuli sint inęquales, circumferentiae dissimiles erunt. quod non ponitur. Similes igitur & inęquales circumferentias, inęquales rectae lineae subtendunt. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO. XV.

Datam circumferentiam bifariam secare.



Sit data circumferentia ADB. oportet ADB circumferentiam bifariam secare. Iungatur AB, & in C bifariam secetur: à puncto autem C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD, & iungantur AD DB. Quoniam igitur AC est aequalis CB, communis autem CD, duae AC CD duabus 10 primi

BC,

BC CD æquales sunt: et angulus ACD æqualis angulo
BCD, rectus enim vterque est: ergo basis AD basi DB est
4.primi. æqualis. æquales autem rectæ lineæ circumferentias æqua-
28.huius. les auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero mi-
nori. et est vtraque ipsarum AD DB circumferentiarum
semicirculo minor. quare circumferentia AD circumferen
tiæ DB æqualis erit. data igitur circumferentia bifariam se
cta est. quod facere oportebat.



THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXI.

In circulo angulus, qui in semicirculo rectus est, qui vero in ma
iori portione minor est recto, & qui in minori maior recto; & insu
per maioris quidem portionis angulus recto maior est, minoris ve
ro portionis angulus recto minor.



Sit circulus ABCD cuius diameter BC, centrum
autem E, et iungantur BA AC AD DC. Dico angu
lum quidem, qui est in semicirculo BAC rectum esse;
qui vero in portione ABC maiore semicirculo, videli
cet angulum ABC minorem esse recto, et qui in por-
tione ADC minore semicirculo, hoc est angulũ ADC
recto maiorem. iungatur AE, et BA ad F produca-
tur. Itaque quoniam BE est æqualis EA, erit et angu
lus EAB, angulo EBA æqualis. Rursus quoniam AE
5.primi. est æqualis EC, et angulus ACE angulo CAE æqualis
erit. totus igitur angulus BAC est æqualis duobus ABC ACB angulis. est autem et
angulus FAC extra triangulum ABC, duobus ABC ACB æqualis. angulus igitur
32.primi. 13.primi. BAC est æqualis angulo FAC. ac propterea vterque ipsorum rectus. Quare in semi
circulo BAC angulus BAC rectus est. et quoniam trianguli ABC duo anguli ABC
17.primi. BAC duobus rectis sunt minores, rectus autem BAC, erit ABC angulus recto mi
nor, atque est in portione ABC maiore semicirculo. Quòd cum in circulo quadri-
22.huius. laterum sit ABCD, quadrilaterorum vero, qui in circulis describuntur, anguli op-
positi duobus rectis sint æquales: erunt ABC ADC anguli æquales duobus rectis.
et angulus ABC minor est recto. reliquus igitur ADC recto maior erit, atque est
in portione ADC minore semicirculo. Dico præterea maioris portionis angulum,
qui continetur ABC circumferentia et recta linea AC recto maiorem esse; angulũ
vero minoris portionis contentum circumferentia ADC, et recta linea AC recto
minorem. quod quidem perspicue apparet. Quoniam enim angulus, qui rectis li-
neis BA AC continetur rectus est, erit et contentus ABC circumferentia, et recta
linea AC recto maior. Rursus quoniam angulus contentus rectis lineis CA AF re
ctus est, erit qui continetur recta linea CA, et ADC circumferentia minor recto.
In circulo igitur angulus qui in semicirculo rectus est, qui vero in maiori portione
minor est recto, et qui in minori maior recto. et insuper maioris quidem portionis
angulus recto maior est: minoris vero recto minor. quod demonstrare oportebat.

ALITER demõstrabitur angulũ BAC rectũ esse. Quoniã enim angulus AEC
duplus est anguli BAE, etenim duobus interioribus, et oppositis est æqualis: est au
tem et AEB duplus ipsius EAC. anguli AEB AEC anguli BAC dupli erunt. Sed
et AEB AEC anguli duobus rectis sunt æquales, ergo angulus BAC rectus est.
quod demonstrare oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si triãguli vnus angulus sit æqualis duo-
bus

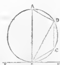
bus,eum rectum esse; propterea quòd & qui deinceps est, ijsdem est ęqualis. quando autem anguli deinceps sunt ęquales, necessario recti sunt.

S C H O L I V M.

Si semicirculi omnes ob similitudinem æquales angulos suscipiunt, nempe rectos, maiores autem portiones suscipiunt rectis minores; perspicuum est cum similes sint æquales suscipere angulos. quo enim maiores sunt semicirculis, eo rectum anguli diminuunt: similiter et minores semicirculis rectum proportione augent. Ergo similes portiones æquales suscipiant angulos necesse est. portionum autem anguli, quòd heterogenei sint, respectu rectilineorum, sunt enim mixti, cum illis non comparantur determinata magnitudine, nisi maioritate tantum, vt sic dicam, & minoritate. Quamobrem contingit maiore portione ad minorem procedente per medium circulum, angulum ipsius maiorem simpliciter recto ad minorem procedere, & non per rectum. rectus enim magnitudo determinata est. Videbitur autem hoc admirabile esse, nam quæ in contraria transmutantur, per media transire consueuerunt. Sed et in alijs inuenire licet hoc modo oppositæ absque medio. etenim quæ circulum comprehendit linea, cum conuexa sit, et caua, recta non est.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXII.

Si circulum contingat quædam recta lineã, à contactu autem in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos ad contingentem facit, æquales erunt ijs, qui in alternis circuli portionibus consistunt.



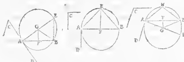
Circulum enim ABCD contingat quædam recta linea EF in B, et à puncto B ad circulum ABCD ducatur recta linea BD ipsum vtcumque secans. Dico angulos, quos BD, cum EF contingente facit, ęquales esse iis, qui in alternis circuli portionibus consistunt, hoc est angulum FBD esse æqualem angulo, qui cōstituitur in DAB portione, videlicet ipsi DAB; angulum vero EBD ęqualem angulo DCB, qui in portione DCB constituitur. Ducatur enim à puncto B ipsi EF ad rectos angulos BA: et in circumferentia BD sumatur quod vis punctum C; iunganturq; AD DC CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quædam recta linea EF in puncto B, et a contactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA; erit in ipsa BA centrum ABCD circuli, quare BA eiusdē circuli diameter est, et angulus ADB in semicirculo est rectus. reliqui igitur anguli BAD ABD vni recto ęquales sunt. Sed et ABF est rectus. ergo angulus ABF æqualis est angulis BAD ABD. communis auferatur ABD. reliquus igitur DBF ei, qui in alterna circuli portione consistit, videlicet angulo BAD est ęqualis. Et quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, et anguli eius oppositi æquales

11. primi.
19 huius.
Ex antecedente
32 primi.

15. huius. ti æquales sunt duobus rectis; erunt DBF DBE anguli angulis BAD BCD æquales. quorum BAD ostensus est æqualis ipsi DBF. ergo reliquus DBE ei, qui in alterna circuli portione DCB constituitur, videlicet ipsi DCB æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu vero in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli, quos facit ad contingentem, æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus consistunt. quod oportebat demonstrare.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXXIII.

In data recta linea describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.



Sit data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus, qui ad C. itaque oportet in data recta linea AB describere portionẽ circuli, quæ suscipiat angulum æqualem angulo, qui est ad C. vel igitur angulus ad C acutus est, vel rectus, vel obtusus. Sit primum acutus, vt in prima figura, et ad rectam lineam AB, et ad punctum in ea
23. primi. datum A. constituatur angulus BAD angulo qui est ad C æqualis. acutus igitur an-
11 primi. gulus est BAD, et à puncto A ipsi AD ad rectos angulos ducatur AE; secetur autẽ
10. primi. AB bifariam in F, atque à puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipsi AB: et GB iũgatur. Quoniam igitur AF est æqualis FB, communis autem FG, duę AF FG dua-
4 primi. bus BF FG æquales sunt: et angulus AFG ęqualis angulo GFB. ergo basis AG basi GB est æqualis. Itaque centro G, interuallo autem AG circulus descriptus transibit etiam per B. describatur et sit ABE, iungaturq; EB. Quoniam igitur ab extremita-
Corol 16 huius. te diametri AE, et à puncto A ipsi AE ad rectos angulos ducta est AD; ipsa AD circulum continget. et quoniam circulum ABE contingit quædam recta linea AD, et
Ex antecedente. à contactu, qui est ad A in circulum ABE ducta est recta linea AB: erit angulus DAB ęqualis angulo, qui in alterna circuli portione constituitur, videlicet ipsi AEB, Sed angulus DAB angulo, qui ad C est æqualis. ergo et angulus ad C angulo AEB æqualis erit. In data igitur recta linea AB portio circuli descripta est AEB, suscipiens angulum AEB dato angulo, qui ad C æqualem. Sit deinde angulus, qui ad C rectus. et oporteat rursus in recta linea AB describere circuli portionem, quę susci-
23. primi. piat angulum æqualem recto angulo, qui est ad C. constituatur enim rursus angulo recto, qui ad C ęqualis angulus BAD, vt in secũda figura, seceturq; AB bifariã in F, et centro F, interuallo autem alterutra ipsarum AF FB circulus describatur AEB,
Corol. 16. huius. ergo AD recta linea circulum ABE contingit, propterea quòd rectus est qui ad A angulus, et angulus BAD æqualis angulo, qui est in portione AEB: rectus enim et ipse est, in semicirculo consistẽs. sed BAD æqualis est ei qui ad C. Ergo et qui in portione AEB ei, qui ad C est æqualis. descripta igitur est rursus in AB recta linea, portio circuli AEB, suscipiens angulum angulo recto, qui ad C ęqualem. Denique sit angulus ad C obtusus, et ad rectam lineam AB, et ad punctum A constituatur ipsi æqualis angulus BAD, vt hẽt in tertia figura, et ipsi AD rectę lineae ad rectos angulos ducatur AE seceturq; rursus AB bifariam in F. ipsi vero AB ducatur ad rectos angulos FG, et GB iungatur Et quoniam AF est ęqualis FB, communis autem FG. duę AF FG duabus BF FG ęquales sunt, et angulus AFG angulo BFG ęqualis.

lis. basis igitur AG est æqualis basi GB. Quare centro G, interuallo autem AG circulus descriptus etiam per B transibit. transeat vt AEB. Et quoniam diametro AE ab extremitate ad rectos angulos ducta est AD, ipsa AD circulum AEB continget: et à contactu, qui ad A ducta est AB. quare angulus BAD ei, qui in alterna circuli portione AHB cõstitnitur est ęqualis. Sed BAD angulus æqualis est angulo, qui ad C. angulus igitur, qui in portione AHB angulo, qui ad C æqualis erit. Ergo in data recta linea AB descripta est AHB circuli portio, suscipiens angulum æqualẽ ei, qui est ad C. quod facere oportebat. 4.primi. Corol.16 huius.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXXIIII.

A dato circulo portionem abscindere, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

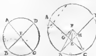
Sit datus circulus ABC: datus autem angulus rectilineus, qui ad D. oportet à circulo ABC portionem abscindere, quę suscipiat angulum angulo qui ad D æqualem. Ducatur recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens: et ad rectam lineam BF, et ad punctum in ea B cõstituatur angulus FBC angulo qui est ad D æqualis. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B puncto, et à contactu B ducta est BC, erit angulus FBC ęqualis ei, qui in alterna circuli portione cõstituitur. Sed FBC angulus angulo qui ad D est æqualis. ergo et angulus, qui in portione BAC angulo qui ad D æqualis erit. A dato igitur circulo ABC abscissa est portio quædam BAC suscipiens angulum dato angulo rectilineo, qui est ad D, æqualem. quod facere oportebat. 17.huius. 23.primi.



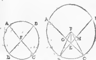
THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent rectangulum portionibus vnius contentum ęquale est ei, quod alterius portionibus continetur.

In circulo enim ABCD duæ rectę lineæ AC BD se se mutuo in puncto E secent. Dico rectangulum contentum AE EC ęquale esse ei, quod DE EB continetur. Si igitur AC BD per centrum transeant, ita vt E sit cẽtrum ABCD circuli; manifestum est æqualibus existentibus AE EC DE EB, et rectangulum contentum AE EC ęquale esse ei, quòd DE EB continetur. Itaque AC DB non transeant per centrum; et sumatur centrum circuli ABCD quod sit F: et ab F ad rectas lineas AC DB perpendiculares ducantur FG FH: iunganturq; FB FC FE. Quoniam igitur recta quędam linea GF per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit. quare AG ipsi GC est æqualis. Et quoniam recta linea AC secta est in partes æquales in puncto G, et in partes inęquales in E, erit rectangulum AE EC contentum vnà cum ipsius EG quadrato, ęquale quadrato ex GC. commune addatur ex GF quadratum. ergo rectãgulum AEC vnà cum iis, quæ ex EG GF quadratis æquale est quadratis ex CG GF. Sed quadratis quidem ex EG 3.huius 5.secundi.



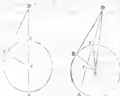
47 primi. GF æquale est quadratũ ex FE: quadratis vero ex CG GF æquale quod ex FC quadratum. rectangulum igitur AEC vnà cũ quadrato ex FE æquale est quadrato ex FC. est autem CF æqualis FB. Ergo rectangulum AEC vnà cum quadrato ex EF æquale est ei, quod ex FB quadrato. Eadẽ ratione et rectangulum DEB vnà cũ quadrato ex FE æquale est quadrato ex FB. ostensum autẽ est et rectãgulum AEC vnà cum quadrato ex FE æquale ei, quod ex FB quadrato. ergo rectãgulum AEC vnà cum quadrato ex FE æquale est rectangulo DEB vna cum quadrato ex FE. commune auferatur quod ex FE quadratum. reliquum igitur rectãgulum AEC reliquo DEB rectãgulo æquale erit. Quare si in circulo duę rectę lineę se se mutuo secẽt, rectangulũ portionibus vnius cõtentũ ęquale est ei, quod alterius portionibus continetur, id quod demõstrare oportebat.



THEOREMA XXX. PROPOSITIO. XXXVI.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, et ab eo in circulum cadant duæ rectę lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero contingat; rectangulum, quod tota secante, et exterius assumpta inter punctum, et curuam circumferentiam continetur, æquale erit ei, quod à contingente fit quadrato.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, et ab eo ad dictum circulum cadãt duæ rectę lineæ DCA DB: et DCA quidem circulum ABC secet, DB vero contingat. Dico rectãgulum ADC quadrato, quod fit ex DB æquale esse. Vel igitur DCA per centrum transit, vel non. transeat primum per centrum circuli ABC, quod sit F: et 18 huius. FB iungatur. erit angulus FBD rectus. Itaque quoniam recta linea AC bifariam secta est in F, et ipsi adiicitur CD; rectangulũ ADC vnà cum quadrato, quod 6 secundi. ex FC æquale erit ei, quod fit ex FD quadrato. æqualis autem est CF ipsi FB. ergo rectangulũ ADC vnà cum quadrato quod ex FB æquale est quadrato ex FD. Sed quadratum ex FD est ęquale quadratis ipsarum FB BD; rectus enim angulus est FBD. rectãgulum igitur ADC vna cum quadrato ex FB ęquale est ipsarum FB BD quadratis. commune auferatur quadratũ, quod ex FB. ergo reliquum ADC rectangulum quadrato quod fit à contingente DB ęquale erit. Sed DCA non transeat per centrum ABC circuli: sumaturq; centrũ E, et ab ipso E ad AC perpendicularis agatur EF et iungantur EB EC ED. rectus igitur est EFD angulus. Et quoniam recta linea quædam EF per centrum ducta, rectam lineam quandam AC non ductam per 3. huius. centrum ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit. quare AF ipsi FC est æqualis. Rursus quoniam recta linea AC bifariam secta est in F, atque ipsi adiicitur .secundi. CD, erit rectangulum ADC vnà cum quadrato ex FC æquale quadrato, quod ex FD, commune apponatur quod ex FE quadratum. rectangulum igitur ADC vnà cum



cum quadratis ex CF FE est equale quadratis ex DF FE. sed quadratis quidem ex DF FE æquale est, quod ex DE quadratū; etenim rectus est angulus EFD quadratis vero ex CF FE æquale est quadratum ex CE. ergo rectangulum ADC unà cū quadrato, quod ex CE est equale quadrato ex ED æqualis autem est CE ipsi EB. rectangulum igitur ADC una cum quadrato ex EB equale est ei, quod ex ED quadrato. sed quadrato ex ED æqualia sunt quadrata ex EB BD; si quidem rectus est angulus EBD. ergo rectangulum ADC una cū quadrato ex EB æquale est eis, quæ ex EB BD quadratis. commune auferatur quadratum ex EB. reliquum igitur AD C rectangulum quadrato, quod fit ex DB æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, et quæ deinceps sunt. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

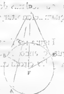
Ex proxime demonstratis duo corollaria sequuntur, vt et adnotauit Campanus. nempe hæc.

Si à pūcto extra circulum sumpto ducatur in circulum quotcumque rectę lineę, ipsum secantes, rectangula quę totis et earum portionibus extrinsecis cōtinentur, inter se æqualia sunt, quod singula quadrato lineæ contingentis sint æqualia.

A puncto extra circulum sumpto ductę duæ rectæ lineæ circulum contingentes inter se æquales sunt. etenim, vtriusque ipsarum quadrata sunt ęqualia rectangulo, quod tota linea ab eodem puncto ducta, quę circulum secet, et eius portione extrinseca continetur. ergo et ipsæ lineę æquales sint necesse est. neque vero plures quàm duæ esse possunt, quod ex demonstratis in octauo huius perspicue apparet.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO. XXXVII.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duę rectę lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero incidat; sit autem quod tota secante, et exterius assumpta inter punctum, et curuam circumferentiam continetur, equale ei, quod ab incidente fit quadrato: incidens linea circulum continget.



Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab ipso in circulum cadant duæ rectæ lineæ DC A DB, et DCA quidem circulum secet, DB vero incidat, sitq; rectangulum ADC equale quadrato, quod fit ex D B. Dico ipsam DB circulum ABC contingere. Ducatur enim recta linea DE contingens circulum ABC, et sumatur circuli ABC centrum quod sit F, iunganturq; FE FB FD. ergo angulus FED rectus est. Et quoniam DE circulum ABC contingit, secat autem DCA, rectangulum A DC æquale erit quadrato quod ex DE. sed rectangulum ADC ponitur æquale quadrato quod ex DB. quadratum igitur quod ex DE quadrato ex DB æquale erit, ac propterea linea DE ipsi DB æqualis. est autem et FE equalis FB. duę igitur DE EF duabus DB BF æquales sunt, et basis ipsarum communis FD. angulus igitur DEF est æqualis angulo DBF. rectus autem DEF. ergo et DBF est rectus, atque est FB producta diameter. quę vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur circulum contingit. ergo DB circulum ABC contingat necesse est. Similiter demonstrabitur et si centrum sit in ipsa AC. Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, et reliqua, quod demonstrare oportebat.

18 huius.

8 primi.

TERTII LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER QVARTVS

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.



DIFFINITIONES.

I.



IGVRA rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quãdo vnusquisque figuræ descriptæ angulus vnumquodque latus eius, in qua describitur, contingit.



II.

Figura similiter circa figuram describi dicitur quando vnumquodque latus descriptę vnumquemque angulum eius, circa quam describitur, contingit.

III.

Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando vnusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.



IIII.

Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando vnumquodque latus descriptę circuli circumferentiã cõtingit.



V.

Circulus similiter in figura rectilinea describi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquodque latus eius, in qua describitur, contingit.

Circulus

V I.

Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circumferentia vnumquemque angulum eius, circa quam describitur, contingit.



V I I.

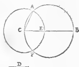
Recta linea in circulo aptari dicitur, quando eius extrema ad circuli circumferentiam se applicant.



PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

In dato circulo datæ rectę lineæ, quæ diametro eius maior nō sit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus A B C, data autem recta linea non maior circuli diametro D. oportet in circulo ABC rectę lineę D ęqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC diameter BC. Si quidem igitur BC sit ęqualis ipsi D, factum iam erit, quod proponebatur. etenim in circulo A B C aptata est A C rectæ lineæ D ęqualis. Sin minus, maior est BC quàm D, ponaturq́; ipsi D æqualis CE: et centro quidem C interuallo autem CE circulus describatur A E F: et CA iungatur. Itaque quoniam punctum C centrum est AEF circuli; erit CA ipsi CE æqualis. Sed D est æqualis CE. ergo et D ipsi AC æqualis erit. In dato igitur circulo ABC datæ rectę lineæ D, non maiori circuli diametro, æqualis aptata est AC. quod facere oportebat.



S C H O L I U M.

Cum varia sit circumscriptionum, et inscriptionum contemplatio, Euclides non multum admodum progressus est. nam perueniens ad hexagonum, & postremo quindecagoni angulos tradens, qui ad astrorum sciētiam magis pertinent, finem dicendi fecit. Primum autem theorema lemma quoddam est, pentagoni constitutioni inseruiens: & quæcumque in hoc ordinantur, in illa præordinari oportebat. Sed quoniam simpliciorem habet constructionem, quàm trianguli constitutio, iure merito ante alia theoremata positum est. Sciendum autem si quidem data recta linea diametro sit æqualis, vno tantum modo, vel etiam absque vlla experientia fieri problema; Si vero minor, duobus modis. ab eodem namque puncto C ad AF ductæ rectæ lineæ inter se æquales sunt.

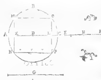
Problema

T .ltem : hoc est ex eorum numero, quae determinata appellantur. posset enim & hoc modo ext car .

In dato circulo datæ rectę lineæ ęqualem rectam lineam aptare. oportet autem datam rectam lineam diametro circuli non esse maiorem.

Licet etiam problema aliud absoluere huiusmodi.

In dato circulo rectam lineam rectę lineæ datę, quę diametro maior non sit, ęqualem, et alteri datæ parallelam aptare.



Sit datus circulus ABC, cuius centrum D, & recta linea non maior diametro circuli EF: altera vero recta linea sit, in qua G. Itaque oportet in circulo
31 primi *ABC aptare rectam lineam aequalem ipsi EF, & ipsi G parallelam. Ducatur per D recta linea ADC parallela ipsi G, quae circuli diameter erit. & si quidem AC sit ęqualis EF, factū iā erit quod proponebatur: si vero AC sit maior, quam EF, secetur EF bifariam in H: & ipsi HE aequalis abscindatur à semidiametro cir-*
11 primi. *culi DA, quae sit DK. ipsi vero HF aequali. fiat DL; perq; pūcta KL ipsi AC ad rectos angulos*
3 tertij. *ducantur MN OP; & MO iungatur. Quoniam igitur recta linea quędam AC per centrum ducta rectam lineam MN non ductam per centrum ad rectos angulos secat; & bifariam ipsam seca-*
14 tertij. *bit. quare MK est aequalis KN. Et ob eandem caussam OL est aequalis LP. sunt autem MN O*
28 primi. *P inter se aequales, cum aequaliter à centro distēt: & sunt parallelae, anguli enim MKL OL*
33 primi. *K recti sunt. quare et earum dimidiae KM LO & aequales erunt, & parallelae. At quae aequales, & parallelas ad easdem partes coniungunt, & ipsae aequales, et parallelae sunt. ergo MO est*
30 primi. *aequalis KL, hoc est ipsi EF, & parallela ipsi G, sunt enim vtręque ipsi KL parallelae. Eadem ratione iuncta NP demonstrabitur aequalis eidē EF, & parallela ipsi G. In circulo igitur ABC aptata est MO vel NP aequalis EF, & ipsi G parallela. quod facere oportebat.*

Ex quibus constat si quidem AC sit aequalis rectæ lineæ datę, vno dumtaxat modo problema absolui, si vero sit maior, duobus modis, vt in antecedēti dictum est.

PROBLEMA II. PROPOSITIO. II.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum describere.



Sit datus circulus ABC, datum autem triangulū DEF. oportet in ABC circulo describere triangulū
17 tertij triangulo DEF ęquiangulum. Ducatur recta linea GAH contingens circulum ABC in puncto A. et ad
23 primi. rectam lineam AH, et ad punctum in ea A angulo DEF ęqualis angulus constituatur HAC. rursus ad rectam lineam AG, et ad punctum in ipsa A angulo DFE ęqualis cōstituatur angulus GAB, et BC iungatur. Quoniā igitur circulū ABC contingit quædā recta HAG, à contactu aūt in circulū
32 primi. ducta est AC: erit HAC angulus ęqualis ei, qui in alterna circuli portione cōsistit, videlicet ipsi ABC. Sed HAC angulus ęqualis est angulo DEF. ergo et angulus ABC angulo

angulo DEF est æqualis. Eadem ratione et angulus ACB est æqualis angulo DFE. reliquus igitur B A C angulus reliquo E D F æqualis erit. Ergo triangulum A B C triangulo DEF est æquiangulum. et descriptum est in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulũ triangulũ descriptũ est. quod facere oportebat.

PROBLEMA III. PROPOSITIO III.

Circa datum circulum triangulo dato ęquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus A B C: datum autem triangulum DEF. oportet circa circulum ABC describere triãgulum triãgulo D E F æquiangulum. protrahatur ex vtraque parte EF ad puncta H G: et sumatur circuli ABC centrum K: et recta linea KB vt cumque ducatur: constituatur; ad rectam lineam K B, et ad punctum in ea K angulo quidem DEG æqualis angulus BKA; angulo aũt DFH æqualis angulus BKC. et per ABC puncta ducantur rectæ lineę L A M M B N N C L circulum A B C, contingentes. Quoniam igitur circulũ A B C contingunt LM MN NL, in punctis ABC, à centro autem K ad ABC puncta, ducuntur KA KB K C; erunt anguli ad puncta A B C recti. Et quoniam quadrilateri A M B K anguli quattuor quattuor rectis æquales sunt; etenim in duo triangula diuiditur; quorum anguli KAM KBM sunt recti; erunt reliqui AKB AMB duobus rectis æquales. Sunt autem et DEG DEF ęquales duobus rectis. anguli igitur AKB AMB angulis DEG DEF æquales sunt; quorum AKB ipsi DEG est æqualis ergo reliquus AMB reliquo DEF ęqualis erit. Similiter demonstrabitur angulus L N B ipsi DFE æqualis. ergo et reliquus MLN est æqualis reliquo E D F. æquiangulum igitur est L M N triangulum triangulo D E F, et descriptum est circa circulum A B C. Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triãgulum descriptum est. quod facere oportebat.

23.primi.
17.tertij.
18.tertij.





PROBLEMA IIII. PROPOSITIO IIII.

In dato triangulo circulum describere.

Sit datum triangulum ABC. oportet in triangulo ABC circulum describere. secentur anguli ABC BCA bifariam rectis lineis BD CD, quæ conueniant inter se in D puncto; et à puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpendiculares ducantur DE DF DG. Et quoniam angulus A B D est æqualis angulo CBD: est autem et rectus BED recto BFD ęqualis: erunt duo triangula EBD D B F, duos angulos duobus angulis æquales habentia, et vnum latus vni lateri ęquale, et vtrique commune B D, quod scilicet vni æqualium angulorum subtenditur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt: atque erit DE ęqualis D F. et eadem ratione D G ęqualis D F. ergo et D E ipsi D G est ęqualis. tres igitur rectæ lineæ DE DF DG inter se æquales sunt; quare centro D interuallo autem vna ipsarum DE DF DG circulus describtus etiam per reliqua transibit puncta; et rectas lineas AB BC CA cõtinget; propterea quòd recti sunt ad EFG anguli. si enim ipsas secet, quæ ab extremitate diametri

9.primi.
12.primi.
26.primi.



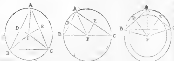
metri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulũ cadet. quòd est absurdũ. nõ igi-
16. tertij. tur cẽtro D, interuallo aũt vna ipsarum DE DF DG circulus descriptus secabit rectas lineas AB BC CA. quare ipsas cõtinget; atque erit circulus descriptus in triãgulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG descriptus est. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Quæsitum est à nonnullis, quomodo in triangulo quadratum describi possit, quamquam fortasse impropriè in eo dicatur describi. Fuerunt qui in triangulo aequilatero tantum peoblema absoluerunt. Nos autem vniuerse in omnibus absoluere aggrediemur, postea quàm nonnulla in quinto, ac sexto libro demonstrata fuerint.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Circa datum triangulum circulum describere.



Sit datũ triangulum ABC. oportet circa datum triangulũ ABC circulũ describere.
10 primi. secentur AB AC bifariã
11 primi. in D E punctis: et à punctis D E ipsis AB AC ad rectos angulos ducantur DF EF, quæ quidem vel intra triangulum ABC conuenient, vel in recta linea BC, vel extra ipsam. Conueniant primum intra triangulum in puncto F: et BF FC FA iungantur. Quoniam igitur AD est æqualis DB, communis autem, et ad rectos angu-
4. primi. los DF; erit basis AF basi FB ęqualis. Similiter ostendetur et CF ęqualis FA. ergo et BF est æqualis FC. tres igitur FA FB FC inter se æquales sunt. quare centro F, interuallo autem vna ipsarum FA FB FC circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit: atque erit circulus descriptus circa triangulum ABC. et describatur vt ABC. Sed DF EF conueniant in recta linea BC, in puncto F, vt habet in secunda figura, & AF iungatur. Similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. Postremo DF EF conueniant extra triangulum ABC rursus in F puncto, vt in tertia figura: et iungantur AF FB FC. Et quoniam rursus AD est æqualis DB, communis autem, et ad rectos angulos DF; basis AF basi FB æqualis erit. Similiter demonstrabimus et CF ipsi FA ęqualem esse. quare et BF est æqualis FC. Rursus igitur centro F, interuallo autem vna ipsarum FA FB FC circulus descriptus et per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum ABC descriptus. et describatur vt ABC. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. quod facere oportebat.

Et manifestum est, quando centrum circuli intra triangulum cadit, angulum BAC existentem in portione semicirculo maiore minorem esse recto. quando autem centrum circuli cadit in recta linea BC, angulum BAC, quòd sit in semicirculo, rectum esse. & quãdo extra BC, quòd sit in portione minore semicirculo, recto esse maiorem. Quare et quando datus angulus minor sit recto, DF EF intra triangulum conuenient: quãdo autem rectus in ipsa BC, et

& quando maior recto, extra BC. quod ostendere oportebat.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO. VI.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus ABCD. oporter in ABCD circulo quadratum describere. Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter se AC BD: et AB BC CD DA iungantur. Quoniam igitur BE est ęqualis ED, etenim centrum est E, communis autem et ad rectos angulos EA; erit basis BA ęqualis basi AD. Et eadem ratione vtraque ipsarum BC CD vtrique BA AD ęqualis. æquilaterum igitur est ABCD quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim recta linea BD diameter est ABCD circuli, erit BAD semicirculus. quare angulus BAD rectus est. et eadem ratione 31. tertij.
vnusquisque ipsorum ABC BCD CDA est rectus. rectangulum igitur est ABCD quadrilaterum. ostensum autem est, et æquilaterum esse. ergo quadratum necessario erit, et descriptum est in circulo ABCD. In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD descriptum est. quod facere oportebat.



PROBLEMA VII. PROPOSITIO VII.

Circa datum circulum quadratnm describere.

Sit datus circulus ABCD. oportet circa ABCD circulũ quadratũ describere. ducantur circuli ABCD duę diametri AC BD ad rectos inter se angulos, et per pũcta A BCD ducãtur circulũ ABCD cõtingentes FG GH HK 17. tertij.
KF. Quoniã igitur FG contingit circulũ ABCD, à centro autẽ E ad cõtactũ qui est ad A ducitur EA; erũt anguli ad 18. tertij.
A recti. Eadem ratione et anguli ad puncta B C D recti sunt. Et quoniam angulus AEB rectus est, est autem et rectus EBG; erit GH ipsi AC parallela. Eadẽ ratione et 28 primi.
AC parallela est FK. Similiter demonstrabimus et vtramque ipsarum GF HK ipsi BED parallelam esse. quare et GF est parallela HK. parallelogramma igitur sunt GK GC AK FB BK, ac propterea GF quidem est ęqualis HK, GH vero ipsi FK. Et quoniam AC æqualis est BD: Sed AC quidem vtrique 34. primi.
ipsarum GH FK est æqualis; BD vero æqualis vtrique GF HK. et utraque GH FK vtrique GF HK æqualis erit. Aequilaterum igitur est FGHK quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim parallelogrammum est GBEA, atque est rectus AEB angulus, et ipse AGB rectus erit. Similiter demonstrabimus angulos etiã qui ad puncta HKF rectos esse. rectangulum igitur est quadrilaterum FGHK; demonstratum autem est et æquilaterum. Ergo quadratum sit necesse est. et descriptũ est circa circulũ ABCD. Circa datum igitur circulum quadratum descriptum est. quod facere oportebat.

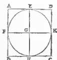


PROBLEMA VIII. PROPOSITO VIII.

In dato quadrato circulum describere.

Sit datum quadratum ABCD. oportet in quadrato ABCD circulũ describere. Secetur vtraque ipsarũ AB AD bifariam in punctis F E. et per E quidem alterutri 10 primi.
ipsarum AB CD parallela ducatur EH. per F vero ducatur FK parallela alterutri AD BC. parallelogrammum 31 primi.





igitur est vnũquodque ipsorum AK KB AH HD A
34 primi. G GC BG GD : et latera ipsorum quę ex opposito sunt ęqualia. Et quoniam DA est æqualis AB: et ipsius quidẽ AD dimidia est AE; ipsius vero AB dimidia AF; erit AE ipsi AF ęqualis. quare et opposita latera ęqualia sunt. ergo FG est æqualis GE. Similiter demonstrabimus et vtramque ipsarum GH HK vtrique FG GE æqualem esse. quattuor igitur GE GF GH GK inter se sunt ęquales. Itaque centro quidem G, interuallo autem vna ipsarum GE GF GH GK circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; et rectas lineas AB BC CD DA continget, propterea quòd anguli ad E F H K recti sunt. Si enim circulus secabit rectas lineas AB BC CD DA, quę ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur
16. tertij. intra circulum cadet. quod est absurdum. non igitur centro quidem G, interuallo autem vnà ipsarum GE GF GH GK circulus descriptus rectas lineas AB BC CD DA secabit. quare ipsas necessario continget: atque erit descriptus in quadrato AB CD. In dato igitur quadrato circulus descriptus est. quod facere oportebat.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO IX.

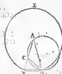
Circa datum quadratum circulum describere.



Sit datum quadratum ABCD. oportet circa ABCD quadratum circulum describere. Iungãtur enim AC BD, quę se inuicem in puncto E secent Et quoniam DA est æqualis AB, communis autem AC; duæ DA AC duabus BA AC ęquales sunt; et basis DC æqualis basi CB; erit angulus DAC angulo BAC æqualis. angulus igitur DAB bifariam sectus est recta linea AC. Similiter demonstrabimus vnumquemque angulorum ABC BCD CDA rectis lineis AC DB bifariam sectum esse. Quoniam igitur angulus DAB angulo ABC est æqualis. atque est anguli quidem DAB dimidius angulus EAB, anguli vero ABC dimidius EBA; et EAB angulus angulo EBA æqualis erit. quare et latus EA lateri EB est ęquale. Similiter demonstrabimus, et vtramque rectarum linearum EC ED vtrique EA EB æqualem esse. ergo quattuor rectæ lineæ EA EB EC ED inter se sunt æquales. centro igitur E, interuallo autem vna ipsarum EA EB EC ED circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit. atque erit descriptus circa ABCD quadratum. describatur vt ABCD. circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. quod facere oportebat.

PROBLEMA X. PROPOSITIO X.

Aequicrure triangulum cõstituere, habens vtrumque angulorum, qui sunt ad basim duplum reliqui.

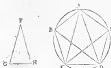


Exponatur recta quędam linea AB, et secetur in
11. secundi. C puncto, ita vt rectangulum contentum AB BC æquale sit ei, quod ex CA describitur quadrato: et centro quidem A, interuallo autem AB circulus de
1. huius. scribatur BDE: apteturq; in BDE circulo recta linea BD æqualis ipsi AC, quæ non sit maior diametro circuli BDE. et iunctis DA DC, circa ADC triãgulum circulus ACD describatur. Itaque quoniam rectangulum ABC æquale est quadrato, quod fit ex AC; æqualis autem est AC; ipsi BD, erit ABC rectangulum quadrato

quadrato quod ex BD æquale. Et quoniam extra circulum ACD sumptum est aliquod punctum B: et à puncto B in circulum ACD cadunt duę rectæ lineæ BCA BD, quarum altera quidem secat, altera vero incidit, atque est rectangulũ ABC æquale quadrato, quod ex BD, recta linea BD circulum ACD continget. Quoniam igi- *Vlt. tertij.*
tur BD contingit, et à contactu, qui ad D ducta est DC; erit BDC angulus æqualis *32. tertij.*
ei, qui in alterna circuli portione constituitur, videlicet angulo DAC. Quòd cum angulus BDC æqualis sit ipsi DAC, communis apponatur CDA. totus igitur BDA est æqualis duobus angulis CDA DAC. Sed ipsis CDA DAC exterior an- *32 primi.*
gulus BCD est ęqualis. ergo et BDA ęqualis est ipsi BCD. sed BDA angulus est æqualis angulo CBD, quoniam et latus AD lateri AB est ęquale. ergo et DBA ipsi BCD æqualis erit. Tres igitur anguli BDA DBA BCD inter se æquales sunt. Et quoniam angulus DBC æqualis est angulo BCD, et latus BD lateri *6 primi.*
DC est ęquale. Sed BD ponitur æqualis ipsi CA. ergo et AC est æqualis CD. quare et angulus CDA æqualis est angulo DAC. anguli igitur CDA DAC ipsius anguli DAC dupli sunt. est autẽ et BCD angulus angulis CDA DAC æqualis. ergo et BCD duplus est ipsius DAC. Sed BCD est æqualis vtrique ipsorũ BDA DBA. quare et vterque BDA DBA ipsius DAB est duplus. Aequicrure igitur triãgulum constitutum est ADB, habens vtrumque eorum angulorum, qui sunt ad basim, duplum reliqui. quod facere oportebat.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO. XI.

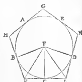
In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.



Sit datus circulus ABCDE. oportet in ABCDE circulo pentagonũ æquilaterum, et ęquiãgulum describere. Exponatur triangulum æquicrure FGH, habens vtrumque corũ qui sunt ad G H angulorum duplũ anguli qui est ad F: et describatur in circulo ABCDE triangulo FGH æquiangulum triangulum ACD, ita vt angulo quidem, qui est ad F æqualis sit angulus CAD: vtrique vero ipsorum, qui ad GH sit æqualis vterque ACD CDA. et vterque igitur ACD CDA anguli CAD est duplus. *Ex antecedente.* *2. huius.*
Secetur vterque ipsorum ACD CDA bifariam rectis lineis CE DB: et AB BC *9. primi.*
CD DE EA iũgãtur. Quoniã igitur vterque ipsorũ ACD CDA duplus est ipsius CAD, et secti sunt bifariã rectis lineis CE DB; quinque anguli DAC ACE ECD CDB BDA inter se sunt æquales. æquales autẽ anguli in æqualibus circumferen- *26. tertij.*
tiis insistunt. quinque igitur circumferentię AB BC CD DE EA ęquales sunt inter se. Sed ęquales circũferẽtias æquales rectę lineę subtendunt. ergo et quinque *29. tertij.*
rectę lineę AB BC CD DE EA inter se æquales sunt. æquilaterum igitur est ABCDE pentagonum. Dico et æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentia AB æqualis est circumferentiæ DE, communis apponatur BCD. tota igitur ABCDE circumferentia toti circumferentię EDCB est æqualis, et in circumferentia quidẽ ABCD insistit angulus AED, in circũferẽtia vero EDCB insistit BAE. Ergo et BAE angulus est ęqualis angulo AED. Eadem ratione, et vnusquisque angulorum ABC BCD CDE vnicuique ipsorum BAE AED est æqualis. ęquiangulum igitur est ABCDE pentagonũ. ostensum autem est et ęquilaterũ esse. Quare in dato circulo pentagonum ęquilaterum, et æquiangulum descriptum est. quod facere oportebat.

PROBLEMA XII. PROPOSITIO. XII.

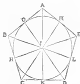
Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, et ęquiangulum describere.



Sit datus circulus ABCDE. oportet circa circulum ABCDE pentagonum æquilaterum, et (Ex antecedente.) æquiangulum describere. intelligantur pentagoni in circulo descripti angulorum puncta ABCDE, ita vt circũferentiæ AB BC CD DE (17. tertij.) EA sint ęquales; et per puncta ABCDE ducantur circulum contingentes GH HK KL LM MG. et sumpto circuli ABCDE centro F iungantur FB FK FC FL FD. quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in puncto C, et à centro F ad contactum, qui est ad C ducta (18. tertij.) est FC: erit FC ad ipsam KL perpendicularis. rectus igitur est vterque angulorum qui sunt ad C. Eadem ratione et anguli qui ad puncta B D recti sunt. et quoniam rectus angulus est FCK, quadratum quod fit ex FK ęquale est quadratis quæ ex FC CK. Et ob eandem caussam quadratis ex FB, BK ęquale est quod ex FK quadratũ. Quadrata igitur ex FC CK quadratis ex FB BK æqualia sunt: quorum quod ex FC ei quod ex FB est ęquale. Ergo reliquũ quod ex CK reliquo quod ex BK æquale erit. æqualis igitur est BK ipsi CK. Et quoniã FB est æqualis FC, communis autem FK, duæ BF FK duabus CF FK ęquales sunt: et (8. primi.) basis BK est ęqualis basi KC; erit angulus quidem BFK angulo KFC æqualis, angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur est angulus BFC anguli KFC, et angulus BKC duplus ipsius FKC. Eadem ratione et angulus CFD anguli CFL est duplus: angulus vero CLD duplus anguli CLF. et quoniam circumferentia BC circumfe(27. tertij.)rentię CD est æqualis, et angulus BFC angulo CFD ęqualis erit. atque est angulus quidem BFC anguli KFC duplus: angulus vero DFC duplus ipsius LFC. æqualis igitur est angulus KFC angulo CFL. Itaque duo triangula sũt FKC FLC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterũ alteri, et vnum latus vni lateri æqua(26 primi.)le, quod ipsis commune est FC. Ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo æqualem. recta igitur linea KC est æqualis rectæ CL, et angulus FKC angulo FLC. Et quoniã KC est æqualis CL, erit KL ipsius KC dupla. Eadem ratione et HK ipsius BK dupla ostendetur. Rursus quoniam BK ostensa est ęqualis ipsi KC: atque est KL quidem dupla KC, HK vero ipsius BK dupla: erit HK ipsi KL æqualis. Similiter et vnaquęque ipsarum GH HM ML ostendetur æqualis vtrique HK KL. Aequilaterum igitur est GHKLM pentagonum. Dico etiam ęquiangulum esse. Quoniam enim angulus FKC est æqualis angulo FLC: et ostensus est ipsius quidem FKC duplus angulus HKL; ipsius vero FLC duplus KLM: erit et HKL angulus angulo KLM æqualis. Simili ratione ostendetur et vnusquisque ipsorum KHG HGM GML vtrique HKL KLM æqualis. Quinque igitur anguli GHK HKL KLM LMG MGH inter se ęquales sunt. ergo ęquiangulum est GHKLM pentagonũ. ostensum autem est etiam æquilaterum esse: et descriptum est circa ABCDE circulum. quod facere oportebat.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

In dato pentagono, quod æquilaterum, et ęquiangulum sit, circulum describere.



Sit datum pentagonum equilaterum, et equiangulum ABCDE. oportet in A B C D E pentagono circulum describere. secetur uterque angulorum BCD CDE bifariam rectis lineis CF DF; et à puncto F, in quo conueniunt inter se CF DF, ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC est equalis CD, communis autem CF, duæ B C C F duabus D C CF equales sunt, et angulus B CF est æqualis angulo DCF. basis igitur BF basi FD est æqualis, et BFC triangulum equale triãgulo DCF, et reliqui anguli reliquis angulis equales, quibus equalia latera subtenduntur. angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. Et quoniam angulus CDE anguli CDF est duplus, et angulus quidem CDE angulo ABC, angulus vero CDF angulo CBF æqualis; erit et CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo FBC equalis. angulus igitur ABC bifariã sectus est recta linea BF. Similiter demonstrabitur et vnumquemque angulorum BAE AED rectis lineis AF FE bifariam sectum esse. Itaque à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur perpendiculares FG FH FK FL FM. Et quoniam angulus HCF est equalis angulo KCF; est autem et rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triangula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, et vnum latus vni lateri equale, commune scilicet vtrisque FC, quod vni equalium angulorum subtenditur. ergo et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK equalis. Similiter ostẽdetur et vnaquæque ipsarum FL F M FG æqualis vtrique FH FK. quinque igitur rectæ lineę FG FH FK FL FM inter se æquales sunt. quare centro F, interuallo autem vna ipsarum FG FH FK FL FM circulus descriptus, etiam per reliqua transibit pũcta, et rectas lineas AB BC CD DE EA cõtinget, propterea quòd anguli ad G H K L M recti sunt. Si enim non continget, sed ipsas secabit, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod absurdũ esse ostensum est. non igitur centro F, et interuallo vno ipsorum punctorum G H KLM circulus descriptus rectas lineas AB BC CD DE EA secabit. quare ipsas cõtingat necesse est. describatur vt GHKLM. In dato igitur pentagono quod est equilaterum, et equiangulum, circulus descriptus est. quod facere oportebat.

9.primi. 4 primi. 26.primi. 16.tertij.

PROBLEMA. XIIII. PROPOSITIO. XIIII.

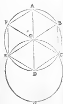
Circa datum pentagonum, quod equilaterum, et equiangulum sit, circulum describere.

Sit datum pentagonum æquilaterum et æquiangulum ABCDE. oportet circa pentagonum ABCDE circulum describere, secetur vterque ipsorum BCD CDE angulorum bifariam rectis lineis CF FD: et à puncto F, in quo conueniunt rectæ lineæ ad puncta BAE ducantur FB FA FE. Similiter vt in antecedenti demonstrabitur vnumquemque angulorum CBA BAE AED rectis lineis BF FA FE bifariam sectum esse. Et quoniam angulus BCD angulo CDE est equalis: atque est anguli quidem BCD dimidius angulus FCD, anguli vero CDE dimidius CDF; erit et FCD angulus æqualis angulo FDC. quare et latus CF lateri FD est equale. Similiter demõstrabitur et vnaquæque ipsarum FB FA FE equalis vnicuique FC FD. quinque igitur rectę lineæ FA FB FC FD

FC FD FE inter se æquales sunt. ergo centro F, et interuallo vna ipsarũ FA FB FC FD FE circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta atque erit descriptus circa pẽtagonum ABCDE, quod æquilaterum est, et æquiangulum. describatur, et sit ABCDE. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum et ęquiangulum circulus descriptus est. quod facere oportebat.

PROBLEMA XV. PROPOSITIO. XV.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & ęquiangulum describere.



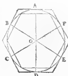
Sit datus circulus ABCDEF. oportet in circulo ABCDEF hexagonum ęquilaterum, et æquiangulum describere. Ducatur circuli ABCDEF diameter AD, sumaturq; centrum circuli G, et centro quidem D, interuallo autem DG circulus describatur EGCH, iunctæq; EG CG ad puncta B F producãtur, et iungantur AB BC CD DE EF FA. Dico hexagonum ABCDEF æquilaterum, et æquiangulum esse. Quoniam enim G punctum centrum est ABCDEF circuli, erit GE ipsi GD æqualis. Rursus quoniam D cẽtrum est circuli EGCH, erit DE ęqualis DG. Sed GE ipsi GD æqualis ostensa est. ergo GE ipsi ED est æqualis. æquilaterum igitur est EGD
5. primi. triãgulum, ideoq; tres ipsius anguli EGD GDE DEG inter se æquales sunt, quoniam ęquicruriũ trian
32. primi. gulorum anguli ad basim inter se sunt æquales: et sunt trianguli tres anguli ęquales duobus rectis. angulus igitur EGD duorum re-
13. primi. ctorum tertia pars est. Similiter ostendetur et DGE duorum rectorum tertia. Et quoniam recta linea CG super rectam EB insistens angulos qui deinceps sunt EGC CGB duobus rectis æquales efficit; erit et reliquus CGB tertia duorum rectorum. anguli igitur EGD DGC CGB inter se sunt ęquales. ergo et qui ipsis ad ver
26. tertij. ticem sunt anguli BGA AGF FGE æquales sunt angulis EGD DGC CGB. quare sex anguli EGD DGC CGB BGA AGF FGE inter se æquales sunt. sed æqua
29. tertij. les anguli ęqualibus circumferentiis insistunt. Sex igitur circumferentiæ AB BC CD DE EF FA inter se sunt ęquales. æquales autem circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. ergo et sex rectæ lineę inter se æquales sint necesse est, ac propterea æquilaterum est ABCDEF hexagonum. Dico et æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentia AF circumferentię ED est ęqualis, communis apponatur circumferentia ABCD. tota igitur FABCD circumferentia ęqualis est toti circumferentiæ EDCBA. et circumferentiæ quidem FABCD angulus FED insistit, circumferentiæ vero EDCBA insistit angulus AFE. angulus igitur AFE angulo DEF est æqualis. Similiter ostẽdetur et reliqui anguli hexagoni ABCDEF sigillatim æquales vtrique ipsorum AFE FED. ergo æquiangulum est ABCDEF hexagonũ. ostensum autem est et æquilaterum esse et descriptum est in circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, et ęquiangulum descriptum est. quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est hexagoni latus ei, quę est ex centro circuli æquale esse. Et si per puncta ABCDEF contingentes circulum

ducamus

ducamus, circa circulũ describetur hexagonum ęquilaterum et ęquiangulum cõsequenter ijs, quæ in pentagono dicta sunt, & præterea similiter in dato hexagono circulum describemus, et circumscribemus. quod facere oportebat.

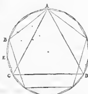


PROBLEMA XVI.

PROPOSITIO. XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, et æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCD. oportet in ABCD circulo quindecagonum æquilaterum et ęquiangulum describere. Describatur in circulo ABCD trianguli quidẽ æquilateri in ipso descripti latus AC; pentagoni vero æquilateri latus AB. Quarũ igitur partium est ABCD circulus quindecim, earum circumferentia quidem ABCD tertia existens circuli, erit quinque; circumferentia vero AB, quæ quinta est circuli; erit triũ. ergo reliqua BC est duarum. secetur BC bifariã in puncto E. quare vtraque ipsarum BE EC circumferentiarum, quintadecima pars est ABCD circuli. Si igitur iungentes BE EC æquales ipsis in continuum rectas lineas in circulo ABCD aptabimus, in ipso quindecagonum æquilaterum, et ęquiangulum descriptum erit. quod facere oportebat.



Similiter autem iis, quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli diuisiones contingentes circulum ducamus, circa ipsum describetur quindecagonum ęquilaterum, et ęquiangulum. Et insuper in dato quindecagono æquilatero, et ęquiangulo circulum describemus, et circumscribemus.

QVARTI LIBRI FINIS.

SCHOLIVM.

In quinto libro propositum est de analogijs tractare; hic enim liber communis est geometriæ, arithmeticæ, musicæ, & omni simpliciter mathematicæ disciplinæ: nam quæ in ipso demonstrantur non solum geometricis theorematibus congruunt, sed & omnibus, quæ ad mathematicas, vt dictum est, disciplinas referuntur. propositum igitur huiusmodi est. librum autem dicunt esse Eudoxi cuiusdam, qui Platonis magister fuit. Itaque quoniam propositum est de analogijs tractare, analogia vero est proportionum quarundam habitudo; necesse est prius cognoscere, quænam sint hæ proportiones. simplicium enim cognitio cognitionem compositorum præcedere debet. si igitur quæ dam inter se comparētur, verbi gratia duæ magnitudines, ipsæ quidem termini vocantur, & alterius ad alteram transitus, distantia: comparatio autem habitudo, quam antiqui proportionem appellarunt. at huius proportionis cum alia proportione iuxta similitudinem quandam comparatio vel habitudo analogia nuncupatur. non enim vt magnitudo comparatur, sed vt proportio cum proportione. hæc autem comparatio proportio proportionis dicitur; vt si sint duæ rectæ lineæ, quarum altera ad reliquam duplam proportionem habeat, quadratum illius, quæ duplam habet proportionem, ad quadratum reliquæ quadruplam proportionem habebit eius, quam maior recta linea habet ad minorem; nam quæ longitudine sunt dupla potentia quadrupla sunt. quadratorum igitur proportio cum sit quadrupla, dupla erit proportionis rectarum linearum, quæ est dupla: vocatur autem hæc proportionis proportio, quæ quidem sub quantitate est; etenim proportio est duplex, alia in æstimatione, alia in quantitate. & eius quidem, quæ in æstimatione nulla species est, quæ ad præsentem contemplationem vtilis sit; eius vero, quæ in quantitate species sunt quinque, alia enim est multiplex vt sex trium, alia superparticularis vt quattuor trium, & alia superpartiens, vt quinque trium, & hæ quidem simplices sunt, quarum adhuc simplicior est multiplex, alia uero duæ ex harum compositione nascuntur, videlicet multiplex superparticularis, vt est septem triū, & multiplex superpartiens, vt octo trium. sub proportionales vero sunt minores maiorum, vt sub multiplex, subparticularis, & similiter reliqua. sciendum autem est hunc librum in duas partes diuidi. & prima quidem pars simpliciorum doctrinam continet, videlicet multiplicium. secunda vero vniuersè de omnibus agit proportionibus. oportet enim in omnire, vt dictum est, simplicium cognitionem præcedere. quemadmodum aūt liber ipse, ita & diffinitiones diuiduntur; primę enim sunt de partibus, et multiplicibus, deinde sequuntur vniuersaliores de oībus proportionibus.

Analogia.

Simplicium cognitio cognitionē cōpositorū præcedere debet.

Termini

Comparatio est habitudo, quā antiqui proportionem appellarunt.

Analogia.

Proportio proportionis

Proportionis in quantitate species sūt quinque.

Quintus liber in duas partes diuiditur.

EVCLIDIS

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER QVINTVS
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS

Federici Commandini Vrbinatis.



DIFFINITIONES.

I.



PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, quando minor maiorem metitur.

SCHOLIVM.

Pars, vt multi arbitrantur, est minor eo, quod est eiusdẽ speciei, vt 3 est pars 5. apud geometram vero est, quæ metitur maius, quando reliquum æquale fit ei, quod metitur: quando autem non fit æquale, non est pars, vt 3.5, reliquuntur enim 2, quæ non sunt æqualia 3. quare 3 non sunt pars 5, sed partes, videlicet tres quintę $\frac{3}{5}$.

F. C. COMMENTARIVS.

Pars etiam apud geometram sumitur pro ea, quae simpliciter minor est maiore eiusdem speciei: vt cum dicitur, omne totum est maius sua parte. ergo pars quatenus multiplici opponitur, erit ea, quae metitur maius, videlicet ipsum multiplex, quae alio nomine submultiplex, & à nonnullis pars aliquota appellatur; quatenus vero opponitur toti nulla est necessitas, vt totum metiatur.

II.

Multiplex est maior minoris, quando maiorem minor metitur.

III.

Proportio est duarum magnitudinum eiusdem generis, quatenus ad quantitatem pertinet, mutua quædam habitudo.

SCHOLIVM.

Proportionem] *dicit, vt significet habitudinem*, duarum magnitu-

dinum] *vt separet ab alijs speciebus quantitatis.* eiusdem generis]*vt nequis lineam cum superficie comparet. hæc enim inter se proportionem nullam habent.* quatenus ad quantitatem pertinet] *vt separet ab infinitis magnitudinibus; quantitas enim continua est terminus continui nõ infiniti, & quantitas discreta est discreti non infiniti. sed discretum nõ est magnitudo, multitudo enim est.* quædã habitudo] *quòd quinque sint habitudinum species, vt dictum iam fuit.*

F. C. COMMENTARIVS.

Quatenus ad quantitatem pertinet] *vide ne hoc potius dictum sit, vt intelligatur proportio, quae in quantitate, non item ea, quae in aestimatione consistit.*

IIII.

Portionem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ se inuicem superare possunt.

SCHOLIVM.

In numeris quidem omnis proportio rationalem habet quantitatem, in magnitudinibus autem est quædam proportio, quæ numero exprimi non potest; sunt enim quædam, quorum dumtaxat cognoscitur excessus, quo alterũ superat alterũ; quantitas aũt excessus cognosci nequit. hæc igitur proportionem habere dicuntur, nempe excessus, non adhuc eam, quam numerus habet ad numerum, hoc est rationalem; ac propterea in diffinitione proportionis magnitudinum apposuit, quatenus ad quãtitatem pertinet, *videlicet continuam, non omnino autem quatenus ad quantitatem discretam, & rationalem. vniuersalius igitur diffiniens, quæ nam sint proportionem habentia dixit,* quæ multiplicatæ se inuicem superare possunt: *hoc enim & rationalibus, & irrationalibus congruit, velut diameter quadrati, vt in rationalibus quidem proportionem habet ad latus, vt in excessu vero proportionem habet, quam maius ad minus, & potest latus multiplicatum aliquando diametrum superare.*

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc idcirco dictum videtur, vt infinitae magnitudines à proportionibus excludantur. finita enim magnitudo quantumlibet multiplicata tantum abest, vt infinitam magnitudinem exuperet, vt ne aequare quidem possit vnquam.

V.

In eadem proportione magnitudines esse dicuntur prima ad secundam, & tertia ad quartam, quando primæ, et tertiæ æquemultiplices,

tiplices, secundæ, et quartę æque multiplices iuxta quamuis multiplicationem vtraque vtramque vel vnà superant, vel vnà ęquales sunt, vel vnà deficiunt inter se comparatæ.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit prima magnitudo A, secunda B, tertia C, & quarta D: sumanturque primae, ac tertiae, videlicet ipsarum A C aeque multiplices E F, vt sit E aeque multiplex A, atque F ipsius C. rursus sumantur ipsarum B D, secundae scilicet, & quartae aeque multiplices GH; & siquidem maiori existente E quàm G, etiam F sit maior quàm H, vel si E aequali existente ipsi G, sit F aequalis H. vel si minori existente, sit minor iuxta quamuis multiplicationẽ, tunc dicetur A ad B eandem habere proportionem, quam C ad D. excessum autem, ac defectum simpliciter intelligere oportet, non secundum proportionem, vt voluit Campanus; alioqui idem per idem explicaretur, quod est absurdum. Propositis igitur quatuor magnitudinibus commensurabilibus, si velimus statim dignoscere, an eandem proportionem habeant, multiplices ita aptabimus, vt multiplex primae multiplici secundae fiat aequalis; & si quidem multiplex tertiae sit aequalis multiplici quartae, tunc prima ad secundam eandem proportionem habere deprehendetur, quam tertia ad quartam. Si vero multiplex tertiae sit minor multiplici quartę, prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam. quòd si multiplex tertiae sit maior multiplici quartae, habebit prima ad secundam minorem proportionem, quàm tertia ad quartam.

VI.

Magnitudines, quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

VII.

Quando autem æque multiplicium multiplex quidem primæ superauerit multiplicem secundę, multiplex vero tertiæ non superauerit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam maiorem proportionem habere dicitur, quàm tertia ad quartam.

F. C. COMMENTARIVS.

Maneant eadem, quae supra: & sumptis ipsarum AC aeque multiplicibus EF; itemq; ipsarum BD aeque multiplicibus GH, si quidem E superet G, F vero non superet H, vel si E sit aequalis ipsi G, & F minor, quàm H, tunc A ad B maiorem proportionẽ habere dicitur, quàm C ad D.

VIII.

Analogia est proportionum similitudo.

IX.

Analogia vero in tribus minimis terminis consistit.

X.

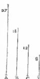
Quando tres magnitudines proportionales sint, prima ad tertiam duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad secundam.

SCHOLIVM.

Non dicit duas proportiones vnius duplas esse, quod etiam est verum; sed proportionem, quæ ex duabus constat, esse duplam, vt 8.4.2, & rursus 9 3 1. proportio igitur, quæ ex duabus constat dupla est. magnitudo autem in duplis quidem magnitudinibus quadrupla est, in triplis vero nonupla, & in quadruplis sexdecupla. demonstrabitur enim deinceps quæ longitudine sunt dupla, potentia quadrupla esse: & quę longitudine tripla, potentia nonupla. quadratorum igitur proportio cum quadrupla sit, dupla est proportionis laterum, quę est dupla, etenim dupli duplus quadruplus est.

Quando

XI.



Quando autem quattuor magnitudines ſint proportionales, prima ad quartam triplam habere proportionem dicetur eius, quam habet ad ſecundam: & ſemper deinceps vna plus, quo ad analogia proceſſerit.

F. C. COMMENTARIVS.

Decima, & vndecima diffinitio terminos requirunt neceſſario inęquales, & primum ipſorũ maiorem. nam ſi aequales ſint eadem eſt primi ad ſecundum, & ad tertium proportio. Si vero primus ſit minor, non poteſt primus ad tertium duplam proportionem habere proprie eius, quam habet ad ſecundum, cum primi ad ſecundum maior ſit proportio, quàm ad tertium ex 8. huius.

XII.

Homologæ, vel ſimilis rationis magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

XIII.

Permutata ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, et conſequentis ad conſequentem.



F. C. COMMENTARIVS.

Sit A ad B, vt C ad D. erit permutando A ad C, vt B ad D. hoc autem ita eſſe demonſtrabitur in 16 propoſitione huius libri.



XIIII.

Conuerſa ratio eſt ſumptio conſequentis, vt antecedentis ad antecedentem, vt ad conſequentem.



F. C. COMMENTARIVS.

Sit rurſus A ad B, vt C ad D. erit cõuertendo B ad A, vt D ad C. quod demonſtratur in corollario quartae huius.



Compoſitio

XV.

Compositio rationis est sumptio antecedentis vnà cum consequente tamquam vnius ad ipsam consequentem.

SCHOLIVM.

Iuniores hanc proportionem apposuerunt. neque enim compositio magnitudinum eadem est, quę compositio proportionum. hic autem antecedens vnà cum consequente sumptum totam magnitudinem efficit, quę ex magnitudinibus componitur: atque hęc est magnitudinum compositio. compositio enim proportionum aliam proportionē efficit, vt ipse deinceps dicet. proportio, inquit ex proportionibus componi dicitur, cum proportionum quantitates inter se multiplicatę aliquam efficiunt proportionem. ipse autem, vt in antiquioribus libris inuenitur, compositionem hanc συνθέντι, *hoc est componenti, vel componendo appellat; etenim in rationalibus non aliter dicit, quàm componendo; similiter autem & diuisio, vna enim proportio diuiditur. at diuisio de qua hoc loco sermo fit, magnitudinum est, excessus namque antecedentium ab antecedentibus dissecatur. ipse vero etiam in hoc dicit* διελόντι *videlicet diuidenti, vel diuidendo. & similiter quę hoc loco appellatur conuersio rationis ipse* ἀναστρέψαντι *dicit, conuertitur enim ad antecedentia.*

F. C. COMMENTARIVS.

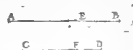


Compositio rationis est proportio, quae oritur ex compositione terminorum ipsius proportionis, videlicet ex compositione antecedentis cum consequente, cum totius consequenti comparatur, quamquam impropriè à iunioribus compositio proportionis, vel rationis appellata sit; compositio enim proportionis longe alia est, vt in pręcedenti scholio adnotatur. sit AE ad EB, vt CF ad FD. erit componendo AB ad BE, vt CD ad DF. illud vero in 18 huius demonstratur.

XVI.

Diuisio rationis est sumptio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

F. C. COMMENTARIVS.

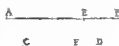


Sit AB ad BE, vt CD ad DF. erit diuidendo AE ad EB, vt CF ad FD. quod in 17 huius demonstratur.

XVII.

Conuersio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.

F. C. COMMENTARIVS.



Sit AB ad BE, vt CD ad DF. erit per conuersionem rationis BA ad AE, vt DC ad CF. hoc autem constat ex corollario 19 huius.

XVIII.

Aequa ratio, siue ex ęquali est, cum plures magnitudines extiterint, et alię ipsis numero aequales, quæ binæ sumantur, et in eadem proportione, fueritq; vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, ita in secũdis magnitudinibus prima ad vltimam: vel aliter est sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

F. C. COMMENTARIVS.



Hoc autem & in ordinata analogia fit, & in perturbata. in ordinata quidem hoc modo. sint tres magnitudines ABC, & aliae ipsis numero aequales DEF, sitq; vt A ad B, ita D ad E; & vt B ad C, ita D ad F. erit ex aequali vt A ad C, ita D ad F. quod demonstrabitur in 22 huius.

In perturbata vero hoc pacto. sint rursus tres magnitudines ABC, itemq; aliae tres DEF, & sit vt A ad B, ita E ad F, vt autem B ad C, ita D ad E. erit ex aequali vt A ad C, ita D ad F. hoc autem in 23 huius ostendetur. Idem sequitur etiam si plures sint, quam tres magnitudines. sint enim quattuor magnitudines ABCD, & aliae ipsis numero aequales EFGH, & in ordinata quidem analogia vt A ad B, ita sit E ad F, vt autem B ad C, ita F ad G, & vt C ad D, ita G ad H. erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H. In perturbata vero, sit vt A ad B, ita F ad G, vtq; B ad C, ita sit G ad H, & vt C ad D, ita E ad F. erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H. & similiter continget in alijs magnitudinibus quotquot illae fuerint.



XIX.

Ordinata analogia est quãdo fuerit vt antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; vt autem consequens ad aliã quãpiam, ita consequens ad aliam quampiam.

XX.

Perturbata vero analogia est, quando tribus existentibus magnitudinibus

gnitudinibus, & alij ipsis numero æqualibus; fuerit vt in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem. vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam; ita in secundis alia quępiam ad antecedentem.

F. C. COMMENTARIVS.

Harum exempla superius posita sunt, sed preter diffinitiones sunt etiam communes quędam notiones, quae in hoc libro sumuntur nempe hae.

I.

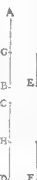
Eiusdem siue ęqualium æque multiplices inter se æquales sunt.

II.

Quarum eadem æque multiplex est, vel quarum æquales sunt æque multiplices & ipsæ inter se sunt æquales.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero singulę singularum æque multiplices; quotuplex est vna magnitudo vnius, totuplices erunt & omnes omnium.



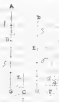
Sint quotcumque magnitudines AB CD quotcumque magnitudinum EF æqualium numero, singulæ singularum ęque multiplices. Dico quotuplex est AB ipsius E, totuplices esse & AB CD ipsarum E F. Quoniam enim AB ęque multiplex est ipsius E, et CD ipsius F, quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi E, tot erũt et in CD æquales ipsi F diuidatur AB quidem in partes ipsi E ęquales, quæ sint AG GB: CD vero diuidatur in partes ęquales ipsi F, videlicet CH HD. erit igitur multitudo partium CH HD æqualis multitudini ipsarum AG GB. et quoniam AG est æqualis E, et CH æqualis F; erunt et AG CH æquales ipsis E F. eadem ratione quoniam GB est æqualis E, et HD ipsi F, erũt et GB HD æquales ipsis EF. quot igitur sunt in AB æquales ipsi E, tot sunt et in AB CD æquales ipsis E F. ergo quotuplex est AB ipsius E, totuplices erunt et AB CD ipsarum E F. si igitur fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero singulę singularum ęque multiplices; quotuplex est vna magnitudo vnius, totuplices erunt et omnes omnium. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ; fuerit autem et quinta secundæ ęque multiplex, ac sexta quartæ: erit etiam composita prima, et quinta secundę æque multiplex, ac tertia, et sexta quartæ.

Prima

Prima enim AB secundæ C æque multiplex sit, ac tertia DE quartæ F. sit autem et quinta BG secundæ C æque multiplex, ac sexta EH quartæ F. Dico et compositam primam, et quintam AG secundæ C æque multiplicem esse, ac tertiam et sextam DH quartæ F. Quoniam enim AB æque multiplex est C, ac DE ipsius F, quot magnitudines sunt in AB æquales C, tot erunt et in DE æquales F. eadem ratione et quot sunt in BG æquales C, tot et in EH erunt æquales F. quot igitur sunt in tota AG æquales C, tot erunt et in tota DH æquales F. ergo quotuplex est AG ipsius C, totuplex est et DH ipsius F. et composita igitur prima et quinta AG secundæ C æque multiplex erit, ac tertia et sexta DH quartæ F: quare si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ: fuerit autem et quinta secundæ æque multiplex, ac sexta quartæ: erit composita quoque prima et quinta æque multiplex secundæ, ac tertia, et sexta quartæ. quod oportebat demonstrare.



THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ; sumantur aūt æque multiplices primæ, & tertiæ: erit & ex æquali sumptarum vtraque vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Prima enim A secundæ B æque multiplex sit, ac tertia C quartæ D: et sumantur ipsarum AC æque multiplices EF GH. Dico EF æque multiplicem esse ipsius B, ac GH ipsius D. Quoniam enim EF æque multiplex est ipsius A, ac GH ipsius C, quot magnitudines sunt in EF æquales A, tot erunt et in GH æquales C. Diuidatur EF quidem in magnitudines ipsi A æquales EK KF; GH vero diuidatur in magnitudines æquales C, videlicet GL LH. erit igitur ipsarum EK KF multitudo æqualis multitudini ipsarum GL LH. et quoniam æque multiplex est A ipsius B, ac C ipsius D; æqualis autem EK ipsi A, et GL ipsi C; erit EK æque multiplex ipsius B, ac GL ipsius D. eadem ratione æque multiplex erit KF ipsius B, et LH ipsius D. quoniam igitur prima EK secundæ B æque multiplex est, ac tertia GL quartæ D, est autem et quinta KF secundæ B æque multiplex, ac sexta LH quartæ D: erit et composita prima et quinta EF secundæ B æque multiplex, ac tertia, et sexta GH quartæ D. Si igitur prima secundæ æque fuerit multiplex, ac tertia quartæ; sumantur autem primæ, et tertiæ æque multiplices: erit et ex æquali sumptarum vtraque vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ. quod ostendisse oportuit. Ex antecedente.



THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si prima ad secundā eandem hēt proportionem, quam tertia ad quartam, & æque multiplices primę, & tertię ad ęque multiplices secundæ, & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatę.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D. et sumantur ipsarũ quidem AC alię vtcumque ęque multiplices E F; ipsarũ vero BD aliæ vtcumque æque multiplices GH. Dico E ad G ita esse, vt F ad H. sumantur enim rursus ipsarum EF æque multiplices KL, et ipsarum GH æque multiplices M N. Qm̃ igitur E ęque multiplex est ipsius A, atq; F ipsius C; sumuntur aũt ipsarum EF ęque multiplices KL: erit K æque multiplex ipsius A, atque L ipsius C. Eadem ratione M æque multiplex erit ipsius B, atque N ipsius D. et quoniam est vt A ad B. ita C ad D. sumptæ autem sunt ipsarũ AC æque multiplices KL; et ipsarum BD alię vtcumque ęque multiplices MN. si K superat M, superabit et L ipsam N; et si æqualis, ęqualis; et si minor, minor. suntq; KL quidem ipsarum EF æque multiplices; MN vero ipsarum G H aliæ vtcumque ęque multiplices. vt igitur E ad G, ita erit F ad H. quare si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, et æque multiplices primæ ac tertiæ ad ęque multiplices secundę, ac quartæ iuxta quamuis multiplicationem eandem proportionem habebunt inter se comparatæ. quod demonstrare oportebat.

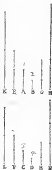
Ex antecedente.

Per conuersam quintæ diffinitionis.

5. diffinit.

Quoniam igitur demonstratum est si K superat M, et L ipsam N superare; et si ęqualis, ęqualem esse, et si minor, minorem: constat etiam si M superat K, et N superare ipsam L; et si ęqualis, ęqualem esse; et si minor, minorem; ac propterea vt G ad E, ita esse H ad F.

5. diffinit.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est si quattuor magnitudines sint proportionales, et contra proportionales esse.

SCHOLIVM.

Hoc theorema pertinet ad demonstrationem diffinitionis magnitudinum, quæ sunt in eadem proportione, vt est quando æque multiplices primæ, & tertiæ, videlicet antecedentium, æque multiplices secundæ, & quartæ, hoc est consequentium, vel vnà superant, vel vnà æquales sunt, vel vnà deficiunt; hic enim demonstrat & ipsas eandem inter se proportionem habere. reticuit autem hoc in principio; neque enim fieri poterat, vt diceretur illas in eadem proportione esse, quorum multiplicia sunt in eadem proportione, quando nos idipsum quæreremus, quænam essent in eadem proportione. cum igitur dixisset in principio eas simul superare, vel simul æquales esse, vel simul deficere; hic ostendit & in eadem esse proportione, si inter se comparentur, vt appareat diffinitio earum, quæ sunt in eadẽ proportione, quando scilicet æque multiplices primæ, & tertię ad secũdæ, & quartę æque multiplices eandẽ proportionem habeant. ostendit aũt ipsas in eadẽ proportione per hoc, & per cõuersionẽ.

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablatę; et reliqua reliquę ęque multiplex erit, atque tota totius.

Magnitudo enim AB magnitudinis CD ęque multiplex sit, atque ablata AE ablatę CF. Dico et reliquam EB reliquæ FD æque multiplicem esse, atque totam AB totius CD. quotuplex enim est AE ipsius CF, totuplex fiat et EB ipsius CG. et quoniam AE æque multiplex est CF, atque EB ipsius CG; erit AE ęque multiplex CF, et AB ipsius GF. ponitur autem ęque multiplex AE ipsius CF, et AB ipsius CD. æque multiplex igitur est AB vtriusque GF CD; ac propterea CF ipsi CD est æqualis. communis auferatur CF. reliqua igitur GC ęqualis est reliquę DF. Itaque quoniam AE æque multiplex est CF, et EB ipsius CG, estq; CG ęqualis DF, erit AE æque multiplex CF, et EB ipsius FD. æque multiplex autē ponitur AE ipsius CF, et AB ipsius CD. ergo EB est ęque multiplex FD, et AB ipsius CD. et reliqua igitur EB reliquę FD æque multiplex est, atq; tota AB totius CD. quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablatæ; et reliqua reliquę ęque erit multiplex, atque tota totius. quod oportebat demonstrare.



1 huius.

2. Com. not.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Si duę magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, et ablatæ quędam sint earumdem æque multiplices; erunt et reliquæ uel eisdem æquales, vel ipsarum ęque multiplices.

Duæ enim magnitudines AB CD duarum magnitudinum EF ęque multiplices sint, et ablatæ AG CH earumdem sint æque multiplices. Dico et reliquas GB HD vel ipsis EF æquales esse, vel ipsarum æque multiplices. sit enim primum GB ęqualis E. Dico et HD ipsi F esse æqualem. ponatur ipsi F æqualis CK. et quoniam AG æque multiplex est E, et CH ipsius F; estq; GB quidem ęqualis E; CK vero æqualis F: erit AB ęque multiplex E, et KH ipsius F. ęque autem multiplex ponitur AB ipsius E, et CD ipsius F. ergo KH ęque multiplex est F, et CD ipsius F. quoniam igitur vtraque ipsarum KH CD est ęque multiplex F, erit KH æqualis CD. communis auferatur CH. ergo reliqua KC reliquę HD est ęqualis. Sed KC est ęqualis F. et HD igitur ipsi F est æqualis; ideoq; GB ipsi E, et HD ipsi F æquais erit. Similiter demonstrabimus si GB multiplex fuerit ipsius E, et HD ipsius F ęque multiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, et ablatę quædam sint earumdem æque multiplices, erunt et reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices. quod demonstrare oportebat.



2. huius.

1. Com. not.

SCHOLIVM.

Non propositum est ostendere si à multiplici multiplex auferatur reli-

quum, vel equale esse, vel multiplex; hoc enim manifestum est: sed dua us magnitudinibus ad duas magnitudines ita se habentibus, vt dictum est, si reliqua prioris sit multiplex, & reliquam alterius multiplicem esse; & si equalis sit, esse equalem, veluti si quadrupla existente tripla auferatur, reliqua equalis erit, & in altera eodem modo.

THEOREMA VII. PROPOSITIO. VII.

Aequales ad eãdẽ, eãdẽ habẽt proportionẽ, & eadẽ ad æquales.



Sint æquales magnitudines A B, alia autem quæuis magnitudo C. Dico vtramque ipsarum A B ad C eandem proportionem habere: et C ad vtramque A B similiter eandem habere proportionem. sumantur enim ipsarum A B æque multiplices DE, et ipsius C alia vtcumque multiplex F. Quoniam igitur æque multiplex est D ipsius A, et E ipsius B, estq; A ipsi B æqualis;
1. Com.not. erit et D æqualis E, alia autem vtcumque est F. ergo si D superat F, et E ipsam F superabit; et si æqualis, æqualis, et si minor, minor. et sunt DE quidem ipsarum A B æqui multiplices F vero
5. diffi. alia vtcumque multiplex ipsius C. erit igitur vt A ad C, ita B ad C. dico insuper C ad vtramque ipsarum A B eandem habere proportionem. iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E æqualem esse, aliam vero quandam F. si igitur F superat D, ipsam quoque E superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. atque est F quidẽ ipsius C multiplex; DE vero alię vtcũ-
5. diffi. que ęque multiplices ipsarum A B. ergo vt C ad A, ita erit C ad B. ęquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, et eadem ad æquales. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.



Eodem modo demonstrabimus, et æquales magnitudines ad alias inter se æquales eandem habere proportionem.

Sint enim magnitudines aequales A B; sintq; aliae magnitudines inter se aequales C D. dico A ad C eandem habere proportionem, quam B ad D. sumantur ipsarum A B aeque multiplices E F; & ipsarum C D aliae vtcumque aeque multiplices GH. Itaq; quoniam aeque multiplex est E ipsius A,
1. Com.not. *& F ipsius B; est autem A aequalis B: erit & E ipsi F aequalis. rursus quoniam aeque multiplex est G ipsius C, & H ipsius D; estq; C ipsi D aequalis: & G ipsi H aequalis erit. Si igitur E superat G, & F ipsam H superabit; et*
5. diffi. *si aequalis, aequalis, & si minor, minor. ergo A ad C eandem proportionẽ habet, quam B ad D. quod oportebat demonstrare.*

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. VIII.



Inæqualium magnitudinum maior ad eandem maiorem habet proportionem, quàm minor: et eadem ad minorẽ maiorem proportionẽ habet, quàm ad maiorẽ.

Sint inęquales magnitudines AB C: et sit AB maior; alia vero vtcumque D. dico AB ad D maiorẽ habere proportionem, quàm C ad D: et D ad C maiorem habere, quàm ad AB. quoniam enim AB maior est, quàm C, ponatur ipsi C ęqualis BE.
4. diffin. Itaque minor ipsarum AE EB multiplicata maior aliquando erit, quàm D. Sit pri

mum

mum AE minor, quàm E;B: et multiplicetur AE, quo ad fiat maior, quàm D: sitq; ipsius multiplex FG, quæ ipsa D sit maior: quoruplex autem est FG ipsius AE, totuplex fiat et GH ipsius EB, et K ipsius C. sumaturq; ipsius D dupla quidem L, tripla vero M, et deinceps vna plus, quo ad ea, quæ sumitur, multiplex fiat ipsius D, et primo maior, quàm K. sumatur, sitq; N ipsius D quadrupla, et primo maior quàm K. quoniam igitur K primo minor est, quàm N, non erit K minor, quàm M. et cum ęque multiplex sit FG ipsius AE, et GH ipsius EB; erit et FG ęque multiplex AE, et FH ipsius AB. æque autem multiplex est FG ipsius AE, et K ipsius C. 1 huius.
ergo FH æque multiplex est AB, et K ipsius C; ac propterea FH K ipsarū AB C ęque multiplices erũt. rursus quoniã GH æque multiplex est EB, et K ipsius C; estq; EB æqualis C: erit et GH ipsi K 1 huius.
æqualis. Sed K non est minor, quàm M. non igitur GH minor est, quàm M. maior autem FG quàm D. ergo tota FH vtrisque DM 1.com.not.
maior erit. Sed vtræque DM sunt ęquales N; est enim M tripla ipsius D, et vtręque M D ipsius D quadruplæ. est autem et N quadrupla D. vtręque igitur M D ipsi N ęquales sunt. sed FH maior est, quàm MD. quare FH superat N, K vero ipsam N non superat. et sunt FH K æque multiplices ipsarum AB C. et N ipsius D alia vtcũque multiplex. ergo AB ad D maiorem proportionem habet, quàm 7 diffin.
C ad D. dico præterea et D ad C maiorem habere proportionẽ, *



quàm D ad AB. iisdem enim constructis similiter ostendemus N superare K, ipsam vero FH non superare: atque est N multiplex ipsius D, et FH K aliæ vtcumque ipsarum AB C æque multiplices. ergo D ad C maiorem proportionẽ habet, quàm D ad AB. Sed sit AE maior, quàm EB. erit minor EB multiplicata aliquando maior, quàm D. multiplicetur, et sit GH multiplex quidẽ ipsius EB, maior vero, quã D. et quotuplex est GH ipsius EB, totuplex fiat et FG ipsius AE, et K ipsius C. simili rõne ostendemus FH K ipsarũ AB C æq; multiplices esse. sumatur deinde N multiplex D, primo aũt maior, quàm FG. ergo rursus FG nõ est minor, quàm M; maior autem FG, quàm D. tota igitur FH superat DM, hoc est N; et K ipsam N non superat: quoniam FG maior existens, quàm GH, hoc est quàm K, non superat N. et similiter vt in iis, quæ superius dicta sũt, demõstrationẽ absoluemus. Inæqualiũ igitur magnitudinum maior ad eandẽ maiorem habet proportionẽ, quàm minor: et eadem ad minorẽ maiorem proportionẽ habet, quàm ad maiorẽ. quod ostẽdere oportebat.



SCHOLIVM.

Ergo AB ad D maiorem proportionem habet, quàm C ad D] *quattuor sunt magnitudines, prima quidem AB, secunda D, tertia autem C, et quarta D. bis enim sumitur D, & vt secunda & vt quarta. atque est primae quidem AB multiplex FH: secundae vero D multiplex N, & tertiae C multiplex K. est igitur FH maior, quàm N; quae quidem N multiplex est secundae D: K vero multiplex tertiae C, minor est, quàm N, quae est multiplex quartae D. Itaque quoniã multiplex primae maior est multiplici secundae, multiplex autem tertiae non maior multiplici quartae; habebit AB ad D maiorem proportionem, quàm C ad eandem D, per eam diffinitionem, quae dicit, quando aeque multiplicium multiplex quidem primae superauerit multiplicem secundae, multiplex autem tertiae non superauerit multiplicem quartae, tunc prima ad secundam maiorem proportionem habere dicetur, quàm tertia ad quartam.* *

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Quæ ad eandẽ, eandẽ proportionẽ habent, inter se ęquales sunt; et ad quas eadẽ, eãdẽ hẽt proportionẽ, ipsæ inter se sunt æquales.

Habeat

Habeat enim vtraque ipsarum A B ad C eandem proportionē. Dico A ipsi B ęqualem esse. nam si non esset ęqualis, non haberet vtraque ipsarum A B ad C eadem proportionem. habet autem. æqualis igitur est A ipsi B. Habeat rursus C ad vtramque ipsarum AB eandem proportionem. Dico A æqualem esse ipsi B. nisi enim ita sit, non habebit C ad vtramque A B eandem proportionem. habet autem. ergo A ipsi B necessario est æqualis. quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter se sunt. et ad quas eadem eandem habet proportionem, ipsæ inter se sunt æquales. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

Ex antecedente.

THEOREMA. X. PROPOSITIO. X.

Ad eādē ꝓportionē habētiū quę maiorē ꝓportionē hēt, illa maior est; ad quā vero eadē maiorē habet proportionem, illa minor est.

Habeat enim A ad C maiorem proportionem, quàm B ad C. Dico A, quàm B maiorem esse. si enim non est maior, vel æqualis est, vel mi-
7. huius. nor. ęqualis autem non est A ipsi B, vtraque enim ipsarum AB ad C eādem haberet proportionem. atqui eandem non habet. non igitur A ipsi
8. huius. B est ęqualis. Sed neque minor est A quàm B; haberet enim A ad C minorem proportionem, quam B. atqui non habet minorem. non igitur A minor est, quam B. ostensum autem est neque esse æqualē. ergo A quàm B maior erit. Habeat rursus C ad B maiorem proportionem, quàm C ad A. Dico B minorem esse, quàm A. si enim non est minor, vel æqualis est,
7. huius. vel maior. ęqualis vtique non est B ipsi A; etenim C ad vtramque ipsarū A B eandē proportionem haberet. non habet autem. ergo A ipsi B
8. huius. non est ęqualis. Sed neque maior est B, quàm A; haberet enim C ad B minorem proportionem, quàm ad A. atqui non habet. non igitur B quàm A est maior. Ostēsum aūt est neque ęqualē esse. ergo B minor erit, quàm A. Ad eandem igitur proportionē habētiū quæ maiorē proportionē hēt, illa maior est: et ad quam eadem maiorē habet proportionem, illa minor est. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

Quæ eidem eędem sunt proportiones, et inter se eędem sunt.

Sit enim vt A ad B, ita C ad D: vt autem C ad D, ita E ad F. Dico vt A ad B, ita esse E ad F. sumantur enim ipsarum quidem A C E æque multiplices G H K; ipsarum vero B D F alię vtcumque æque multiplices L M N. Quoniam igitur est vt A ad B, ita C ad D, et sumptæ sunt ipsarum A C ęque multiplices G H, et ipsarum BD aliæ vtcumque æque
Ex cōuersa 5. diffi. multiplices LM, si G superat L, et H ipsam M superabit; et si æqualis, ęqualis; et si minor, minor. rursus quoniam est vt C ad D, ita E ad F, et sumptę sunt ipsarū CE ęque multiplices HK; ipsarū vero DF aliæ vtcūque ęque multiplices MN, si H superat M, et K ipsam N superabit; et si ęqualis, æqualis; et si minor, minor. sed si H superat M, et G superabit L; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. quare si G superat L, et K ipsā N superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. et sunt GK quidem ipsarum AE æque multiplices; LN ve-
5 diffin. ro ipsarum BF aliæ vtcumque ęque multiplices. ergo vt A ad B, ita erit E ad F. quæ igitur eidem eædem sunt proportiones, et inter se eædem sunt. quod ostēndisse oportuit.

G A D L

H C D M

K E F N

THEO-

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

Si quotcũque magnitudines proportionales fuerint, vt vna antecedẽtiũ ad vnã cõsequẽtiũ, ita erũt antecedẽtes oẽs ad omnes cõsequẽtes.

Sint quotcũque magnitudines proportionales AB CD EF: et vt A ad B, ita sit C ad D, et E ad F. Dico vt A ad B. ita esse ACE ad BDF. sumantur enim ipsarum ACE ęque multiplices GHK, et ipsarũ BDF aliæ vtcumque æque multiplices LMN. Quoniam igitur vt A ad B, ita est C ad D, et E ad F: et sumptę sunt ipsarum quidem ACE æque multiplices GHK, ipsarum vero BDF aliæ vtcumque ęque multiplices LMN, si G superat L, et H ipsam M superabit, et K ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. quare et si G superat L, superabunt et GHK ipsas LMN; et si ęqualis, ęquales; et si minor, minores. suntq; G, et GHK ipsarũ A, et ACE æque multiplices: quoniã si fuerint quotcũque magnitudines quotcũque magnitudinũ æqualiũ numero, singulæ singularũ æque multiplices; quotuplex est vna magnitudo vnius, totuplices erũt et oẽs omniũ. eadẽ ratione et L et LMN ipsarum B, et BDF sunt æque multiplices. est igitur vt A ad B, ita ACE ad BDF. quare si quotcumque magnitudines proportionales fuerint, vt vna antecedentiũ ad vnã consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes. quod demonstrare oportebat.

Per conuersam 5. diffi.

5.huius.

5.diffi.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem proportionẽ habeat, quàm quinta ad sextã: et prima ad secundã maiorẽ habebit proportionẽ, quàm quinta ad sextã.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D; tertia antem C ad quartã D maiorem habeat proportionem, quàm quinta E ad sextã F. Dico et primam A ad secundam B maiorem proportionẽ habere, quam quintam E ad sextam F. Quoniam enim C ad D maiorem proportionem habet, quàm E ad F, sunt quædã ipsarum CE æque multiplices, et ipsarum DF aliæ vtcumque æque multiplices: et multiplex quidem C superat multiplicẽ D, multiplex vero E non superat multiplicem F. Sumantur, et sint ipsarum CE æqnemultiplices GH, et ipsarum DF aliæ vtcumque æquemultiplices KL, ita vt G quidem superet K; H vero ipsam L non superet: et quotuplex est G ipsius C, totuplex sit et M ipsius A; quotuplex autem K ipsius D, totutuplex sit et N ipsius B. et quoniam est vt A ad B, ita C ad D, et sumptæ sunt ipsarum AC æquemultiplices MG, et ipsarum BD aliæ vtcumque æque multiplices NK: si M superat N, et G ipsam K superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor Sed G superat K. ergo & M ipsam N superabit. H vero non.

Per conuersam.7. diffi.

Per cõuersã 5 diffi.



superat

superat L, suntq́; MH ipsarum AE æque multiplices, et NL ipsarum BF aliæ vtcumque æque multiplices. ergo A ad B maiorem proportionem habebit, quam E ad F. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem proportionẽ habeat, quam quinta ad sextam. et prima ad secundam maiorem habebit proportionem, quàm quinta ad sextam. quod ostendere oportebat.

7 diffi.

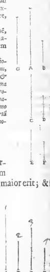
F. C. COMMENTARIVS.

Eodem modo demonstrabitur si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam minorem proportionem habeat, quam quinta ad sextam: et primam ad secundam minorem proportionem habere, quàm quintam ad sextam.

Quòd si prima ad secundam maiorem habeat proportionẽ, quàm tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem habeat, quam quinta ad sextam. et prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quam quinta ad sextam.

Habeat A ad B maiorem proportionem, quam C ad D, & C ad D maiorem habeat, quàm E ad F. dico A ad B maiorem habere proportionem, quam E ad F. fiat enim vt C ad D, ita G ad B. erit G minor, quam A. & quoniam G ad B eandem proportionem habet, quam C ad D, & C ad D maiorem habet proportionem, quam E ad F: habebit & G ad B maiorem proportionem, quàm E ad F. quare A ad B multo maiorem proportionem habebit, quam E ad F. & similiter demonstrabitur si prima ad secundam minorem proportionem habeat, quam tertia ad quartam, tertia vero ad quartã habeat minorem, quam quinta ad sextam: & primam ad secundam minorem habere proportionem, quam quintam ad sextam.

8 huius



THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XIIII.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; prima autem maior sit, quàm tertia: & secunda quàm quarta maior erit; & si æqualis, æqualis; et minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D: maior autem sit A quàm C. dico et B quàm D maiorem esse. quoniam enim A maior est quã C, et alia vtcũque magnitudo B, habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. sed vt A ad B, ita C ad D. ergo et C ad D maiorem habebit proportionem, quàm C ad B. ad quam vero eadem maiorem proportionem habet, illa minor est. quare D est minor, quàm B: ac propterea B quã D maior erit. Similiter demonstrabimus et si A æqualis sit ipsi C, et B ipsi D esse ęqualem: et si A sit minor, quàm C; et B quàm D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; prima autem maior sit, quàm tertia. & secunda, quam quarta maior erit; & si æqualis, ęqualis; et si minor, minor. quod demonstrare oportebat.

8 huius.

Ex antecedente, 10 huius.

SCHOLIVM.

Hoc lemma est sextidecimi theorematis, quemadmodum vigesimum

mum est lemma vigesimi secundi, & vigesimum primum vigesimi tertij.

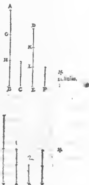
F. C. COMMENTARIVS.

Similiter demonstrabimus et si A æqualis sit ipsi C, et B ipsi D esse ęqualem] A
Quoniam enim A est aequalis C, habebit A ad B eandem proportionem, quam C ad B. vt autem A ad B, ita C ad D. ergo & C ad D eandem habebit, quam C ad B. ad quas autem eadem eandem habet proportionem ipsae aequales sunt. ergo B ipsi C est aequalis. 11. huius. 9. huius.

Et si A sit minor, quàm C, et B quàm D minorem esse,] *nam cum A minor sit, quam C; habebit A ad B minorem proportionem quàm C ad B. sed vt A ad B, ita C ad D. quare ex antecedente & C ad D minorem habebit proportionem, quàm C ad B; ac propterea C ad B maiorem habebit, quam C ad D. ergo B quàm D minor erit.* 8 huius. B 10. huius.

TEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Partes eodem modo multiplicium inter se cõparatę eandem habent proportionem.



Sit enim AB æque multiplex C, et DE ipsius F. Dico vt C ad F, ita esse AB ad DE, Quoniam enim ęque multiplex est AB ipsius C, et DE ipsius F, quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi C, totidem erunt et in DE æquales F. diuidatur AB in magnitudines ipsi C ęquales, quæ sint AG GH HB. et DE diuidatur in magnitudines ęquales F, videlicet in DK KL LE. erit igitur ipsarum AG GH HB multitudo ęqualis multitudini DK KL LE. et quoniam æquales sunt AG GH HB, suntq; DK KL LE inter se æquales; vt AG ad DK, ita erit GH ad KL, et HB ad LE. atque erit vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. est igitur vt AG ad DK, ita AB ad DE. Sed AG ipsi C est æqualis, et DK ipsi F. ergo vt C ad F, ita erit AB ad DE. partes igitur eodem modo multiplicium inter se comparatæ eandem habent proportionem. quod ostendendum fuit. * 11. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Vt AG ad DK, ita erit GH ad KL, et HB ad LE.] *Ex ea, quam nos ad septimam huius, addidimus.*

THEOREMA. XVI. PROPOSITIO XVI.

Si quattuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatæ proportionales erunt.



Sint quattuor magnitudines proportionales ABCD, sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico et permutatas proportionales esse, videlicet vt A ad C, ita esse B ad D. sumantur enim ipsarũ quidem AB æque multiplices EF; ipsarum vero CD aliæ vtcumque æque multiplices GH. et quoniam æque multiplex est E ipsius A, et F ipsius B; partes autem eodem modo multiplicium inter se comparatæ eãdem habent proportionem: erit vt A ad B, ita E ad F. vt autem A ad B, ita C ad D. ergo & vt C ad D, ita E ad F. rursus quoniam GH sunt ipsarum CD æque multiplices, partes autem eodem modo multiplicium Ex antecedente. 11 huius.

R eandem

eandem proportionem habent inter ſe comparatæ, erit vt C ad D, ita G ad H. ſed
14. huius. vt C ad D, ita E ad F. ergo et vt E ad F, ita G ad H. Quod ſi quattuor magnitudines proportionales ſint, prima autem maior ſit, quam tertia; et ſecunda quam quarta maior erit; et ſi æqualis, æqualis; et ſi minor, minor. Si igitur E ſuperat G, et F ipſam H ſuperabit, et ſi ęqualis, æqualis; et ſi minor, minor; ſuntq; EF ipſarũ AB æque mul
5. diffi. tiplices, et CH ipſarũ CD alię vtcumque ęque multiplices. ergo vt A ad C, ita erit B ad D. Si igitur quattuor magnitudines proportionales fuerint, et permutatę proportionales erunt. quod oſtendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iis, quae demonſtrata ſunt, illud quoque demonſtrabitur.

Si prima ad ſecundam eandem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; ſitq; prima maior, quam ſecunda: et tertia, quàm quarta maior erit; et ſi æqualis, ęqualis; et ſi minor, minor.



Prima enim A ad ſecundam B eandem habeat proportionem, quam tertia C ad quartam D: & ſit A maior, quam B. Dico & C quàm D maiorem eſſe. Quoniam enim A ad B eandem proportionem habet, quam C ad D; habebit permutando ex antecedente A ad C eandẽm proportionem, quam B ad D. Rurſus quoniam A maior eſt quam B, alia vero vtcũque eſt C, habebit A ad C maiorem proportionem, 8 huius *quam B ad C. Sed vt A ad C, ita eſt B ad D, quod demonſtratum eſt. ergo B ad D maiorem proportionem habet, quàm ad C. Ad quam vero eadem maiorem* 10. huius. *habet proportionẽ, illa minor eſt. quare D minor eſt, quàm C; ideoq; C maior, quàm D. Sit deinde A aequalis ipſi B. dico & C ipſi D aequalem eſſe. nam cum A, & B ſint aequales. habebit A ad C proportionem eã-* 7. huius. *dem, quam B ad C. vt autem A ad C, ita B ad D. ergo B ad D eandem proportionem habet, quam ad C. Ad*
9. huius. *quas vero eadem proportionem eãdem habet, illae aequales ſunt. ergo C ipſi D eſt aequalis. Sit poſtremo A minor, quàm B. Dico & C, quàm D minorem eſſe. quoniam enim A minor eſt quàm B,*
8 huius. *habebit A ad C minorem proportionem, quàm B ad C. Sed vt A ad C, ita B ad D. habebit igitur B ad D minorem proportionem, quàm ad C. ideoq; B ad C maiorem proportionem habebit, quàm ad*
10. huius. *D. Ad quam vero eadem maiorem habebit proportionem, illa minor eſt. ergo C quàm D minor erit. ſi igitur prima ad ſecundam eandem proportionem habeat, quam tertia ad quartam: ſitq; prima maior, quàm ſecunda, & tertia, quàm quarta maior erit; & ſi aequalis, aequalis; & ſi minor, minor.*

ALITER. Habeat A ad B eandem proportionem, quam C ad D: ſitq; A maior, quàm B. Dico & C, quã D maiorẽ eſſe. Quoniã enim A ad B eandem proportionem habet quam C ad D; habebit permutando A ad C eandem proportionem, quam B ad D. ſed A maior eſt quàm B. ergo ex 14 huius & C, quàm D. maior erit. Eodem modo demonſtrabimus ſi A ſit aequalis B, & C ipſi D eſſe aequalem. & ſi A ſit minor, quàm B, & C quàm D minorem eſſe. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XVII.

Si compoſitę magnitudines ſint proportionales, et diuiſæ proportionales erunt.

Sint compoſitę magnitudines proportionales AB BE CD DF. ſitq; vt AB ad BE, ita CD ad DF. dico etiam diuiſas proportionales eſſe, videlicet vt AE ad EB,

ita

ita esse CF ad FD. sumantur enim ipsarum quidem AE EB CF FD æque multiplices GH HK LM MN, ipsarum vero EB FD aliæ vtcumque æque multiplices KX NP. et quoniã æque multiplex est GH ipsius AE, et HK ipsius EB; erit GH ipsius AE æque multiplex, et GK ipsius AB. æque autem multiplex est GH ipsius AE, et LM ipsius CF. ergo GK æque multiplex est AB, et LM ipsius CF. rursus quoniam æque multiplex est LM ipsius CF, et MN ipsius FD; erit LM æque multiplex CF, et LN ipsius CD. Sed æque multiplex erat LM ipsius CF, & GK ipsius AB. æq; igitur multiplex est GK ipsius AB, et LN ipsius CD. quare GK LN ipsarum AB CD æque multiplices erunt. rursus quoniam æque multiplex est HK ipsius EB, et MN ipsius FD, est autem et KX ipsius EB æque multiplex, & NP ipsius FD: & composita HX ipsius EB æque multiplex est, et MP ipsius FD. quòd cum sit vt AB ad BE, ita CD ad DF, et sumptæ sint ipsarum quidem AB CD æque multiplices GK LN, ipsarum vero EB FD aliæ vtcumque æque multiplices HX MP, si GK superat HX, & LN superabit MP, & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. superet igitur GK ipsam HX, communiq; ablata HK, et GH ipsam KX superabit. sed si GK superat HX, & LN superat MP. itaque superet LN ipsam MP, cõmuniq; MN ablata, & LM superabit NP. quare si GH superat KX, & LM ipsam NP superabit. Similiter demonstrabimus & si GH sit æqualis KX, & LM ipsi NP esse æqualem, & si minor, minorem. sunt autem GH LM ipsarum AE CF ęque multiplices, & ipsarum EB FD aliæ vtcumque ęque multiplices KX NP. ergo vt AE ad EB, ita erit CF ad FD. Si igitur compositæ magnitudines sint proportionales, & diuisæ proportionales erunt. quod demonstrare oportebat.

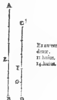


1. huius.
11 huius.
1. huius.
11. huius.
2. huius.
ex conuersa 5. diffi.
5 diffi.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

Sint diuisę magnitudines proportionales AE EB CF FD: & vt AE ad EB, ita CF ad FD. Dico etiam cõpositas proportionales esse, videlicet vt AB ad BE, ita esse CD ad DF. Si enim non est vt AB ad BE, ita CD ad DF; erit vt AB ad BE, ita CD vel ad minorem, quàm DF, vel ad maiorẽ. sit primũ ad minorẽ, nẽpe ad DG. & qm̃ est vt AB ad BE, ita CD ad DG, cõpositę magnitudines sunt proportionales. ergo et diuisæ proportionales erũt. est igitur vt AE ad EB, ita CG ad GD. ponitur aũt & vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare & vt CG ad GD, ita CF ad FD. at CG prima maior est, quã tertia CF. ergo & secũda DG, quàm quarta DF maior erit. sed & minor, quod fieri non potest. non igitur est vt AB ad BE, ita CD ad DG. similiter ostendemus neque esse ad maiorem, quàm DF. ad ipsam igitur DF sit necesse est. quare si diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositę proportionales erunt. quod oportebat demonstrare.



Ex antecedente.
11 huius.
14. huius.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO. XIX.

Si fuerit vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit, vt tota ad totam.

Sit enim vt tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. Dico et reliquã

EB ad reliquam FD ita esse, vt totam AB ad totam CD. quoniã enim
16.huius. est vt tota AB ad totam CD, ita AE ad CF; & permutando erit vt B
A ad AE, ita DC ad CF. et quoniam compositæ magnitudines sunt
17 huius. proportionales, & diuisæ proportionales erunt. vt igitur BE ad EA,
ita DF ad FC, rursusq; permutando vt BE ad DF, ita EA ad FC. sed
11.huius. vt AE ad CF, ita posita est AB ad CD. et reliqua igitur EB erit ad reliquam FD, vt tota AB ad totam CD. quare si fuerit vt tota ad totã, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam, erit vt tota ad totam. quod demonstrare oportebat.

Et quoniam ostensum est vt AB ad CD, ita esse EB ad FD, erit permutando vt AB ad BE, ita CD ad DF. ergo compositæ magnitudines proportionales sunt. ostẽsum autem est vt BA ad AE, ita DC ad CF, quod est per conuersionem rationis.

COROLLARIVM.

Ex hoc igitur perspicuum est si compositæ magnitudines sint proportionales; & per cõuersionem rationis proportionales esse.

Factę autem sunt proportiones et in æque multiplicibus, et in analogijs. nam si prima secundæ æque multiplex sit, atque tertia quartę; erit et vt prima ad secundã, ita tertia ad quartam. sed non item ex contrario cõuertitur. Si enim sit vt prima ad secundam, ita tertia ad quartam; nõ omnino erit prima quidem secundę ęque multiplex, tertia vero quartæ, velut in sesquialteris, vel in sesquitertijs proportionibus, vel alijs eiusmodi. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA. XX. PROPOSITIO. XX.

Si sint tres magnitudines, et alię ipsis numero æquales, quæ binę sumantur, et in eadem proportione; ex æquali autem prima maior sit, quàm tertia: et quarta quàm sexta maior erit; & si æqualis, æqualis; et si minor, minor.



Sint tres magnitudines A B C, et aliæ ipsis numero æquales D E F binæ sumptę, et in eadem proportione, sitq; vt A ad B, ita D ad E; et vt B ad C, ita E ad F; ex ęquali autem maior sit A, quã C. Dico et D quàm F maiorem esse, et si æqualis, ęqualem, et si minor, minorem. Quoniam enim A maior est, quàm C, alia vero vtcumque B, et maior ad eandem maiorem habet proportionem,
8 huius. A quàm minor: habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. Sed vt A ad B, ita D ad E: et conuertendo vt C ad B, ita F ad E. ergo et D ad E maiorem habet proportionem, quàm F ad
10.huius. B E. Ad eandem vero proportionem habentium quæ maiorem habet proportionem, illa maior est. maior igitur est D quàm F. similiter ostendemus et si A sit æqualis C, et D ipsi F ęqualem esse; et si minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, et aliæ ipsis numero ęquales, quæ binę sumantur, et in eadem proportione; ex æquali autem prima maior sit, quàm tertia: et quarta quam sexta maior erit; et si ęqualis, ęqualis; et si minor, minor. quod ostendere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

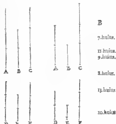
A Habebit A ad B maiorem proportionẽ, quàm C ad B. sed vt A ad B, ita D ad E]

Ex

Ex his sequitur per decimamtertiam huius D ad E maiorem proportionem habere, quàm C ad E. vt autem C ad B; ita F ad E. quare per eandem D ad E maiorem habet proportionem, quàm F ad E.

Similiter ostendemus et si A sit equalis C, et D ipsi F æqualem esse, et si minor, minorem]

Si enim A sit aequalis C, habebit A ad B proportionem eandem, quam C ad B. Sed vt A ad B, ita D ad E, & vt C ad B, ita F ad E. quare D ad E eandem proportionem habebit, quam F ad E. quae vero ad eandẽ, eandem habent proportionem, inter se aequales sunt. ergo D ipsi F est aequalis. Quòd si A ponatur minor quàm C, habebit A ad B proportionem minorem, quàm C ad B. vt autem A ad B, ita D ad E. ergo D ad E minorem proportionem habet, quàm C ad B. Sed vt C ad B, ita F ad E. habebit igitur D ad E minorẽ proportionẽ, quàm F ad E; ac propterea D quàm F, minor erit.



THEOREMA XXI.
PROPOSITIO XXI.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quę binę sumantur, et in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia, et ex æquali prima maior sit quàm tertia: et quarta quàm sexta maior erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines proportionales ABC, et alię ipsis numero æquales D E F, binæ sumptæ, et in eadem proportione. sit autem perturbata earum analogia, videlicet vt A quidem ad B, ita E ad F; vt vero B ad C, ita D ad E; et ex ęquali A maior sit, quàm C. Dico et D quàm F maiorem esse; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem. Quoniam enim maior est A, quàm C, alia vero B; habebit A ad B maiorem proportionem, quàm C ad B. Sed vt A ad B, ita E ad F, et conuertendo vt C ad B, ita E ad D. quare et E ad F maiorem habebit proportionem, quàm E ad D. ad quam vero eadem maiorem proportionem habet, illa minor est. minor igitur est F, quàm D, ac propterea D quàm F maior erit. Similiter ostendemus et si à sit æqualis C, et D ipsi F esse æqualem; et si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur, et in eadem proportione; sit autem perturbata earũ analogia, et ex ęquali prima maior sit, quam tertia: et quarta quàm sexta maior erit, et si ęqualis, æqualis; et si minor, minor. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XXII. PROPOSITIO. XXII.

Si sint quotcumque magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione; et ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint quotcumque magnitudines A B C, et aliæ ipsis numero ęquales DEF binę sumptæ in eadem proportione, sitq; ut A quidem ad B, ita D ad E, ut autem B ad C, ita E ad F. Dico et ex æquali in eadem proportione esse vt A ad C, ita D ad F. sumantur enim ipsarum quidem A D æque multiplices G H; ipsarum vero BE alię vtcumque æque multiplices KL, et ipsarum CF aliæ vtcumque æque multiplices M.N Quoniā igitur est vt A ad B, ita D ad E, et sumptę sunt ipsarum AD ęque multiplices G H, et ipsarum BE alię vtcumque æque multiplices KL; erit vt

4 huius. G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit vt K ad M, ita L ad N. et cū sint tres magnitudines GKM, et alię ipsis numero ęquales H L N, binæ sumptæ,

20. huius. et in eadem proportione; ex æquali si G superat M, et H ipsā N superabit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor, suntq; GH ipsarū AD æq; multiplices, et MN ipsarum CF aliæ utcumque æque multiplices.

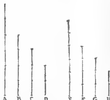
5. diffi. vt igitur A ad C, ita erit D ad F. quare si sint quotcumque magnitudines, et aliæ ipsis numero ęquales, quæ binę sumantur, in eadem proportione; et ex ęquali in eadem proportione erunt. quod demonstrare oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

Idem demonstrabitur etiam si plures sint, quâm tres magnitudines.

Sint enim quattuor magnitudines ABCD, & aliae ipsis numero ęquales EFGH binae sumptae in eadem proportione, sitq; vt A ad B, ita E ad F, ut autē B ad C, ita F ad G, et vt C ad D, ita G ad H. Dico ex aequali ut A ad D, ita esse E ad H. Quoniam enim est vt A ad B, ita E ad F, et vt B ad C, ita F ad G; & ex aequali per ea, quae proxime ostensa sunt, vt A ad C, ita erit F ad G. estq; vt C ad D, ita G ad H. Quare cum rursus tres magnitudines sint ACD, et aliae ipsis numero aequales EGH binae sumptae in eadem proportione; erit ex aequali vt A ad D, ita E ad H. quod demonstrare oportebat. & eodē modo demonstrabitur in alijs eiusmodi magnitudinibus quotquot fuerint, non solum in ordinata analogia, sed et in perturbata. semper enim ad tres magnitudines eiusdem ordinis similiter reducentur.



THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione, sit autem perturbata earum analogia; et ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint tres magnitudines A B C, et aliæ ipsis numero æquales binæ sumptæ in eadem proportione D E F; sit autem perturbata earum analogia, et sit vt A ad B, ita E ad F, & vt B ad C, ita D ad E. Dico vt A ad C, ita esse D ad F. sumantur ipsarum quidem A B D æque multiplices G H K; ipsarum vero C E F aliæ vtcumque æque multiplices L M N. & quoniam G H æque multiplices sunt ipsarum A B, partes autem eodem modo multiplicium eãdem habent proportionem; erit vt A ad B, ita G ad H. & simili ratione vt E ad F, ita M ad N. atque est vt A ad B, ita E ad F. vt igitur G ad H, ita M ad N. rursus quoniam est vt B ad C, ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarũ B D æque multiplices H K, ipsarum vero C E aliæ vtcumque æque multiplices L M: erit vt H ad L, ita K ad M. ostensum autem est et vt G ad H, ita esse M ad N. Quoniam igitur tres magnitudines proportionales sunt G H L, & aliæ ipsis numero æquales K M N binæ sumptæ in eadem proportione, estq; ipsarum perturbata analogia; ex æquali si G superat L, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sunt autem G K ipsarũ A D æque multiplices: & L N æque multiplices ipsarum C F. vt igitur A ad C, ita erit D ad F. quare si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione, sit aũt perturbata earum analogia; & ex æquali in eadem proportione erunt. quod demonstrare oportebat.

A
15. huius.
11. huius.
B
4. huius.
21. huius.
5. diffi.

A B C D E F
G H K L M N

F. C. COMMENTARIVS.

A Dico vt A ad C, ita esse D ad F] *in græco codice impresso hæc desiderantur.* λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ α πρὸς τὸ γ, οὕτω τὸ δ πρὸς τὸ ζ.

B Erit vt H ad L, ita K ad M. ostensum autem est vt G ad H, ita esse M ad N] *hoc loco in græco codice impresso, & in zamberti versione multa inseruntur superuacanea, quæ à nobis consulto omissa sunt.*

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO. XXIIII.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima & quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia, & sexta ad quartam.

Prima enim A B ad secundam C eandem habeat proportionem, quam tertia D E ad quartam F. habeat autem & quinta B G ad secundam C proportionem eandem, quam sexta E H ad quartam F. dico & compositam primam, & quintam A C ad secundam C eandem proportionem habere, quam tertiam, & quintam D H ad quartam

tam F. quoniam enim est vt BG ad C, ita EH ad F; erit conuertendo vt C ad BG, ita F ad EH. & quoniam vt AB ad C, ita est DE ad F, vt autem C ad BG, ita F ad EH; erit ex ęquali vt AB ad BG, ita DE ad EH (22.huius.) quòd cum diuisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. vt igitur AG ad GB, ita est DH ad HE. sed & vt GB ad C, ita EH ad F. ergo ex æquali vt AG ad C, ita erit DH ad F. si igitur prima ad secũdam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima & quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia & sexta ad quartam. quod ostendere oportebat.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXV.

Si quattuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum, & minima duabus reliquis maiores erunt.

Sint quattuor magnitudines proportionales AB CD E F; & sit vt AB ad CD, ita E ad F. sit autem maxima ipsarum AB & F minima. Dico AB F ipsis CD E maiores esse. ponatur enim ipsi quidem E ęqualis AG, ipsi vero F ęqualis CH. Quoniam igitur est vt AB ad CD, ita E ad F; estq; AG æqualis E, & CH ęqualis F; erit vt AB ad DC, ita AG ad CH. & quoniam vt tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH; & reliqua GB ad reliquam HD erit vt tota AB ad CD totam (19.huius.). maior autem est AB, quàm CD. ergo & GB, quàm HD maior. quòd cum AG sit ęqualis ipsi E, & CH ipsi F; erunt AG F ipsis CH E æquales. si autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo GB HD inæqualibus existentibus, quippe cum GB sit maior, si ipsi quidem GB addantur AG F, ipsi vero HD addantur CH E, fient AB F ipsis CD E necessario maiores. Si igitur quattuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima duabus reliquis maiores erunt. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex ijs, quae proxime demonstrata sunt, possimus etiam illud theorema demonstrare.

Sit tres magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima quàm dupla reliquæ maiores erunt.

Sint tres magnitudines proportionales AB CD E, quarum maxima AB, sitq; vt AB ad CD, ita CD ad E. Dico AB E maiores esse, quàm duplam ipsius CD. ponatur AF aequalis ipsi CD, & CG ipsi E. Quoniam igitur vt AB ad CD, ita CD ad E; erit vt AB ad CD, ita AF ad CG, videlicet vt tota ad totam, & ablata ad ablatam (19.huius.). quare & reliqua FB ad reliquam GD est, vt AB ad CD. sed AB ponitur maior, quàm CD. ergo & FB, quàm GD est maior. aequalis autem est AF ipsi CD, & CG ipsi E. Sunt igitur AF E ipsis CD CG aequales. quòd si inęqualibus aequalia addantur, tota inaequalia erunt. itaque additis AF E ipsi FB, quę maior est, quam GD, & additis CD CG ipsis GD, fient AB E maxima scilicet, & minima maiores, quàm dupla CD. Si igitur tres magnitudines fuerint proportionales maxima ipsarum & minima, quam dupla reliquæ maiores erunt. quod demonstrare oportebat.

Aliter.

Aliter. Sint tres magnitudines proportionales ABC, & ipsi B ponatur aequalis D. Itaque quoniam est vt A ad B, ita B ad C, erit & vt A ad B, ita D ad C. sunt igitur quattuor magnitudines proportionales ABDC. quare ex iam demonstratis AC maiores erunt, quàm BD, hoc est quàm ipsius AB dupla.

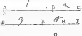


Hęc Euclides de proportionibus scripta reliquit. Sed quoniam Archimedes, Apolloniusq; & alij posteriores nonnullis theorematibus, quae ad huiusmodi tractationem pertinent, tanquam demonstratis vtuntur, optimum fore iudicauimus, si ex collectionibus mathematicis Pappi ea in hunc locum transferremus, immutato tamen ordine, & quibusdam additis, detractisue, prout res ipsa exigere videbatur.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXVI.

Si prima ad secundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam; & conuertendo secunda ad primam minorem proportionẽ habebit, quàm quarta ad tertiam.

Habeat AB ad BC maiorem proportionẽ, quàm DE ad EF. Dico CB ad BA minorem proportionem habere, quàm FE ad ED. vt enim AB ad BC, ita fit DE ad aliam aliquã, vt ad G. ergo DE ad G maiorem habebit proportionem, quàm DE ad EF. ac propterea G minor erit, quam EF. ponatur ipsi G æqualis EH. Quoniam igitur est vt AB ad BC, ita DE ad EH; erit conuertendo vt CB ad BA, ita HE ad ED. sed HE ad ED minorem proportionem habet, quàm FE ad ED. ergo & CB ad BA minorem habebit proportionem, quàm FE ad ED. quod demonstrare oportebat.



8 huius.
3. huius.

Similiter autem & si AB ad BC minorem proportionem habeat, quàm DE ad EF; demonstrabimus conuertendo CB ad BA maiorem habere proportionem, quàm FE ad ED. sed vt AB ad BC, ita fit DE ad aliam, vt ad EG, quæ maior erit, quàm EF. quare conuertendo vt CB ad BA, ita GE ad ED. at GE ad ED maiorem habet proportionem, quàm FE ad ED. ergo CB ad BA maiorem proportionem habebit, quàm FE ad ED. 8. huius.



COROLLARIUM.

Ex his constat, si AB ad BC maiorem proportionem habeat, quàm DE ad EF, & FE ad ED maiorem habere proportionem, quàm CB ad BA. & si AB ad BC minorem habeat proportionem, quàm DE ad EF, & FE ad ED minorem proportionem habere, quàm CB ad BA.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVII.

Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; & permutando prima ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm secunda ad quartam.

Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF. Dico AB ad DE maiorem proportionem habere, quàm BC ad EF. vt enim AB ad BC, ita alia quædam GE sit ad EF. manifestum est eam maiorem esse, quàm DE. quare permutãdo vt AB ad GE, ita est BC ad EF. habet autem AB ad DE maiorem proportionem, quàm AB ad GE, hoc est quàm BC ad EF. ergo AB ad DE maiorem proportionem habebit, quàm BC ad EF. quod oportebat demonstrare.



8 huius.
8 huius.

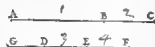
Eadem ratione & si AB ad BC minorem habeat proportionem, quam DE ad EF; sequetur permutando AB ad DE minorem proportionem habere, quàm BC ad EF. erit enim vt AB ad BC, ita alia quędam GE ad EF, quę minor sit, quam DE. Sed AB ad DE minorē habet proportionem, quàm AB ad GE, videlicet quàm BC ad EF. habebit igitur AB ad DE minorem, proportionem, quàm BC ad EF.



THEOREMA. XXVIII. PROPOSITIO. XXVIII.

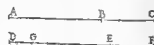
Si prima ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia ad quartam; etiam componendo prima & secunda ad secundam maiorē proportionem habebit, quàm tertia & quarta ad quartam.

Habeat AB ad BC maiorem proportionem, quàm DE ad EF. Dico AC ad CB maiorem habere proportionem, quàm DF ad FE. vt enim AB ad BC, ita sit alia quędam GE ad EF. erit GE maior, quàm DE. quoniã igitur est vt AB ad BC, ita GE ad EF; erit componēdo vt AC ad CB, ita GF ad FE. Sed GF ad FE maiorem proportionem habet, quàm DF ad FE. ergo & AC ad CB maiorem habebit proportionem, quàm DF ad FE. quod demonstrare oportebat.



8 huius.
18 huius.
8 huius.
13 huius.

Quòd si AB ad BC minorem proportionem habeat, quàm DE ad EF, habebit etiam componēdo AC ad CB minorem proportionem, quàm DF ad FE. rursus enim quoniam AB ad BC minorem proportionem habet, quàm DE ad EF, si vt AB ad BC, ita sit alia quædam ad EF, velut GE, erit ea minor quàm DE; & vt AC ad CB, ita erit GF ad FE. Sed GF ad FE minorem habet proportionem, quàm DF ad FE. ergo & AC ad CB minorem proportionem habebit quàm DF ad FE.

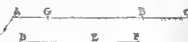


8 huius.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO. XXIX.

Si prima & secunda ad secundam maiorem habeat proportionem, quàm tertia, & quarta ad quartam; & diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam.

Habeat AC ad CB maiorem proportionem, quàm DF ad FE. Dico AB ad BC maiorem proportionem habere, quàm DE ad EF. vt enim DF, ad FE, ita sit alia quę dam GC ad CB. erit vtique GC minor,



8 huius.

quàm

quàm AC; & diuidendo GB ad BC, vt DE ad EF, at AB ad BC maiorem proportionem habet, quàm GB ad BC. ergo & AB ad BC maiorem habebit proportionem, quàm DE ad EF. 17 huius. 13 huius.

Si vero AC ad CB minorem habeat proportionem, quàm DF ad FE; & diuidendo AB ad BC minorem proportionem habebit, quam DE ad EF. si enim rursus fiat vt DF ad FE, ita alia quędam GC ad CB; erit GC quàm AC maior: atque erit diuidendo GB ad BC, vt DE ad EF. habet autem AB ad BC minorem proportionem, quàm GB ad BC. ergo & minorem proportionem habebit, quam DE ad EF. 8 huius. 17 huius.

G A B C
D E F

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

Si prima & secunda ad secundam maiorem proportionem habeat, quàm tertia & quarta ad quartam; per conuersionem rationis prima & secunda ad primam minorem habebit proportionem, quàm tertia, & quarta ad tertiam.

Habeat AC ad CB maiorem proportionem, quàm DF ad FE. Dico CA ad AB minorem habere proportionem, quàm FD ad DE. sit enim vt AC ad CB, ita DF ad aliam quandam, erit vtique ad minorem, quàm FE, velut ad FG. quare per conuersionem rationis vt CA ad AB, ita erit FD ad DG. sed FD ad DG minorem proportionem habet, quam FD ad DE. ergo & CA ad AB minorem habebit proportionem, quàm FD ad DE. Corol. 9. huius.

A B C
D E G F

Similiter autem & si AC ad CB minorem proportionem habeat, quam DF ad FE; habebit per conuersionem rationis CA ad AB maiorem proportionem, quàm FD ad DE. erit enim vt AC ad CB, ita DF ad maiorem quàm FE. reliqua vero manifesta erunt.

A B C
D G E F

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

Si prima ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm secunda ad quartam, etiam prima ad tertiam habebit maiorem proportionem, quàm prima & secunda ad tertiam, & quartam.

Habeat AB ad DE maiorem proportionem, quàm BC ad EF. Dico & AB ad DE maiorem proportioné habere, quàm AC ad DF. Sit enim vt AB ad DE, ita BC ad aliam. erit igitur ad minorem, quàm EF, velut ad EG. tota igitur AC ad totam DG est, vt AB ad DE. Sed AC ad DG maiorem proportionem habet, quàm ad DF. ergo AB ad DE maiorem habebit proportionem, quàm AC ad DF. et manifestum est totam AC ad totam DF minorem proportionem habere, quàm AB ad DE. & si minor sit proportio partis, totius maior erit. 12 huius. 8. huius.

A B C
D E G F

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXII.

Si tota ad totam maiorem habeat proportionem, quàm ablata ad abla-

tam, & reliqua ad reliquam maiorem proportionem habebit, quàm tota ad totam.

Habeat AC ad DF maiorem proportioné, quàm AB ad DE. Dico & reliquam BC ad reliquam EF maiorem proportionem habere, quàm AC ad DF. Sit enim vt AC ad DF, ita AB ad DG. ergo et reliqua BC ad reliquam
39.huius. GF est vt AC ad DF. Sed BC ad EF maiorem proportionem habet, quàm ad FG. ergo et BC ad EF maiorem habebit proportionem, quàm AC ad DF.

Si uero AC ad DF minorem proportionem habeat, quàm AB ad DE, et reliqua BC ad reliquam EF minorem proportionem habebit, quàm AC ad DF, quod eodem, quo supra, modo ostendetur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, habeatque prima priorum ad secundam maiorem proportionem, quàm prima posteriorum ad secundam; secunda vero priorum ad tertiam maiorem proportionem habeat, quàm secunda posteriorum ad tertiam: etiam ex æquali prima priorum ad tertiam maiorem habebit proportionem, quàm prima posteriorum ad tertiam.



Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm D ad E, & B ad C maiorem proportionem habeat, quàm E ad. F. Dico ex æquali A ad C maiorem habere proportionem, quàm D ad F. Quoniã enim A ad B maiorem proportionem habet, quàm D ad E; habe-
37 huius. bit permutando A ad D maiorem proportionem, quàm B ad E, et eadem ratione B ad E maiorem, quàm C ad F. ergo A ad D maio-
Ex demonstrans ad 33 huius. rem habet proportionem, quàm C ad F. et rursus permutando A ad C maiorẽ habebit, quam D ad F. quod oportebat demõstrare.
37.huius. Quòd si prima priorum ad secundam minorem habeat proportionem, quàm prima posteriorum ad secundam; secũda vero priorum ad tertiam minorem proportionem habeat, quàm secũda posteriorum ad tertiam: similiter demõstrabitur etiam ex æquali primam priorum ad tertiam minorem proportionem habere, quàm primam posteriorum ad tertiam.

QVINTI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER SEXTVS
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS
Federici Commandini Vrbinatis.



DIFFINITIONES.
I.



IMILES figurę rectilineæ sunt, quę et singulos angulos æquales habent, et circa ęquales angulos latera proportionalia.





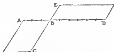
II.

Reciprocę figuræ sunt, quādo in vtraque figura antecedētes, et consequentes rationes fuerint.



F. C. COMMENTARIVS.

Per antecedentes, & consequentes rationes intellige antecedentes, & consequentes proportionis terminos: vt si sint duo rectangula ABC DBE, sitq́; vt AB ad BD, ita EB ad BC; dicentur hae figurae reciprocae, seu ex contraria parte sibi ipsis respondentes: quoniā in altera quidem est terminus antecedens primae proportionis, videlicet AB, et consequens secundae BC; in altera vero est consequens primae BD & antecedens secundae EB. sunt autem dictae figurae etiam inter se aequales, ut deinceps ostendetur.



Extrema

III.

Extrema ac media ratione secari recta linea dicitur, quando sit vt tota ad maiorem portionem, ita maior portio ad minorem.

F. C. COMMENTARIVS.

Extrema ac media ratione secari recta linea idcirco dicitur, quòd secetur in duas partes, quae proportionis termini sint, videlicet extremus et medius, nam tota primi termini locum obtinet. Sit enim recta linea AC ita diuisa in puncto B, erit AC primus terminus, AB medius, et BC extremus.



IIII.

Altitudo cuiusque figuræ est linea perpendicularis, quæ à vertice ad basim ducitur.



V.

Proportio ex proportionibus componi dicitur, quãdo proportionum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt proportionem.

SCHOLIVM.

Proportio ex duabus proportionibus, vel ex pluribus componi dicitur, quando proportionum quantitates multiplicatæ faciunt aliquam proportionis quantitatem.

Habeat enim AB ad CD proportionem datam, vt duplam, vel triplam, vel aliam aliquam· CD vero ad EF similiter datam proportionem habeat. Dico proportionem AB ad EF compositam esse ex proportione AB ad CD, et proportione CD ad EF; vel si quantitas proportionis AB ad CD multiplicetur in proportionis C D ad EF quantitatem, facere quantitatem proportionis AB ad EF. Sit enim primũ AB maior, quàm CD, et CD quàm EF maior: Sitq́, AB dupla CD, et CD ipsius EF tripla. Quoniã igitur CD quidem ipsius EF tripla est, ipsius autem CD dupla AB; erit AB ipsius EF sextupla: quoniã si triplum alicuius duplicabimus, fiet ipsius sextuplum. hoc enim proprie est compositio. vel hoc modo. Quoniam AB ipsius CD est dupla, diuidatur AB in partes æquales ipsi C D, quæ sint A G G B. et quoniam CD est tripla EF, ęqualis autẽ A G ipsi C D; erit A G ipsius EF



tripla.ideoq; tota AB ipsius EF sextupla est. quare proportio AB ad EF coniungitur per medium terminũ CD; composita ex proportione AB ad CD, & proportione CD ad EF. Similiter autem & si CD sit vtriusque AB EF minor, idẽ concludetur. Sit enim rursus AB quidem tripla ipsius CD, CD vero ipsius EF dimidia. & quoniam CD dimidia est ipsius EF, & ipsius CD tripla AB; erit AB sesquialtera ipsius EF. si enim dimidium alicuius triplicabimus, habebit ipsum semel, & eius dimidium. Et quoniã AB ipsius CD est tripla, CD vero dimidia EF; quarum partium ipsi CD æqualium AB est trium, earum est EF duarum. ergo AB sesquialtera est ipsius EF. proportio igitur AB ad EF connectitur per CD medium terminum, cõposita ex proportione AB ad CD, & proportione CD ad EF. Sed rursus sit CD vtriusque AB EF maior: & sit AB quidem ipsius CD dimidia, CD vero sesquitertia ipsius EF. Quoniã igitur quarum partium est AB duarum, earum CD est quattuor qua rum autem CD est quattuor, earum EF est trium. & quarum AB dua rum, earundem EF trium. Ergo proportio AB ad EF rursus connectitur per CD medium terminum; quę est duorum ad tria. Similiter et in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, si à composita proportione vnus quius componentium auferatur, vno simplicium eiecto, reliquos componentium assumi.





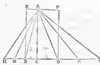
FED. COMMANDINUS.

Lege Eutocium in commentarijs in quartam propositionem secundi libri Archimedis de sphęra & Cylindro, & in commentarijs in vndecimam propositionem primi libri conicorum Apollonij.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Triangula & parallelogramma, quę eandem habent altitudinem, inter se sunt, vt bases.

Sint triangula quidẽ ABC ACD; parallelogramma vero EC CF, quę eandem habeant altitudinem, videlicet perpendicularem a puncto A ad BD ductam. Dico vt basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD; & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. producatur enim BD ex vtraque par



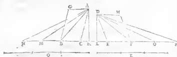
te ad puncta H L, & ipsi quidum BC basi æquales quotcumque ponantur BG GH, ipsi vero basi CD ponãtur quotcũq; æquales DK KL, & AG AH AK AL iũgãtur. Quoniam igitur CB BG GH inter se æquales sunt; erunt & triãgula AHG AGB ABC inter se equalia. ergo quotuplex est basis HC ipsius BC basis, totuplex est A HC triangulum trianguli ABC. Eadem ratione quotuplex est LC basis, ipsius basis CD, totuplex est & triangulum ALC ipsius ACD triangulũ: et si æqualis est HC basis basi CL, & triangulum AHC triangulo ALC est æquale: & si basis HC basim CL superat, & triangulum AHC superabit triangulum ALC. & si minor, minus. Quattuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC CD, & duobus triangulis ABC ACD, sumpta sunt ęquemultiplicia, basis quidem BC, & ABC trianguli, videlicet basis HC, & AHC triãgulum: basis vero CD, & trianguli ACD, alia vtcunque æque multiplicia, nempe CL basis, & ALC triangulum: atque ostensum

sum est si HC basis basim CL superat, & triangulū AHC superare triangulū AL C;
5 dif quinti. & si equalis, equale; & si minor, minus. est igitur vt BC basis ad basim CD, ita triangulū ABC ad ACD triāgulū. Et qm̄ triāguli ABC duplū est parallelogrāmū EC,
4 primi. & triāguli ACD parallelogrammū FC duplum; partes autem eodem modo
15 quinti. multiplicium eandem inter se proportionem habent: erit vt ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quoniam igitur ostensum est, vt basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD, vt autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum: erit vt BC basis ad basim CD, ita parallelogrammum E
11 quinti. C ad CF parallelogrammum. Quare triangula & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt, vt bases. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & theorema illud verum est, quod demonstrare hoc loco non putaui esse alienum.

Triangula & parallelogramma in æqualibus basibus constituta, eandem inter se proportionem habent, quam eorum altitudines.

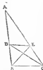


Sint duo triangula ABC DEF, & duo parallelogramma CG EH, quae aequales bases habeant BC EF: trianguli autem ABC, & parallelogrammi CG altitudo sit AK: & trianguli DEF, & parallelogrammi EH altitudo DL. Dico vt AK ad DL, ita esse & triangulum ABC ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG ad EH parallelogrammum. producantur BC EF, & ponantur basi BC aequales quotcumque BM MN: & basi EF aequales quotcumque FO OP, iunganturque AM AN DO DP: quot vero magnitudines sunt in CN aequales basi CB, tota sumantur in linea Q aequales ipsi AK altitudini, & quot sunt in EP aequales basi EF; tot sumantur in linea R aequales altitudini DL. Itaque quoniam triangula ANM AMB ABC sunt in aequalibus basi-
Ex antecedente. *bus constituta, & aequali altitudine; etiam inter se aequalia erunt. & eadem ratione triangula DEF DFO DOP erunt inter se aequalia. Quotuplex igitur est linea Q ipsius AK, totuplex est triangulum ANC trianguli ABC: & quotuplex est linea R ipsius DL, totuplex est triangulum DPE trianguli DEF: & si Q sit aequalis R, & triangulum ANC triangulo DPE aequale erit, ex praemissa; erit namque altitudo AK, cuius tripla est Q aequalis altitudini DL, cuius ipsa R est tripla: si vero Q sit maior, quàm R, & triangulum ANC maius erit, quàm triangulum DPE; et si minor, minus. triangulorum enim aequales bases habentium, quae maiori sunt altitudine, etiam maiora sunt, alioqui sequeretur totum parti aequale esse. Cum igitur quattuor sint magnitudines, videlicet duae altitudines AK DL, & duo triangula ABC DEF: & sumpta sint aeque multiplicia, altitudinis quidem AK, & trianguli ABC; altitudinis vero DL, & trianguli DEF; alia vtcumque multiplicia: & ostensum sit si linea Q superat R, & triangulum ANC superare triangulum DP*
5 dif quinti. *E, & si aequalis, aequale; & si minor, minus: erit vt altitudo HA ad altitudinem DL, ita triangulum*
41 primi. *ABC ad triangulum DEF. Sed trianguli ABC duplum est CG parallelogrammum, & trianguli*
15 quinti. *DEF duplum parallelogrammum EH; partes autem eodem modo multiplicium eandem habent proportionem: erit parallelogrammum CG ad parallelogrammum EH, vt ABC triangulum ad triangulum DEF. Sed ostensum est vt altitudo AK ad altitudinem DL, ita esse triangulum ABC ad triangulum DEF. Vt igitur AK ad DL, ita est parallelogrammum CG ad EH parallelogrammum. Quare triangula, & parallelogramma in aequalibus basibus constituta eandem inter se proportionem habent, quam eorum altitudines. quod demonstrare oportebat.*

THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si vni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera: & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones coniungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit.



Trianguli enim ABC vni laterum BC parallela ducatur DE. Dico vt BD ad DA, ita esse CE ad EA. Iungantur enim BE CD. triangulum igitur BDE triangulo CDE est æquale; (37 primi.) in eadem enim sunt basi DE, & in eisdem DE BC parallelis: aliud autem triangulum est ADE: sed æqualia ad idem eandem habēt proportionem. (7 quinti.) ergo vt triangulum BDE ad triāgulum ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE. Vt autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est BD ad DA. (Ex antecedente.) nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter se sunt vti bases. & ob eandem caussam vt CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. & vt igitur BD ad DA, ita est CE ad EA. (11 quinti.) Sed trianguli ABC latera AB AC proportionaliter secta sint, & vt BD ad DA, ita sit CE ad EA: & iungatur DE. Dico DE ipsi BC parallelam esse. ijsdem enim constructis, quoniam est vt BD ad DA, ita CE ad EA; vt autē BD ad DA, ita est BDE triangulum ad triangulū ADE, et vt CE ad EA, ita CDE triangulum ad triangulum ADE: erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita CDE triangulum ad triangulum ADE. (11 quinti.) Quòd cum vtrumque triangulorum BDE CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum triangulo CDE æquale; (9 quinti.) & sunt in eadem basi DE. æqualia autem triangula, & in eadem basi constituta, etiā in eisdem sunt parallelis. (39 primi.) ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur vni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius triāguli latera: & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones coniūgit recta linea reliquo triāguli lateri parallela erit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea, secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera: & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.



Sit triangulum ABC, & secetur angulus BAC bifariam recta linea AD. (9. primi.) Dico vt BD ad DC, ita esse BA ad AC. ducatur enim per C ipsi DA parallela CE, (31. primi.) & producta BA conueniat cum ipsa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD EC incidit recta linea quædā AC, erit ACE angulus angulo CAD æqualis. (29. primi.) Sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD. ergo & BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. Rursus quoniam in parallelas AD EC recta linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqualis est interiori AEC. ostensus aūt est & angulus ACE angulo BAD æqualis. ergo & ACE ipsi AEC

6 primi ęqualis erit·ac propterea latus AE æquale lateri AC.Et quoniam vni laterum trian
Ex antece- guli BCE,videlicet ipsi EC parallela ducta est AD; erit vt BD ad DC, ita BA ad A
dente E: æqualis aūt est AE ipsi AC. est igitur vt BD ad DC,ita BA ad AC. Sed sit vt BD
7.quinti. ad DC,ita BA ad AC & AD iungatur. Dico angulū BAC bifariā sectū esse recta li
Ex antece- nea AD iisdem enim constructis quoniam est vt BD ad DC, ita BA ad AC; Sed &
dente. vt BD ad DC,ita BA ad AE,etenim vni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC
9 quinti. parallela ducta est AD·erit & vt BA ad AC,ita BA ad AE. ergo AC est ęqualis AE,
29.primi. ac propterea & angulus AEC angulo ECA ęqualis. Sed angulus quidem AEC est
ęqualis angulo exteriori BAD; angulus vero ACE æqualis alterno CAD.quare &
BAD angulus ipsi CAD ęqualis erit. angulus igitur BAC bifariam sectus est recta
linea AD.Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta
linea,etiam basim secet, basis partes eandem proportionem habebunt, quam reli-
qua trianguli latera: & si basis partes eādem proportionem habeant,quam reliqua
trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea trianguli angulum
bifariam secabit.quod oportebat demonstrare.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

Aequiangulorum triangulorum latera,quæ circum æquales an gulos,proportionalia sunt: et homologa siue eiusdē rationis sunt latera,quę æqualibus angulis subtenduntur.



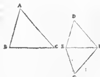
Sint ęquiangula triangula ABC DCE, quæ angulū
quidem ABC angulo DCE, angulum vero ACB an-
gulo DEC ęqualem habeant·et pręterea angulū BAC
angulo CDE. Dico triangulorum ABC DCE propor
tionalia esse latera, quæ sunt circa ęquales angulos, et
homologa,siue eiusdem rationis latera esse, quæ æqua
libus angulis subtenduntur. Ponatur enim BC in dire
ctum ipsi CE. Et quoniam anguli ABC ACB duobus
17.primi. rectis minores sunt:ęqualis aūt est angulus ACB angu
lo DEC,erunt ABC DEC anguli duobus rectis minores. quare BA ED producte
inter se conuenient. producantur, et conueniant in puncto F. et quoniam angulus
28 primi. DCE est æqualis angulo ABC, erit BF ipsi DC parallela. Rursus quoniam æqualis
est angulus ACB angulo DEC, parallela erit AC ipsi FE. parallelogrammum igi-
34.primi. tur est FACD, ac propterea FA quidem ipsi CD, AC vero ipsi FD est ęqualis.Et
2.huius. quoniam vni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE parallela ducta est AC, erit
7.quinti. vt BA ad AF, ita BC ad CE. æqualis autem est AF ipsi CD. Vt igitur BA ad CD,
ita BC ad CE: et permutando vt AB ad BC, ita DC ad CE. Rursus quoniam CD
2.huius. parallela est BF, erit vt BC ad CE, ita FD ad DE. Sed DF est ęqualis AC. ergo vt
BC ad CE, ita AC ad ED. permutando igitur vt BC ad CA, ita CE ad ED.Itaque
quoniam ostensum est, vt AB ad BC, ita DC ad CE, ut autem BC ad CA, ita CE
ad ED; erit ex æquali vt BA ad AC, ita CD ad DE. æquiangulorum igitur triangu
lorum proportionalia sunt latera, quę circum ęquales angulos: et homologa, siue
eiusdem rationis latera sunt, quę æqualibus angulis subtenduntur. quod demon-
strare oportebat.

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula e- runt triangula, et æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.

Sint

Sint duo triangula ABC DEF, quæ latera proportionalia habeant, sitq; ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF, vt autem BC ad CA, ita EF ad FD. et adhuc vt BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triãgulum ABC triangulo DEF æquiangulũ esse, et æquales habere angulos, quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD; et præterea angulum BAC angulo EDF. con



stituatur enim ad rectam lineam EF, et ad puncta in ipsa EF, angulo quidem ABC 23 primi.
æqualis angulus FEG; angulo autem BCA angulus EFG. quare reliquus BAC angulus reliquo EGF est æquans. Ideoq; æquiangulum est triangulum A B C triangulo EGF. triãgulorum igitur ABC EGF proportionalia sunt latera, quæ circum Ex antecedente.
æquales angulos, et homologa latera sunt, quę æqualibus angulis subtenduntur. ergo vt AB ad BC, ita GE ad EF. Sed vt A B ad BC, ita DE ad EF. Vt igitur DE 11. quinti.
ad EF, ita GE ad EF. Quòd cum vtraque ipsarum DE EG ad EF eandem proportionem habeat, erit DE ipsi EG æqualis. Eadem ratione et DF æqualis FG. Itaque 9. quinti.
quoniam DE est æqualis EG, cõmunis autem EF; duæ DE EF duabus GE EF æquales sunt, et basis DF basi FG æqualis. angulus igitur DEF est æqualis angulo GEF; 8. primi.
et DEF triangulum æquale triangulo GEF, et reliqui anguli reliquis angulis ęquales, quibus ęqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFE est ęqualis angulo GFE, angulus vero EDF æqualis angulo EGF. Et quoniam angulus FED est ęqualis angulo GEF, et angulus GEF angulo ABC; erit et angulus ABC angulo FED æqualis. Eadem ratione et angulus ACB æqualis est angulo DFE: et adhuc angulus ad A angulo ad D. ergo ABC triãgulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et ęquales habebũt angulos, quibus homologa latera subtenduntur. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, et ęquales habebunt angulos, quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF vnum angulum BAC vni angulo EDF æqualẽ habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, sitq; ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, et angulum quidem ABC habere æqualem angulo DEF; angulum vero ACB angulo DFE. constituatur enim ad rectã lineam DF, et ad puncta in ipsa DF, alte



23. primi.
rutri angulorum BAC EDF æqualis angulus FDG: angulo autem ACB æqualis DFG. reliquus igitur qui ad B reliquo qui ad G est æqualis. ergo triangulum ABC triangulo DGF æquiangulum est, ac propterea vt BA ad AC, ita est GD ad DF. po 4 huius.
nitur autem & vt BA ad AC, ita ED ad DF. Vt igitur ED ad DF, ita GD ad DF. qua 11 quinti.
re ED ęqualis est ipsi DG: & communis DF. ergo duę ED DF duabus GD DF 9. quinti.



4 primi. æquales sunt: & angulus EDF angulo GDF est ęqualis. basis igitur EF est ęqualis basi FG: triangulumq; DEF ęquale triangulo GDF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFG est æqualis angulo DFE, angulus vero ad G angulo ad E. sed angulus DFG ęqualis est angulo ACB. & angulus igitur ACB angulo DFE est æqualis. ponitur autem & BAC angulus ęqualis angulo EDF. ergo & reliquus qui ad B æqualis reliquo qui ad E. ęquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF. Quare si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa ęquales autem angulos latera proportionalia, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur. quod ostendere oportebat.

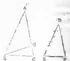
F. C. COMMENTARIVS.



Sunt qui hoc etiam aliter demonstrēt. Nam imposito latere DE lateri AB, cadet DF in AC, quoniam angulus ad punctum D angulo ad A est aequalis. Vel igitur DE est aequale ipsi AB, vel inaequale.
4.primi. *& si quidem aequale, erit & DF aequale AC. ergo & basis EF basi BC, & reliqui anguli reliquis angulis aequales. Si vero DE sit inęquale ipsi AB, sit vtrumuis ipsorum maius; verbi caussa AB. tunc vt BA ad AC, sic ED ad DF. ergo permutando vt BA ad AE; sic CA ad AF & diuidendo vt BE ad EA, sic CF ad FA.*
2.huius. 29 primi. *quare latus EF parallelum est lateri BC, & idcirco angulus AEF angulo ABC, & angulus AFE angulo ACB est aequalis. quod ostensum oportuit.*

THEOREMA. VII. PROPOSITIO VII.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum vtrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula; & ęquales habebunt angulos, circa quos latera sunt proportionalia.



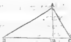
Sint duo triangula ABC DEF, vnum angulū vni angulo æqualem habentia, videlicet angulū BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem angulos ABC DEF latera proportionalia, vt sit DE ad EF, sicut AB ad BC: & reliquorum qui ad CF. primum vtrumque simul minorem recto. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse; angulumque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F ęqualem. Si enim inæqualis est angulus ABC angulo DEF, vnus ipsorum maior erit. Sit maior ABC: & constituatur ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa B angulo DEF æqualis angulus ABG.
23.primi. Et quoniam angulus quidem A est æqualis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF: erit reliquus AGB reliquo DFE æqualis. æquiangulum igitur est ABG triangulum triangulo DEF.
4 huius. quare vt AB ad BG, sic DE ad EF: vtq; DE ad EF, sic ponitur AB ad BC. & vt igitur AB ad BC, sic AB ad BG. Quod cum AB ad vtramque BC BG eandem habeat

beat proportionem, erit BC ipsi BG æqualis: ac propterea angulus ad C est æqualis angulo BGC. minor aũt recto ponitur angulus, qui ad C. ergo & BGC minor est recto, & ob id qui ei deinceps est AGB maior recto. atque ostensus est angulus AGB æqualis angulo, qui ad F. angulus igitur qui ad F recto maior est. atqui ponitur minor recto, quod est absurdũ. nõ igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF. ergo ipsi est æqualis. est autẽ & angulus ad A æqualis ei, qui ad D. quare & reliquus qui ad C æqualis reliquo qui ad F. æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF. Sed rursus ponatur vterque angulorum, qui ad C F non minor recto. Dico rursus & sic triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse. iisdem enim constructis similiter demonstrabimus BC æqualem ipsi BG, angulumq; ad C angulo BGC æqualem. sed angulus qui ad C non est minor recto. nõ minor igitur recto est BGC. quare trianguli BGC duo anguli non sunt duobus rectis minores. quod fieri nõ potest. nõ igitur rursus inæqualis est ABC angulus angulo DEF. ergo æqualis necessario erit. est autẽ & qui ad A æqualis ei, qui ad D. reliquus igitur qui ad C reliquo qui ad F est æqualis. ac propterea triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum est. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum vtrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto. æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera. quod oportebat demonstrare.

5 quinti
5 primi
13 primi.
17 primi.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. VIII.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula & toti & inter se similia sunt.



Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC; et à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangula ABD ADC toti triangulo ABC, et inter se similia esse. Quoniam enim angulus BAC æqualis angulo ADB, rectus enim vterque est: et angulus qui ad B communis duobus triangulis ABC ABD. erit reliquus ACB reliquo BAD æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD. quare vt BC, quæ subtendit angulum rectum trianguli ABC, ad BA subtendentem angulum rectum trianguli ABD, sic ipsa AB subtendens angulum qui ad C trianguli ABC, ad BD subtendentem angulũ æqualem angulo, qui ad C, videlicet BAD ipsius ABD trianguli: et adhuc AC ad AD subtendentem angulum qui ad B, communem duobus triangulis. ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum est; et circa æquales angulos latera habet proportionalia. Simile igitur est triangulum ABC triangulo ABD. Eadem ratione demonstrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC simile esse. Quare vtrumque ipsorum ABD ADC toti ABC triangulo est simile. Dico insuper triangula ABD ADC etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus BDA rectus, est æqualis recto ADC. Sed et BAD ostensus est æqualis ei, qui ad C; erit reliquus qui ad B reliquo DAC æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABD triangulo ADC. ergo vt BD trianguli ABD subtendens BAD angulum ad DA trianguli ADC subtendentem angulum, qui ad C, æqualem angulo BAD, sic ipsa AD trianguli ABD subtendens angulum, qui ad B, ad DC subtendentem angulum DAC ei, qui ad B, æqualem: et adhuc BA ad AC subtendentem angulum rectum ADC. Simile igitur est ABD triangulum triangulo ADC. Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quę ad perpendicularem sunt triangula, et toti, et inter se, similia sunt. quod oportebat demonstrare.

4. huius.
1. diffi. huius

C O R O-

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur, ductam basis partium mediam proportionalem esse: et adhuc basis et vniuscuiusque partium, latus quod ad partem, medium esse proportionale. quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA I. PROPOSITIO IX.

A data recta linea imperatam partem abscindere.



Sit data recta linea AB. oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere. Imperetur pars tertia: et ducatur a puncto A quædam recta linea AC, quæ cum ipsa A B angulum quemlibet contineat; sumaturq; in A C quod vis punctum D, et ipsi AD æquales ponantur DE EC. deinde iungatur BC; et per D ipsi BC parallela ducatur DF. Itaque quoniã vni laterum triãguli A B C, videlicet ipsi B C parallela ducta est F D; erit vt CD ad D A, ita BF ad FA; dupla autem est CD ipsius DA. ergo et BF ipsius FA dupla erit. tripla igitur est BA ipsius AF. Quare à data recta linea A B imperata tertia pars A F abscissa est. quod facere oportebat.

2. huius.

PROBLEMA II. PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam insectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.



Sit data quidem recta linea insecta AB, secta vero AC. oportet rectam lineam AB insectam ipsi AC sectæ similiter secare. Sit secta AC in punctis D E, & ponantur ita, ut angulũ quemvis contineant, iunctaq; BC per puncta quidem DE ipsi BC parallelæ ducãtur DF EG: per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammum igitur est vtrumque ipsorum F H HB: ac propterea DH quidem est æqualis FG, HK vero ipsi GB. Et quoniam vni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC parallela ducta est HE; erit vt CE ad ED, ita KH ad KD. æqualis autem est KH quidẽ ipsi BG, HD vero ipsi GF. est igitur vt CE ad ED, ita BG ad GF. Rursus quoniam vni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG parallela ducta est F D, vt ED ad DA, ita erit GF ad FA. Sed ostensum est ut CE ad ED, ita esse BG ad GF. vt igitur CE ad ED, ita est BG ad GF: & vt ED ad DA, ita G F ad FA. Ergo data recta linea insecta AB datæ rectæ lineæ sectæ AC similiter secta est. quod facere oportebat.

34 primi.

2. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Huic non dissimile est, quod docuit Pappus in septimo libro mathematicarum collectionum.

Datam rectam lineam in datam proportionem secare.

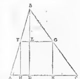
Sit data quidem recta linea AB: data autem proportio quam habet C ad D: & oporteat secare AB in proportionem C ad D. Inclinetur ad AB in quouis angulo recta linea AE: & ipsi quidem C æqualis abscindatur AF, ipsi vero D æqualis FG: & iuncta

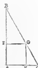
iuncta BG ducatur FH ei parallela. Quoniã igitur vt AH ad HB, ita est AF ad FG: est aũt AF ęqualis C, & FG ipsi D: erit vt AH ad HB, ita C ad D. Ergo AB secta est ad punctum H in proportionem C ad D. quod facere oportebat. 2 huius.

Ex ijs, quæ tum in quinto libro tum hoc loco tradita sunt, licebit problema absoluere, quod ad quartam propositionẽ quarti libri nos facturos recepimus.

In dato triãgulo quadratũ describere.

Sit datum triangulum ABC, in quo oporteat quadratum describere. vel igitur datũ triangulum acutiangulum est, vel rectangulum, vel obtusiangulum. Sit primũ acutiangulum, atque à puncto B ad AC perpendicularis ducatur BD: & ex præmissa diuidatur BD in puncto E, ita vt DE ad EB eandẽ proportionem habeat, quam AC ad BD. deinde per E ducatur FG ipsi AC parallela, & à punctis F G ducantur FH GK parallelae ipsi BD.





Quoniam igitur in triangulo ABD ducta est FE ipsi AD parallela. erit angulus BEF angulo BDA aequalis; & angulus BFE aequalis angulo BAD: atque est angulus FBE vtrique communis. ergo FBE triangulum triangulo ABD aequiangulum est. Similiter demonstrabimus triangulum EBG aequiangulum ipsi DBC. Vt igitur AD ad DB, ita est FE ad EB; & vt BD ad DC, ita BE ad EG. quare ex aequali vt AD ad DC, ita FE ad EG: & componendo vt AC ad CD, ita FG ad GE; conuertendoq; vt DC ad CA, ita EG ad GF. Sed ut BD ad DC, ita est BE ad EG. ergo ex aequali, vt BD ad AC, ita BE ad FG. Itaque cũ sit vt AC ad BD, ita DE ad EB, erit rursus ex aequali vt AC ad se ipsam, ita DE, hoc est HF ad FG. ergo HF ipsi FG est aequalis; ac propterea omnes HF FG GK KH inter se aequales sunt. Et quoniam FH est parallela ipsi BD: estq; angulus BDA rectus; & ipse KHF rectus erit. eadem ratione cum FG sit parallela AC, erit & HFG angulus rectus. Ergo & ipsis oppositi FGK GKH recti sint necesse est. quadratum igitur est ipsum FGKH: & descriptum est in triangulo ABC. Non aliter in triangulo rectangulo, vel obtusiangulo quadratum describemus, ab angulo recto, vel obtuso ad latus oppositum perpendicularem ducentes. Quòd si in triangulo rectangulo quadratum describere libeat, ita vt duo quadrati latera duobus lateribus trianguli nitantur; vt in subiecta figura, vtemur altera perpendiculari, quae est trianguli latus, videlicet BA, & similiter diuidetur AB in F, ita vt AF ad FB eandem proportionem habeat, quã CA ad AB; ducaturq; FG parallela ipsi AC, & GK parallela BA. Et quoniam in triangulo BAC ducta est FG ipsi AC parallela; similiter demonstrabimus triangulum BFG triangulo BAC aequiangulum esse. quare vt BA ad AC, ita BF ad FG. est autem vt CA ad AB, ita AF ad FB. ex aequali igitur, vt CA ad se ipsam, ita AF ad FG; ideoq; AF FG inter se aequales sunt. Et ex ijs, quae proxime diximus, sequetur AFGK quadratum esse, quod descriptum est in triangulo ABC; atque illud est, quod fecisse oportuit.

[Margin notes: 29 primi. — 4 huius — 22 quinti. — 18 quinti. — 4 quinti. — 34 primi. — 29 primi. — 34 primi. — 2 huius. — 4 huius.]

PROBLEMA III. PROPOSITIO XI.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB AC, & ponantur ita, vt angulum quemuis contineant. oportet ipsarum AB AC tertiam proportionalem inuenire. producantur enim

enim AB AC ad puncta DE ponaturq; ipsi AC æqualis BD & iuncta BC, ducatur per D ipsi BC parallela DE. Quoniam igitur uni laterum trianguli ADE, uidelicet ipsi DE parallela ducta est BC, erit vt AB ad BD, ita AC ad CE æqualis autem est BD ipsi AC. vt igitur BA ad AC, ita est AC ad CE. Quare datis rectis lineis AB AC tertia proportionalis inuẽta est CE. quod facere oportebat.

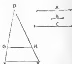


PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XII.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ A B C. oportet ipsarum A B C quartam proportionalem inuenire. Exponãtur duæ rectæ lineę DE DF angulũ quemuis EDF continentes: & ponatur ipsi quidem A ęqualis DG, ipsi vero B ęqualis GE, & ipsi C æqualis DH: iunctaq; GH per E ipsi parallela ducatur EF. Itaque quoniam vni laterum triãguli DEF, nimirum ipsi EF parallela ducta est GH, erit vt DG ad GE, ita DH ad HF. est autem DG ipsi A aequalis, GE vero ęqualis B & DH ęqualis C. Vt igitur A ad B, ita C ad HF. Quare datis tribus rectis lineis A B C quarta proportionalis inuẽta est HF. quod facere oportebat.

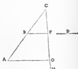
a. huius.



FED. COMMANDINVS EX PAPPO.

Tribus datis rectis lineis AB BC & D, Inuenire vt AB ad BC, ita aliam quandam ad ipsam D.

Rursus inclinetur recta linea CH in quouis angulo & abscindatur CF aequalis D: iunctaque BF, ipsi parallela ducatur AG. ergo rursus vt AB ad BC, ita erit GF ad FC, hoc est ad D. Inuẽta igitur est FG. quod facere oportebat.



PROBLEMA. V. PROPOSITIO. XIII.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem inuenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB BC, oportet ipsarum AB BC mediam proportionalem inuenire. ponantur in directum, & in ipsa AC describatur semicirculus ADC, ducaturq; à puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD, & AD DC iungãtur. Quoniam igitur in semicirculo est angulus ADC, is rectus est. & quoniam in triangulo rectangulo ADC ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB, erit DB basis partium AB BC media proportionalis. Duabus igitur datis rectis lineis AB BC media proportionalis inuenta est DB. quod facere oportebat.

31. tertij.

Cor. 8. huius



THEO-

THEOREMA. IX. PROPOSITIO. XIIII.

Aequalium et vnum vni equalem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent: et quorum parallelogrammorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; ea inter se sunt æqualia.



Sint æqualia parallelogrāma AB BC, æquales habentia angulos ad B, et ponantur in directum DB BE. ergo et indirectum erunt FB BG. Dico parallelogrammorum AB BC latera, quæ sunt circum equales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondere: hoc est ut DB ad BE, ita esse GB ad BF. compleatur enim parallelogrammum FE. et qm̄ parallelogrāmū AB æquale est parallelogrāmo BC, aliud autem aliquod est FE parallelogrammum, erit vt AB ad FE, ita 7.quinti.
BC ad FE. Sed vt AB quidem ad FE, ita est 1.huius.
DB ad BE; vt autem BC ad FE, ita GB ad BF. 11.quinti.
et ut igitur DB ad BE, ita GB ad BF. ergo parallelogrammorum AB BC latera, quę circū ęquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. Sed ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera, quæ circū ęquales angulos; sitq; vt DB ad BE, ita GB ad BF. Dico parallelogrāmum AB parallelogrāmo BC æquale esse. Qm̄ enim est vt DB ad BE, ita GB ad BF,



ut autem DB ad BE, ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE: et 1.huius.
ut GB ad BF, ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE, erit et vt AB 11.quinti.
ad FE, ita BC ad FE. ęquale igitur est AB parallelogrammum parallelogrammo 9.quinti.
BC. ergo ęqualium et vnum vni ęqualem habentium angulum parallelogrāmorū latera, quę circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent: et quorum parallelogrammorum vnum vni ęqualem habentium angulum latera, quæ circum ęquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

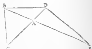
Ergo & indirectum erunt FB BG.] *Sunt enim anguli FBD FBE aequales duobus rectis; sed angulus EBG ponitur aequalis angulo FBD anguli igitur FBE, EBG duobus rectis sunt equales, ac propterea rectae lineę FB BG in directum sibi ipsis erunt.* 14.primi.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XV.

Aequalium, et vnum vni ęqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum ęquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent: et quorum triangulorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quę circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt ęqualia.

Sint triangula ABC ADE vnum angulum vni angulo ęqualem habentia, angulum

lum scilicet BAC angulo DAE. Dico triangulorum ABC ADE latera, quę circum
ęquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondere, hoc est vt CA ad AD, ita
esse EA ad A B. ponantur enim ita vt in di
14 primi. rectum sit CA ipsi AD. ergo et EA ipsi AB
in directum erit, et iungatur B D. Quoniā
igitur triangulum A B C æquale est trian-
7. quinti. lo ADE, aliud autē est ABD; erit vt CAB
triangulum ad triangulum B AD, ita trian
gulum ADE ad triangulum B A D. Sed vt
triangulum quidem CAB ad BAD trian-
1. huius. gulum, ita C A ad A D· ut autem triangu-
11. quinti. lum EAD ad ipsum BAD, ita E A ad A B. et ut igitur CA ad AD, ita E A ad AB.



Quare triangulorum ABC ADE latera, quæ circum ęquales angulos ex contraria
parte sibi ipsis respondent. Sed ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera triā
gulorum ABC ADE· et sit vt CA ad AD, ita EA ad AB. Dico triangulum ABC
triangulo ADE æquale esse. Iuncta enim rursus BD, quoniam vt C A ad A D, ita
1. huius. est EA ad AB; ut autem C A ad A D, ita ABC triangulum ad triangulum B A D;
11. quinti. et ut EA ad AB , ita triangulum EAD ad BAD triangulum : erit ut ABC trian-
gulum ad triangulum B AD, ita triangulum EAD ad BAD triāgulum. Vtrumque
igitur triangulorum ABC ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionē;
9. quinti. ac propterea æquale est ABC triangulum triangulo ADE. æqualium igitur et vnū
vni ęqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum ęquales angu-
los, ex contraria parte sibi ipsis respondent: et quorum triangulorum vnū vni æqua
lem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte si
bi ipsis respondent, ea inter se sunt ęqualia. quod demonstrare oportebat.

S C H O L I V M.

Aequiangulis dumtaxat triangulis contingit proportionalia latera habere, non etiam latera ex contraria parte sibi ipsis proportione respondentia. Aequalibus autem, et æquiangulis latera quoque ex cōtraria parte respondentia habere contingit; ęqualia enim sunt & latera: æqualitatis autem proportio ad se ipsam conuertitur, hoc est ex antecedente sumpto & consequente eadem est, & differens. At æqualibus quidem, & vnum angulum ęqualem habentibus contingit solum latera habere ex cōtraria parte respondentia, non tamen omnia, sed quæ circum æquales angulos consistunt. Quare alia quidem solum proportionalia habent latera, alia vero & proportionalia, & ex contraria parte respondentia. & sunt prima quidem ęquiangula & non æqualia: secunda vero æqualia, & vnum angulum habentia æqualem, non tamen æquiangula: reliqua autem & æqualia, & æquiangula sunt.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XVI.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum ęquale est ei rectangulo, quod medijs continetur: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs cōtinetur, quattuor rectę lineæ proportionales erūt.

Sint

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD E F, sitque vt AB ad CD, ita E ad F. Dico rectangulum contentum rectis lineis AB F æquale esse ei, quod ipsis CD E continetur. Ducantur enim à punctis A C ipsis AB CD ad rectos angulos AG CH: ponaturq; ipsi quidem F æqualis AG: ipsi vero E æqualis CH & compleantur BG DH parallelogramma. Quoniam igitur est vt AB ad CD, ita E ad F; est autem E æqualis CH, & F ipsi AG: erit vt AC ad CD, ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG DH latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quę circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia: ergo parallelogrammum BG æquale est parallelogrammo DH: atque est parallelogrammum quidem BG, quod rectis lineis AB F continetur, est enim AG æqualis F: parallelogrammũ vero DH quod cõtinetur ipsis CD E; cum CH ipsi E sit æqualis. rectangulum igitur contentum AB F est æquale ei, quod ipsis C D E continetur. Sed rectangulum contentum AB F sit æquale ei, quod CD E continetur. Dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet vt AB ad CD, ita E ad F. iisdem enim constructis quoniam rectangulum contentum AB F est æquale ei, quod CD E continetur: atque est contentum quidem AB F rectangulum BG; etenim AG est æqualis F: contentum vero CD E est rectangulum DH, quod CH ipsi E sit æqualis: erit parallelogrammum BG æquale parallelogrammo DH: & sunt æquiangula. æqualium autem, & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. quare vt AB ad CD, ita CH ad A G: æqualis autem est CH ipsi E, & AG ipsi F. Vt igitur AB ad CD, ita E ad F. Ergo si quattuor rectæ lineę proportionales fuerint, rectangulũ extremis contentum æquale est ei, quod medijs continetur: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs continetur, quatuor rectæ lineę proportionales erunt. quod oportebat demonstrare,



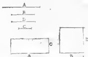
14 huius.

14 huius.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum ęquale est ei, quod à media fit, quadrato: & si rectangulum extremis contentum ęquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato; tres rectę lineæ proportionales erunt.

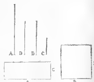
Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C: & sit vt A ad B, ita B ad C. Dico rectãgulum cõtentũ A C ęquale esse ei, quod à media B fit, quadrato. ponatur ipsi B æqualis D. Et quoniam vt A ad B, ita B ad C, æqualis autem B ipsi D; erit vt A ad B, ita D ad C. Si autem quattuor rectę lineę proportionales fuerint rectangulum extremis cõtentum est æquale ei, quod medijs continetur. ergo rectangulum AC contentum est æquale ei, quod continetur BD. Sed rectangulum contentum BD est ęquale quadrato, quod fit ex ipsa B; etenim B est æqualis D. rectangulum igitur contentum A C est æquale ei, quod ex B fit, quadrato. Sed rectangulum contentum AC æquale sit quadrato, quod fit ex B. Dico vt A ad B, ita esse B ad C. iisdem enim constructis



7 quinti.
Ex antecedente.

quoniam rectangulum contentum AC æquale est quadrato, quod fit ex B; at quadratum, quod fit ex B est rectangulum, quod ipsis BD continetur, est enim B ęqualis ipsi D: erit rectangulum contentum AC æquale ei, quod BD continetur. Si autem rectãgulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod medijs cõtinetur, quattuor rectæ lineæ proportionales erunt. est igitur vt A ad B, ita C ad D. ęqualis autem B ipsi D. ergo vt A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineę proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum est æquale ei, quod à media fit, quadrato: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato, tres rectæ lineę proportionales erunt. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.



PROBLEMA VI. PROPOSITIO. XVIII.

A data recta linea dato rectilineo simile, & similiter positum rectilineum describere.

Sit data recta linea AB; datum autem rectilineũ CE. oportet à recta linea AB rectilineo CE simile, & similiter positũ rectilineũ describere. Iungatur DF, & ad rectam lineã AB, & ad pũcta in ipsa AB, angulo quidẽ C ęqualis angulus constituatur GAB; angulo autem CDF angulus ABG. reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB est æqualis. ergo æquiangulum est FCD triangulum triangulo GAB; ac propterea vt FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. Rursus cõstituatur ad rectã lineam BG, & ad puncta in ipsa BG angulo quidem DFE æqualis angulus BGH; angulo autem FDE æqualis GBH. ergo reliquus qui ad E reliquo qui ad H est æqualis. æquiangulum igitur est triangulum FDE triangulo GBH. quare vt FD ad GB, ita FE ad GH, & ED ad HB. ostensum autem est & vt FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. & vt igitur FC ad AG, ita CD ad AB, & FE ad GH, & adhuc ED ad HB. itaque quoniam angulus quidem CFD est æqualis angulo AGB; angulus autem DFE angulo BGH: erit totus CFE angulus toti AGH æqualis. Eadem ratione & CDE est æqualis ipsi ABH: & præterea angulus quidem ad C angulo ad A ęqualis, angulus vero ad E angulo ad H. ęquiangulum igitur est AH ipsi CE, & latera circum æquales ipsi angulos habet proportionalia. Ergo rectilineum AH rectilineo CE simile erit. A data igitur recta linea AB dato rectilineo CE simile & similiter positum rectilineum AH descriptũ est. quod facere oportebat.

23. primi. 4. huius. 4. huius 11 quinti. Diffi. 1. huius.



THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIX.

Similia triangula inter se sunt in dupla proportione laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC DEF habentia angulum ad B æqualẽ angulo ad E. & sit vt AB ad BC, ita DE ad EF; ita vt latus BC homologũ sit lateri F. Dico ABC triãgulum ad triangulum DEF duplam proportionem habere eius, quam habet BC ad EF.

EF. Sumatur enim ipsarum BC EF tertia proportionalis BG, vt sit, sicut BC ad EF, ita EF ad BG. & iūgatur GA. Quonia igitur vt AB ad BC, ita est DE ad EF, erit permutando vt AB ad DE, ita BC ad EF. Sed vt BC ad EF, ita EF ad BG. & vt igitur AB ad DE, ita EF ad BG. quare triangulorum ABG DEF latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. quorum autem triangulorum vnum vni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se ęqualia sunt. æquale igitur est ABG triangulum triangulo DEF. Et quoniam est vt BC ad EF, ita EF ad BG; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplam proportionem habet eius, quam habet ab secundam. habebit BC ad BG duplam proportionem eius, quam habet BC ad EF. Vt autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG. ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. est autem ABG triangulum triangulo DEF ęquale. & triangulum igitur ABC ad triangulum DEF duplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad EF. Quare similia triangula inter se in dupla sunt proportione laterum homologorum. quod ostendere oportebat.



.11 huius.
11 quinti.
15. huius.
Diffinit. 10. quinti.
1 huius.

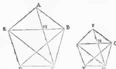
COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si tres rectę lineę proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod sit à prima ad triangulum, quod à secunda simile, & similiter descriptum: quoniam ostensum est vt CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulū ABG, hoc est ad triangulū DEF. quod ostendere oportebat.

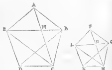
THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XX.

Similia polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: & polygonum ad polygonum duplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint similia polygona ABCDE FGHKL, & sit AB homologum ipsi FG. Dico polygona ABCDE FGHKL in similia triangula diuidi, & numero æqualia, & homologa totis: & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplam proportionem habere eius, quam habet AB ad FG. Iungantur BE EC GL LH. & quoniam simile est ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL est æqualis: atque est vt BA ad AE, ita GF ad FL. Quoniam igitur duo triangula sunt ABE FGL vnum angulum vni angulo æqualem habentia; circum æquales autem angulos latera proportionalia: erit triangulum ABE triangulo FGL æquiāgulum. ergo & simile. angulus igitur ABE ęqualis est angulo FGL. est autem & totus ABC angulus



6 huius.



gulus æqualis toti FGH, propter similitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH est æqualis. Et quoniam ob similitudinem triangulorum ABE FGL, est vt EB ad BA, ita LG ad GF. Sed & propter similitudinem polygonorum, vt AB ad BC, ita est FG ad GH, erit ex æquali vt EB ad BC, ita LG ad GH. & circum æquales angulos EBC LGH latera sunt proportionalia. ęquiangulum igitur est EBC triangulũ triangulo LGH, quare & simile. Eadem ratione & ECD triangulum simile est triangulo LHK. Similia igitur polygona ABCDE FGHKL in similia triãgula diuiduntur, & numero æqualia. Dico & homologa totis, hoc est vt proportionalia sint triangula, & antecedentia quidem esse ABE EBC ECD, consequentia aũt ipsorum FGL LGH LHK: & ABCDE polygonũ ad polygonũ FGHKL duplã proportionẽ habere eius, quã latus homologum habet ad homologum latus; hoc est AB ad FG. Iungantur enim AC FH Et quoniam propter similitudinem polygonorum angulus ABC est ęqua-
6 huius. lis angulo FGH, atque est vt AB ad BC, ita FG ad GH. erit triangulum ABC triangulo FGH ęquiangulum. æqualis igitur est angulus quidem BAC angulo GFH, angulus vero BCA angulo GHF. pręterea quũ ęqualis est BAM angulus angulo GFN, ostensus autem est & ABM angulus æqualis angulo FGN, erit & reliquus AMB reliquo FNG æqualis. ergo ęquiangulum est ABM triangulum triangulo FGN. Similiter ostendemus & triangulum BMC triangulo GNH æquiangulum esse. Vt igitur AM ad MB, ita est FN ad NG, & vt BM ad MC, ita GN ad NH. quare & ex æquali vt
1. huius. AM ad MC, ita FN ad NH. Sed vt AM ad MC, ita ABM triãgulũ ad triãgulũ MBC, & triãgulũ AME ad ipsũ EMC, inter se enim sunt vt bases. & vt vnũ antecedẽtiũ ad vnũ
12. quinti. consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequẽtia. Vt igitur AMB triangulum ad triangulum BMC, ita triangulum ABE ad ipsum CBE. Sed vt AMB ad B
1 huius. MC, ita AM ad MC. & vt igitur AM ad MC, ita ABE triãgulũ ad triangulũ EBC. Eadẽ ratione & vt FN ad NH, ita FGL triãgulũ ad triãgulũ GLH. atq; est vt AM ad MC, ita FN ad NH. ergo & vt triãgulũ ABE ad triãgulũ BEC, ita triangulum FGL ad GHL triangulum: & permutando vt ABE triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum EBC ad triangulum GHL. Similiter ostendemus iunctis BD GK, & vt BEC triangulum ad triangulum LGH, ita esse triangulum ECD ad triangulum LHK. Et quũ est vt ABE triãgulũ ad triãgulũ FGL, ita triãgulũ EBC ad triãgulũ LGH, & adhuc triangulum ECD ad ipsum LHK: erit & vt vnum antecedentium ad vnum con-
12. quinti. sequentium, sic omnia antecedentia ad omnia consequentia, ergo vt triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. Sed ABE triangulum ad triangulum FGL duplam proportionem habet eius, quam latus
Ex antecedente. homologum AB habet ad homologum latus FG; similia enim triangula in dupla sunt proportione laterum homologorum. ergo & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplam proportionem habet eius, quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia: & homologa totis, et polygonum ad polygonum duplam habet proportionem eius, quam habet latus homologum ad homologum latus. quod oportebat demonstrare.

Eodem modo & in similibus quadrilateris ostendetur ea esse in dupla proportione laterum homologorum. ostensum autem est & in triangulis.

COROLLARIVM PRIMVM.

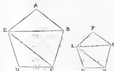
Ergo vniuersę similes rectilineę figurę inter se sunt in dupla propor-

proportione homologorum laterum. & si ipsarum AB FG tertiam proportionalem sumamus, quę sit X; habebit AB ad X duplam proportionem eius, quam habet AB ad FG. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplam proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AB ad FG. atque ostensum est hoc in triangulis.

COROLLARIVM SECVNDVM.

Vniuerse igitur manifestum est, si tres rectę lineę proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita esse figuram, quæ fit à prima ad eam, quæ à secunda, similem & similiter descriptam. quod ostendere oportebat.

Ostẽdemus etiam aliter & expeditius homologa esse triãgula.



Exponãtur enim rursus polygona ABCDE FGHKL, & iũgatur BE EC GL LH. Dico vt ABE triãgulũ ad triãgulũ FGL, ita esse triãgulũ EBC ad triãgulũ LGH; & triãgulũ CDE ad ipsum HKL. Qm̃ enim simile est ABE triãgulũ triagulo FGL; habebit ABE triangulũ ad triangulũ FGL duplã proportionẽ eius, quam habet BE ad GL. Eadẽ ratione & triãgulũ BEC ad GLH triangulum duplam proportionem habet eius, quam BE ad GL. est igitur vt ABE triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulũ. Rursus quoniam simile est triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplam proportionem eius, quam recta linea CE habet ad rectam HL. Eadem ratione, & ECD triangulum ad triangulum LHK duplam proportionem habet eius, quam CE ad HL. est igitur vt triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. ostensum autem est & vt EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. ergo & vt triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum, & triangulum ECD ad ipsum LHK. & vt igitur vnum antecedentium ad vnum consequentium, sic omnia antecedentia ad omnia consequentia, & reliqua vt in priori demonstratione. quod ipsum demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

11 quinti.

12. quinti.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt.

Sit enim vtrumque rectilineorum A B simile rectilineo C. Dico & rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, & ipsi æquiangulum erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. Rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, ęquiangulum ipsi erit, & circum

cum æquales angulos latera proportionalia habebit. Vtrumque igitur rectilineorum A B ipsi C æquiangulum est, & circum æquales angulos latera habet proportionalia. Quare & rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraq; circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipsi B est simile. quod demonstrare oportebat.

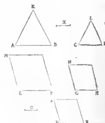


THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XXII.

Si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quattuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH; & vt AB ad CD, ita sit EF ad GH. describanturq; ab ipsis quidem AB CD similia & similiter posita rectilinea KAB LCD. ab ipsis verò EF GH describantur rectilinea similia, & similiter posita MF NH. Dico vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita esse rectilineũ MF ad ipsum NH rectilineũ. Sumatur enim ipsarum quidē AB CD tertia proportionalis X; ipsarum vero EF GH tertia proportionalis O. Et quoniam est vt AB ad CD, ita EF ad GH. vt autem CD ad X, ita GH ad O, erit ex æquali vt AB ad X, ita EF ad O. Sed vt AB quidem ad X, ita est rectilineum KAB ad LCD rectilineum vt autem EF ad O, ita rectilineum MF ad rectilineum NH. Vt igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita est rectilineum MF ad NH rectilineum. Sed sit vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineũ MF ad rectilineũ NH. Dico vt AB ad CD, ita esse EF ad GH. fiat enim vt AB ad CD, ita EF ad PR. & describatur ab ipsa PR alterutri rectilineorum MF NH simile & similiter positum rectilineum SR. Quoniam igitur est vt AB ad CD, ita EF ad PR & descripta sunt ab ipsis quidem AB CD similia & similiter posita KAB LCD rectilinea, ab ipsis vero EF PR similia & similiter posita rectilinea MF SR; erit vt KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad RS rectilineum. ponitur autem & vt rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. ergo vt rectilineũ MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineum ad rectilineum SR. Quod cum rectilineum MF ad vtrumque ipsorum NH SR eandem habeat proportionem, erit rectilineum NH ipsi SR æquale. est autem ipsi simile, & similiter positum. Ergo GH est æqualis PR. Et quoniam vt AB ad CD, ita est EF ad PR, æqualis autem PR ipsi GH; erit vt AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quattuor rectę lineę proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia erunt. & si rectilinea, quæ ab ipsis

Margin notes: 18 huius. | 11 huius. | Coro. 20 huius. | 22 quinti. | 12 huius. | 9. quinti.

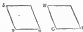


ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineę proportionales erunt. quod oportebat demonstrare.

LEMMA.

At vero si rectilinea æqualia & similia sint, homologa ipsorũ latera inter se ęqualia esse, hoc modo demonstrabimus.

Sint æqualia & similia rectilinea NH SR: & sit vt HG ad GN, ita RP ad PS. Dico RP ipsi HG esse ęqualem. Si enim inæquales sint, vna ipsarum maior erit. Sit RP maior, quam HG. Et quoniam est vt RP ad PS, ita HG ad GN, & permutando erit vt RP ad HG, ita PS ad GN. maior autem est PR, quàm HG. ergo & PS quam GN maior erit. quare & rectilineum RS rectilineo HN est maius. Sed & æquale, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est PR ipsi GH. ergo æqualis sit necesse est. quod oportebat demonstrare.



F. C. COMMENTARIVS.

Ergo GH est æqualis PR] *Demonstrat hoc antecedens lemma ratione ducente ad id, quod fieri non potest. Sed tamen licet etiam recta demonstratione vti, in hunc modum.* *

LEMMA.

Sint æqualia & similia rectilinea NH SR: sitq; latus GH homologũ ipsi PR. Dico GH ipsi PR æqualẽ esse. *Fiat enim vt GH ad PR, ita PR ad aliã quae sit T, erit GH ad T, vt rectilineũ NH ad rectilineũ SR. ergo GH est aequalis* 21 huius Corol. 20 huius. *ipsi T. Sed cũ tres rectae lineae GH PR T sint proportionales, erit rectangulũ contentum GH T,* 17. huius. *hoc est quadratum GH aequale quadrato PR; ac propterea recta linea GH ipsi PR est aequalis. quod oportebat demonstrare.*



THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XXIII.

Aequiangula parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam.

Sint æquiangula parallelogramma AC CF æqualem habentia BCD angulum angulo ECG. Dico parallelogrãmum AC ad parallelogrammum CF proportionem habere compositam ex lateribus, videlicet compositam ex proportione, quam habet BC ad CG, & ex proportione quã DC habet ad CE. ponatur enim vt BC sit in directum ipsi CG. ergo & DC ipsi CE in directum erit: & compleatur DG parallelogrammum: exponaturq; recta linea quędã K: & fiat vt BC quidẽ ad CG, ita K ad L; vt autem DC ad CE, ita L ad M. proportiones igitur ipsius K ad L: & L ad M eędem sunt, quę proportiones laterum, videlicet BC ad CG, & DC ad CE. Sed proportio K ad M composita est ex proportione K ad L, & proportione L ad M. quare & K ad M proportionem habet ex lateribus compositam. Et quoniam est vt BC ad CG, ita 14 primi. huius. 1 huius.



X AC



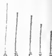
AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; sed
quinti. vt BC ad CG, ita K ad L: erit & vt K ad L, ita parallelogrā
mum AC ad CH parallelogrammum. Rursus quoniam
est ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad paralel
logrammum CF: vt autem DC ad CE, ita L ad M, & vt
11 quinti. L ad M, ita erit parallelogrammum CH ad CF parallelogrāmū. Itaque cū ostensum sit, vt K quidē ad L, ita AC parallelogrāmū ad parallelogrāmū CH: vt aūt L ad M, ita parallelogrammū CH ad CF parallelogrammum; erit ex æquali vt K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipsum CF. habet autem K ad M proportionem ex lateribus compositam. ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compositam ex lateribus. æquiangula igitur parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

COROLLARIVM. Ex iam demōstratis colligitur triangula, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habere ex lateribus compositam; sunt enim ea parallelogrammorum æquiangulorum dimidia.

Colligitur præterea quo modo ex duabus datis proportionibus, vel etiam pluribus proportio componatur, ex proportionibus enim BC ad CG, & DC ad CE proportio composita est K ad M. Quod si ex tribus componenda sit proportio, rursus ex ea, quę ex duabus constat, & ex tertia aliam eodem modo componemus, quę quidem ex tribus composita erit, & ita deinceps in alijs.

Proportio autem data ex data proportione maiori hoc modo auferetur.

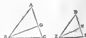


Sint datae proportiones A ad B, & C ad D, quarū proportio C ad D sit maior, & oporteat à proportione C ad D auferre proportionem
11. huius. *A ad B. fiat vt A ad B, ita C ad aliam videlicet ad F, quae inter C & D media statuatur. Dico proportionem A ad B iam ablatā esse à proportione C ad D, & proportionem, quę relinquitur esse eam, quam habet F ad D. Quoniam enim proportio C ad D componitur ex proportione C ad F, & proportione F ad D, si auferatur vna dictarum proportionum, videlicet C ad F, quae est A ad B, relinquetur proportio F ad D. atque illud est. quod facere oportebat.*

Quomodo autem in numeris proportiones, & componantur & auferantur ex iam dictis facile constare potest, & ex ijs, quae tradit Purbachius, vel Regiomontanus in epitomate magnae constructionis Ptolemęi propositione XVIII. primi libri. Sed placuit hoc loco apponere theoremata nonnulla à nobis elaborata, quae ab his non multum abhorrent: & elementorum loco esse possunt.

THEOREMA I.

Triangula, quorum vnus angulus vni angulo est æqualis, inter se proportionem habent eandem, quam rectangula, quæ lateribus ęqualem angulum comprehendentibus, continentur.



Sint triangula ABC DEF, sitq; angulus A angulo D aequalis. Dico triangulum ABC ad triangulum DEF eandem proportionem habere, quam BAC rectangulum ad rectangulum EDF. Ducantur perpendiculares BG EH. erit triangulum BAG triangulo EDH simile; est enim angulus ad A aequalis angulo

ad D, & angulus BGA rectus aequalis recto EHD. ergo & reliquus reliquo aequalis. Vt igitur GB ad BA, ita HE ad ED. Sed vt GB ad BA, ita rectangulum quod fit ex BG & AC ad rectangulum BAC, cum habeant eandem altitudinem, videlicet rectam lineam AC. & similiter vt HE ad ED, ita rectangulum ex EH, & DF ad rectangulum EDF. rectangulum igitur ex BG & AC ad rectangulum BAC est vt rectangulum ex EH, & DF ad rectangulum EDF; & permutando rectangulum ex BG & AC ad rectangulum ex EH & DF, vt BAC rectangulum ad rectangulum EDF. Sed rectanguli ex BG & AC dimidium est ABC triangulum ex 41 primi, habent enim eandem basim AC, & altitudinem eandem BG: & rectanguli ex EH & DF dimidium triangulum DEF. triangulum igitur ABC ad triangulum DEF eandem proportionem habet, quam rectangulum BAC ad rectangulum EDF. Quare triangula quorum vnus angulus vni angulo est aequalis inter se proportionem habent eandem, quam rectangula, quae lateribus aequalem angulum comprehendentibus continentur. quod demonstrare oportebat.

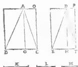
4 huius. 1 huius. 11 quinti. 15 quinti.

COROLLARIVM.

Ex hoc sequitur parallelogramma etiam equiangula inter se proportionem habere eandem, quam rectangula, quæ ipsorum lateribus continentur, cum sint eius modi triangulorum dupla. 15 quinti.

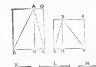
THEOREMA II.

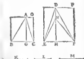
Triangula et parallelogramma inter se proportionem habent compositã ex proportione basium, et proportione altitudinum.



Sint triangula ABC DEF: & ducantur perpendiculares AG DH. Dico triangulum ABC ad triangulum DEF proportionem habere compositam ex proportione basis BC ad basim EF; & ex proportione altitudinis AG ad DH altitudinem. Vel igitur AG est aequalis DH, vel inequalis, & rursus vel BC est aequalis EF vel inequalis. Sit primum AG aequalis DH, & BC inequalis ipsi EF, fiatq; vt BC ad EF, ita recta linea quędam K ad L: & vt AG ad DH, ita L ad M. Itaque triangulum ABC ad triangulum DEF est, vt basis BC ad EF basim ex prima huius, hoc est vt K ad L. & cum DH sit aequalis AG, erit M ipsi L aequalis: triangulumq; ABC ad ipsum DEF, vt K ad M. proportio autem K ad M composita est ex proportione K ad L, & proportione L ad M, hoc est ex proportione basis BC ad basim EF, & proportione altitudinis AG ad altitudinem DH. Eodem modo demonstrabitur, si basis BC sit aequalis basi EF, cum inequales sint altitudines AG DH: erunt enim KL inter se aequales, & ex ijs, quae demonstrauimus ad primam huius, triangulum ABC ad triangulum DEF proportionem habebit eandem, quam L ad M, hoc est quam K ad M. triangulum igitur ABC ad triangulum DEF proportionem habet compositam ex proportione K ad L, hoc est basis BC ad basim EF. & ex proportione L ad M, hoc est altitudinis AG ad DH altitudinem. Quòd si bases BC EF aequales sint, itemq; altitudines aequales AG DH, nihilominus idem sequetur, nam K L M inter se aequales erunt, & triangulũ ad triangulũ proportionem habebit compositam ex proportione K ad L. & L ad M. hoc est ex proportione basium & proportione altitudinũ. Denq; si bases BC EF inaequales sint, & similiter inęquales altitudines AG DH. Ponatur AG minor, quàm

12 huius. 7 quinti.

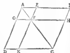




DH. & ab ipsa D H abscindatur H N aequalis AG: iunganturq́; EN NF; & rursus fiat vt basis B C ad basim E F, ita K ad L: vt autem N H ad HD, hoc est vt AG ad H D, ita L ad M. Quoniam igitur triangula ABC NEF eandem habent [1.huius.] *altitudinem, inter se erunt vt bases. quare triangulum A B C ad triangulum N E F est vt B C ad EF, hoc est vt K ad L. Sed triangulum N E F ad* [Ex demonstratis 1. huius.] *triangulum DEF est vt altitudo NH, vel A G ad DH altitudinem, videlicet vt L ad M. ex aequali igitur triangulum A B C ad triangulum D E F, est vt K ad M. habet aũt K ad M proportionẽ compositã ex proportione K ad L, & proportione L ad M. ergo & triangulũ ABC ad triangulũ DEF proportionẽ habet compositã ex proportione K ad L & proportione L ad M, hoc est ex proportione basis BC ad basim EF, & proportione altitudinis AG ad altitudinẽ DH. Sed cum trianguli ABC duplũ sit parallelogrãmũ B O, & trianguli DEF duplum parallelogrammum E P;* [15.quinti.] *habebit parallelogrammum B O ad parallelogrammum EP proportionem compositam ex proportione basis BC ad basim EF, & proportione altitudinis AG ad DH altitudinem. triangula igitur & parallelogramma inter se proportionem habent cõpositam ex proportione basium, & proportione altitudinum. quod oportebat demonstrare.*

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XXIIII.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, et toti et inter se similia sunt.



Sit parallelogrammum ABCD, cuius diameter AC: circa diametrum vero A C parallelogrãma sint E G HK. Dico parallelogramma E G HK, et toti ABCD, et inter se similia esse. Quoniam enim vni laterum trianguli A B C, videlicet ipsi BC parallela ducta est EF, [2.huius.] erit vt B E ad EA, ita CF ad FA. Rursus quoniam vni laterum trianguli ACD, nempe ipsi CD ducta est parallela FG, vt CF ad FA, ita erit DG ad GA. Sed vt [11.quinti.] C F ad F A; ita ostensa est et B E ad E A. ergo et vt BE ad EA, ita DG ad GA, componendoq́; vt BA ad AE, ita DA ad AG, et permutando vt BA ad AD, ita EA ad AG. parallegrammorum igitur ABCD EG latera, quę circa communem angulum BAD proportionalia sunt. Et quoniam parallela est GF ipsi DC, [29.primi.] angulus quidem AGF est æqualis angulo A D C; angulus uero GFA ęqualis angulo DCA; et angulus DAC est communis duobus triãgulis ADC AGF, erit triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. Eadem ratione et triãgulum A C B æquiangulum est triangulo A F E. totum igitur parallelogrammum ABCD parallelogrãmo EG est æquiangulum. [4.huius.] ergo ut AD ad D C, ita AG ad GF: vt autem DC ad CA, ita GF ad FA: et vt A C ad C B, ita A F ad F E: et præterea vt CB ad BA, ita FE ad EA. Itaque quoniam ostensum est vt D C ad C A, ita esse G F ad FA: vt autem AC ad CB, ita AF ad F E; erit ex æquali vt D C ad C B, ita GF ad FE. ergo parallelogrammorum ABCD EG proportionalia sunt latera, quę circum ęquales angulos; ac propterea parallelogrammum ABCD parallelogremmo EG est simile. Eadem ratione & parallelogrammum ABCD simile est parallelogrammo KH. Vtrumque igitur ipsorum EG HK parallelogrammorum parallelogrammo ABCD est simile. [21.huius.] quæ autem eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt. parallelogrammum igitur EG simile est parallelogrammo HK. Quare omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma & toti & inter se sunt similia. quod ostendere oportebat.

PRO-

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXV.

Dato rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.

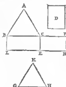
Sit datum quidem rectilineum, cui oportet simile constituere ABC, cui autem æquale sit D. oportet ipsi ABC simile, & ipsi D æquale idem constituere. applicetur enim ad rectam quidem lineam BC triangulo ABC æquale parallelogrammum BE; ad rectam vero CE applicetur parallelogrammum CM æquale ipsi D, in angulo FCE, qui CBL angulo est æqualis. in directum igitur est BC ipsi CF, & LE ipsi EM. Sumatur ipsarum BC CF media proportionalis GH. & ab ipsa GH describatur triangulum KGH simile & similiter positum triangulo ABC. Et quoniam est vt BC ad GH, ita GH ad CF, si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, vt prima ad tertiam, ita est figura, quæ sit à prima, ad eam, quæ à secunda, similem & similiter descriptam: erit vt BC ad CF, ita ABC triangulum ad triangulum KGH. Sed & ut BC ad CF, ita parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum. & vt igitur triangulum ABC ad triangulum KGH, ita BE parallelogrammum ad parallelogrammum EF. quare permutando vt ABC triangulum ad parallelogrammum BE, ita triangulum KGH ad EF parallelogrammum. est autem triangulum ABC æquale parallelogrammo BE. æquale igitur est & KGH triangulū parallelogrāmo EF. Sed EF parallelogrāmū æquale est rectilineo D. ergo & triangulum KGH ipsi D est æquale. est autem KGH simile triangulo ABC. Dato igitur rectilineo ABC simile, & alteri dato æquale idem constitutum est KGH. quod facere oportebat.

44. primi.

14 primi. 13 huius. 18. huius.

Cor. 20. huius.

1. quinti.

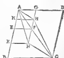


THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVI.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti.

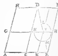
A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AF auferatur, simile ipsi ABCD, & similiter positum, communemq; ipsi angulum habens DAB. Dico parallelogrammum ABDD circa eādem esse diametrum parallelogrammo AF. non enim, sed si fieri potest, sit ipsorum diameter AHC & producatur GF vsque ad H, ducaturq; per H alterutri ipsarum AD BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum parallelogrammo KG, & erit parallelogrammum ABCD parallelogrammo KG simile. ergo vt DA ad AB, ita GA ad AK. est autem & propter similitudinem parallelogrammorum ABCD EG, vt DA ad AB, ita GA ad AE. et vt igitur GA ad AE, ita GA ad AK. Quòd cum GA ad utramque ipsarum AK AE eandem proportionem habeat, erit AE ipsi AK æqualis, minor maiori, quod fieri non potest. Non igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum parallelogrammo AH. Quare circa eandem diametrum erit ipsi AF. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, et similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti. quod demonstrare oportebat.

24. huius. 1. diff. huius. 11. quinti. 9. quinti.



THEOREMA XX. PROPOSITIO XXVII.

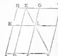
Omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus et similiter positis ei quæ à dimidia describitur; maximũ est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.



A Sit recta linea A B; seceturq; bifariam in C; et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammũ A D deficiens figura parallelogramma DB, simili & similiter posita ei, quæ a dimidia ipsius A B descripta est, hoc est à C B. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus, et similiter positis ipsi DB, maximum esse AD. applicetur enim ad re-

B ctam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma FB simili et similiter posita ipsi DB. Dico AD parallelogrãmum parallelogrammo A F maius esse. Quoniam enim simile est parallelogrammum DB parallelogrammo FB, circa eãdem diametrum sunt. Ducatur eorum diameter DB, et describatur figura. Quoniam igitur CF est æquale ipsi FE, commune apponatur FB. totum igitur CH toti KE est ęquale. Sed C H est æquale C G, quoniam et recta linea AC ipsi CB. ergo et GC ipsi EK æquale erit. commune apponatur CF. totum igitur AF est æquale gnomoni LMN, quare et DB hoc est AD parallelogrammum, parallelogrammo AF est maius. omnium igitur parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrãmis similibus, et similiter positis ei, quæ à dimidia describitur, maximum est, quod ad dimidiam est applicatum. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.
43 primi.
36 primi.



C ALITER. Sit enim rursus AB secta bifariã in pũcto C, et applicatum sit A L. deficiens figura L B. et rursus ad rectam lineam AB applicetur parallelogrãmum AE deficiens figura E B simili, et similiter posita ei, quæ à dimidia AB describitur, videlicet ipsi LB. Dico parallelogrammum AL, quod ad dimidiã est applicatum maius esse parallelogrammo AE. Quoniam enim simile est EB ipsi L B, circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter EB, et describatur figura. Et quoniã LF ęquale est L H, etenim FG ipsi GH est æqualis: erit LF ipso EK maius. est aũt LF æquale DL. maius igitur est et D L ipso EK. commune apponatur KD. ergo totum AL toto A E est maius. quod oportebat demonstrare.

36 primi.
43 primi.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum ad deficiens figura parallelogramma.]

Describatur à recta linea CB parallelogrammum quodcumque libuerit D B, et totum parallelogrammum ABE compleatur. erit ad rectam lineam AB applicatum parallelogrammum A D deficiens figura parallelogramma DB, simili & similiter posita ei, quæ a dimidia ipsius AB descripta est.

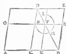
B Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum A F deficiens figura parallelogramma FB, simili et similiter posita ipsi DB.

Sumatur in recta linea A B inter C B quodvis punctum K, & ab ipsa KB describatur parallelogrammum simile & similiter positum ipsi DB parallelogrammo, quod sit K B H F, et HF ad G

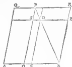
producatur

producatur. erit rursus ad rectam lineam A B applicatum parallelogrammum A F deficiens figura parallelogramma FB, simili & similiter posita ipsi DB.

Sit enim rursus ab secta bifariam in puncto C. *Nō videtur hec alia demonstratio, sed alius casus. quare theorema fortasse in hunc modū aptius, et manifestius explicabitur.* C



Sit recta linea AB, seceturq; bifariam in C, et ab ipsa CB describatur parallelogrammum vtcunque DB, et totum parallelogrammum A B E compleatur. Iam ad rectam lineam AB applicatum erit parallelogrammum AD, deficiens figura parallelogramma DB simili & similiter posita ei, quę descripta est à dimidia ipsius A B, hoc est à CB. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam A B applicatorum, & deficientium figuris similibus et similiter positis ipsi DB, maximum esse AD. Iugatur enim DB parallelogrammi DB diameter. erit recta linea ad quam alia parallelogramma applicanda sunt, vel maior quàm dimidia ipsius AC vel minor. Sumatur primo maior, & sit A K; atque à puncto K ipsi BE parallela ducatur K F, quae diametro D B in F occurrat; & per F ducatur G F H parallela ipsi AB & figura compleatur. erit ad AB applicatum aliud parallelogrammum AF deficiens figura parallelogramma FB, simili & similiter posita ipsi D B; quippe quae circa eandem diametrum consistat. Dico igitur AD maius esse quàm AF. Quoniam enim suplementum CF est aequale ipsi FE; commune apposito FB, erit totum CH toti KE aequale. at CH est aequale GC, quoniam & AC ipsi CB. ergo & GC aequale est KE. apponatur vtrique commune CF. totum igitur AF gnomoni LMN est aequale. quare & DB parallelogrammum, hoc est AD maius erit quàm A F. 43 Primi.



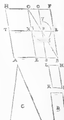
Sumatur deinde A O minor, quàm dimidia AC, & per O ipsi BE parallela ducatur O P, quae cum diametro B D producta conueniat in P. denique per P ducatur QPR parallela ipsi AB, & secunda figura compleatur. Erit rursus ad AB applicatum aliud parallelogrammum A P deficiēs figura parallelogramma PB ipsi D B simili & similiter posita. Dico rursus AD quàm AP maius esse. Quoniam enim parallelogrāmum D R est aequale parallelogrammo D Q, 36 Primi. *erit DR maius quàm SQ. Sed OD est aequale D R. ergo et* 43 Primi. *OD ipso SQ est maius. commune apponatur AS. totum igitur AD, quàm totum A P maius erit. Quare omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris similibus, & reliqua, quae sequuntur. quod oportebat demonstrare.*

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXVIII.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo ęquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datę. oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, et eo quod à dimidia, et eo, cui oportet simile deficere.

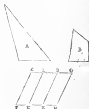
Sit data quidem recta linea A B: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, sit C, non maius existens eo, quod ad dimidiam applicatum est, similibus existētibus defectibus: cui autem oportet simile deficere sit D. oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C ęquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit ipsi D. Secetur AB bifariam in E, & ab ipsa EB describatur simile, & similiter positum ipsi D; quod sit EBFG, & compleatur AG parallelogrammum. Itaque AG vel ęquale est ipsi 18 huius.

est ipsi C, vel eo maius, ob determinationem. & si quidem AG sit ęquale C, factum iam erit, quod proponebatur etenim ad rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma GB, ipsi D simili. Si autem non est ęquale, erit H E maius quam C; atque est H E æquale G B. ergo & G B quàm C est maius quo autem G B superat C, ei ex-
* cessui æquale, ipsi vero D simile & similiter positum
25.huius. idem constituatur KLMN. Sed D est simile GB. quare & KM ipsi G B simile erit. Sit igitur recta linea quidem KL homologa ipsi GE, LM vero ipsi GF. & quoniã æquale est GB ipsis C KM, erit GB ipso KM maius. maior igitur est recta linea G E ipsa KL; et GF ipsa LM. ponatur GX æqualis KL, & G O æqualis LM, & compleatur X G O P parallelogrammum. ęquale igitur est & simile GP ipsi KM. Sed KM simi-
21 huius. le est GB. ergo & GP ipsi GB est simile. circa eandẽ
26.huius. igitur est diametrũ GP ipsi GB. Sit ipsorum diameter GPB, & figura describatur. Itaque qm̃ GB est æquale ipsis C KM, quorũ GP est
43 primi. æquale KM, erit reliquus ϒϕϒ gnomon æqualis reliquo C. Et qm̃ OR est æquale XS,
36.primi. commune apponatur PB. totum igitur OB toti XB est ęquale. Sed XB est æquale TE, quoniam & latus AE lateri EB. quare & TE ipsi OB ęquale. cõmune apponatur XS. ergo totum TS est æquale toti gnomoni ϒϕϒ. At ϒϕϒ gnomon ipsi C ostensus est ęqualis. & TS igitur ipsi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum TS applicatum est, deficiens figura parallelogrãma PB ipsi D simili, quoniã & PB simile est ipsi GP. quod facere oportebat.



F. C. COMMENTARIVS.

* Quo autem GB superat C, ei excessui ęquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem constituatur] *Vt autem excessus, quo alterum rectilineum alterum superat, facile inueniatur libuit, sequens problema apponere.*



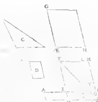
Duorum rectilineorũ inæqualiũ excessum, quo maius superat minus, inuenire.

Sint duo rectilinea inęqualia A B, quorum maius sit A. oportet inuenire excessum, quo re-
54 primi. *ctilineum A ipsum B superat. Dato enim rectilineo A in quouis angulo aequale parallelogrãmum constituatur CDEF: & ad rectam lineam DE in angulo aequali ipsi DCF, applicetur parallelogrammum DGHE aequale rectilineo B.*
14 primi. *erit recta linea DG in directum ipsi CD, & EH in directum FE. est igitur vt parallelogrammum FD ad parallelogrammum DH, hoc est vt rectilineum A ad rectilineum B, ita recta linea FE ad EH. atq; est rectilineum A rectilineo B maius. maior igitur est recta linea FE ipsa EH. Itaq; à recta linea FE abscindatur EK ipsi EH aequalis, & à puncto K alterutri ipsarum FC ED parallela ducatur KL. erit parallelogrammum KD parallelogrammo DH aequale, & ob id parallelogrammum FL est excessus, quo parallelogrammum FD superat parallelogrammum DH, hoc est quo rectilineum A ipsum B rectilineum superat. Duorum igitur rectilineorum inęqualium A B excessus inuentus est. quod fecisse oportuit.*

PRO-

PROBLEMA IX. PROPOSITIO. XXIX.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo çquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datç.



Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum cui oportet æquale ad ipsam AB applicare, sit C, cui autem oportet simile excedere D. Itaq; oportet ad AB rectam lineam dato rectilineo C çquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma simili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipsi D simile, & similiter positum parallelogrammum describatur BF, & vtrisque quidem BF. [18. huius] C çquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem constituatur GH Simile igitur est GH ipsi FB. sitq; KH [25. huius] quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipsi FE. Et quoniam parallelogrammum GH maius est ipso FB, erit recta linea KH maior quàm FL, & KG maior quàm FE. producantur FL FE & ipsi quidē KH æqualis sit FLM; ipsi vero KG æqualis FEN & compleatur MN parallelogrammum. ergo MN æquale est & simile ipsi GH. Sed GH est simile EL. & MN igitur ipsi EL simile erit, ac propterea circa eandem diametrum est EL ipsi MN. Ducatur ipsorum diameter FX, & figura describatur. [21 huius] [26 huius] Itaque quoniam GH ipsis EL C est çquale, sed GH est æquale MN, erit & MN çquale ipsis EL C. commune auferatur EL. reliquus igitur $\tau\Upsilon\phi$ gnomon ipsi C est æqualis. Et quoniam AE est æqualis EB, çquale erit & AN parallelogrammum parallelogrammo NB, hoc est ipsi LO. commune apponatur EX. totum igitur AX æquale est gnomoni $\phi\Upsilon\tau$. Sed $\phi\Upsilon\tau$ gnomon est æqualis C. ergo & AX ipsi C erit æquale. Ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C çquale parallelogrammum applicatum est AX, excedens figura parallelogrāma PO ipsi D simili, quoniā & ipsi EL simile est OP. quod fecisse oportebat. [24 huius.]

PROBLEMA X. PROPOSITIO XXX.

Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione secare.



Sit data recta linea terminata AB. oportet ipsam AB extrema, ac media ratione secare. Describatur enim ex AB quadratum BC, & ad AC ipsi BC æquale parallelogrammum applicetur CD, excedens figura AD ipsi BC simili. [46 primi.] [1 ex antecedente.] quadratum autem est BC. ergo & AD, quadratum erit. Et quoniā BC est çquale CD; commune auferatur CE. reliquum igitur BF reliquo AD est æquale. est autem & ipsi çquiāgulū. ergo ipsorum BF AD latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. [14 huius.] vt igitur FE ad ED, ita est AE ad EB. est autem FE æqualis [34 primi.] AC, hoc est ipsi AB. & ED ipsi AE. quare vt BA ad AE, ita AE ad EB. Sed AB maior

14. quinti. est quàm AE. ergo AE quàm EB est maior. Recta igitur linea AB extrema, ac media ratione secta est in E, & maior ipsius portio est AE. quod facere oportebat.

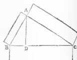
ALITER. Sit data recta linea AB. oportet ipsã AB extrema ac media rõne secare. Secetur enim AB in C, ita vt rectangulum, quod continetur AB BC æquale sit

11. secundi. quadrato ex AC. Quoniam igitur rectangulum ABC æquale est quadrato ex AC,

17. huius. erit vt BA ad AC, ita AC ad CB. ergo AB recta linea extrema ac media ratione secta est. quod facere oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXXI.

In rectangulis triangulis figura, quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis, quę à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis.



Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figuram, quę fit ex BC æqualem esse eis, quæ ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. Ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangulo rectã-

8. huius. gulo ABC ab angulo recto, qui est ad A ad BC basim perpendicularis ducta est AD; erunt triãgula ABD ADC, quæ sunt ad perpendiculare similia toti ABC, & inter se se. Et quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit vt CB ad BA, ita AB ad BD. Quòd cū

Coro. 20 huius. tres rectæ lineę proportionales sint, vt prima ad tertiam, ita erit figura, quæ fit ex prima ad eam, quę ex secunda, similem, & similiter descriptam. Vt igitur CB ad BD, ita figura, quę fit ex CB ad eam, quæ ex BA, similem, & similiter descriptam. Eadem

A ratione et vt BC ad CD, ita figura, quæ fit ex BC ad eam, quę ex CA. quare et vt BC ad ipsas BD DC, ita figura, quæ ex BC ad eas, quæ ex BA AC, similes, & similiter descriptas. æqualis autem BC ipsis BD DC. ergo figura, quę fit ex BC æqualis est eis, quę ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. In rectangulis igitur triangulis, figura, quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis. quod ostendere oportebat.

ALITER. Quoniam similes figuræ sunt in dupla proportione laterum homo-

20. huius. logorum; figura, quæ fit ex BC ad eam, quæ ex BA duplam proportionem habebit eius, quam habet BC ad BA. habet autem & quadratum ex BC ad quadratum ex

11. quinti. BA duplam proportionem eius, quam BC ad BA. ergo & vt figura, quæ ex BC ad eam, quę ex BA, ita quadratum ex BC ad quadratum ex BA. Eadem ratione & vt figura, quæ ex BC ad eam, quæ ex CA, ita quadratum, quod ex BC ad illud, quod ex CA quadratum. & vt igitur figura quæ ex BC ad eas, quæ ex BA AC, ita quod

47. primi. ex BC quadratum ad quadrata, quę ex BA AC. quadratum autem, quod ex BC æquale est eis, quæ ex BA AC quadratis. ergo & figura, quæ fit ex BC est æqualis eis, quę ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. quod ostẽdere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

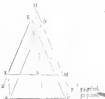
A Quare & vt BC ad ipsas BD DC, ita figura, quę ex BC ad eas, quæ ex BA AC similes, & similiter descriptas.] *Quoniā enim est vt CB ad BD, ita figura, quæ fit à CB ad eam, quæ à BA similem, & similiter descriptam, erit & conuertendo vt DB ad BC, ita figura, quæ fit à BA ad eam, quæ à BC similem & similiter descriptam. preterea cum sit vt BC ad CD, ita figura, quæ fit à BC ad eam, quæ à CA: & conuertendo vt DC ad CB, ita erit figura, quæ fit ab AC ad eam, quæ à CB. Sit igitur figura, quæ fit à BA magnitudo prima; figura, quæ à BC magnitudo secunda; recta linea DB magnitudo tertia, & recta BC quarta; figura vero, quæ fit ab AC*

AC magnitudo quinta & recta linea DC sexta. Itaque prima magnitudo ad secundam, est vt tertia ad quartam; quinta vero ad secundam, vt sexta ad quartam. ergo ex vigesimaquarta quinti libri composita prima & quinta ad secundam erit, vt composita tertia & sexta ad quartam, hoc est figurae quae fiunt à BA AC ad eam, quae à BC erunt vt rectae lineae BD DC ad rectam BC & rursus conuertendo figura, quae fit à BC ad eas, quae à BA AC erit, vt recta linea BC ad rectas BD DC.

Et vt igitur figura, quę à BC ad eas, quę à BA AC, ita quod ex BC quadratum ad quadrata, quæ ex BA AC. B

Hoc similiter concludemus, vt proxime dictum est, ex vigesima quarta quinti. erit enim figura, quae fit à BA magnitudo prima; figura, quae à BC secunda; quadratum ex BA tertia; & quadratum ex BC quarta; figura vero, quae fit ab AC quinta; & quadratum ex AC sexta. Hoc theoremate multo vniuersalius est illud, quod à Pappo demonstratur in quarto libro mathematicarum collectionum.

Si sit triangulum ABC, & ab ipsis AB BC describantur quæuis parallelogramma ABED BCFG; & lineæ DE FG producantur ad H, iungaturque HB: fient parallelogramma ABED BCFG æqualia parallelogrammo contento AC HB, in angulo, qui vtrisque BAC DHB sit æqualis.



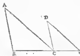
Producatur enim HB ad K, & per A C ipsi KH parallelæ ducantur AL CM, & LM iungatur. Itaque quoniam parallelogrammum est ALHB; erunt AL BH æquales, & parallelæ. Similiter æquales & parallelę MC HB. ergo & LA MC æquales & parallelæ sint necesse est; & propterea LM AC. parallelogrammum igitur est ALMC in angulo LAC, hoc est in angulo æquali vtrisque BAC DHB. est enim angulus DHB ipsi LAB æqualis. Et quoniam DABE parallelogrammum ęquale est parallelogrammo LABH, etenim in eadem basi AB, & in eisdem parallelis AB DH consistit parallelogrammum autem LABH parallelogrammo LAKN est ęquale, cum sit in eadem basi LA, & in eisdem parallelis LA HK erit parallelogrammũ ADEB ęquale parallelogrammo LAKN. et ob eãdem caussam parallelogrammum BGFC parallelogrammo KNMC. parallelogramma igitur DABE BGFC parallelogrammo LACM æqualia sunt, hoc est ei, quod AC HB continetur, in angulo LAC, qui est æqualis vtrisque BAC BHL. Atque hoc multo vniuersalius est, quàm quod in triangulo rectangulo de quadratis in elementis demonstratur.

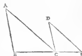
34. primi.
30 primi.
35 primi.
34 primi.
35 primi.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula componantur ad vnum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera ipsorum etiam sint parallela, reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.

Sint duo triangula ABC DCE, quę duo latera BA AC duobus lateribus CD DE proportionalia habeant, vt sit sicut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem sit AB ipsi DC, et AC ipsi DE. Dico BC ipsi CE in directũ esse. Quoniam enim AB parallela est DC, et in ipsas incidit recta linea AC; erunt anguli 29 primi.





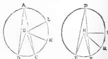
alterni BAC ACD æquales inter se sé Eadē ratione et angulus CDE æqualis est angulo ACD. Quare et BAC ipsi CDE est ęqualis. Et quoniam duo triāgula sunt ABC DCE, vnū angulū, qui ad A, vni angulo qui ad D æqualem habentia, circum ęquales autem angulos latera proportionalia, quod fit vt BA ad AC, ita CD ad DE; erit triangulum ABC triangulo DCE æquiangulum. ergo ABC angulus est æqualis angulo DCE. ostensus autem est et angulus ACD ęqualis angulo BAC. totus igitur ACE duobus ABC BAC est æqualis. communis apponatur ACB. ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB CBA æquales sunt. Sed BAC ACB CBA anguli duobus rectis sunt ęquales. et anguli igitur ACE AC B duobus rectis æquales erunt. Itaque ad quandam rectam lineam AC, et ad punctum in ipsa C duæ rectæ lineæ BC CE non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt ACE ACB duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipsi CE in directum erit. Si igitur duo triangula componantur ad vnum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita vt homologa latera ipsorum etiam sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt: quod demonstrare oportebat.

6 huius.

4 primi.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXXIII.

In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant. Adhuc autem & sectores, quippe qui ad centra sunt constituti.



Sint ęquales circuli ABC DEF; et ad centra quidem ipsorum GH sint anguli BGC EHF, ad circumferentias vero anguli BAC EDF. Dico vt circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita esse et BGC angulum ad angulum EHF, et angulum BAC ad angulum EDF: et adhuc sectorē BGC ad EHF sectorem. Ponantur enim circumferentię quidem BC ęquales quotcumque deinceps CK KL; circumferentię vero EF, rursus ęquales quotcumque FM MN. et iungantur GK GL HM HN. quoniam igitur circumferentiæ BC CK KL inter se sunt ęquales, et anguli BGC CGK KGL inter se æquales erūt. quotuplex igitur est circumferentia BL circumfrentiæ BC, totuplex est et BGL angulus anguli BGC. Eadem ratione et quotuplex est circūferentia NE circūferentię EF, totuplex et EHN angulus anguli EHF. Si igitur æqualis est BL circumferentia circumferentiæ EN, et angulus BGL angulo EHN erit æqualis; et si circumferentia BL maior est circumferentia EN, maior erit et BGL angulus angulo EHN: et si minor, minor. Quattuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circūferentijs BC EF: et duobus angulis BGC EHF, sumpta sunt circumferentiæ quidem BC, et BGC anguli æque multiplicia, videlicet circumferentia BL, et BGL angulus; circumferentiæ vero EF, et EHF anguli æque multiplicia, nempe circumferētia EN, et angulus EHN. atque ostensum est si circumferētia BL superat circumferentiam EN, et BGL angulū superare angulum EHN, et si æqualis, ęqualem, et si minor, minorem esse. Vt igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus

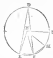
27. tertij.

Diffi. 5 quinti.

angulus BGC ad angulum EHF. Sed vt BGC angulus ad angulum EHF, ita angulus BAC ad EDF angulum. vterque enim vtriusque est duplus. et vt igitur BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita et angulus BGC ad angulum EHF, et angulus BAC ad EDF angulum. Quare in circulis equalibus anguli eandẽm habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus insistũt, siue ad centra, siue ad circumferentiam insistant. Dico insuper, et vt BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita esse sectorem GBC ad HFE sectorem. Iũgantur enim BC CK, et sumptis in circumferentijs BC CK punctis X O, iungantur et BX XC CO OK. Itaque quoniam duæ BG GC duabus CG GK æquales sunt, et angulos equales continẽt; erit et basis BC basi CK æqualis. æquale igitur est et GBC triãgulum triangulo GCK. Et quoniam circumferentia BC circumferentiæ CK est æqualis, et reliqua circumferentia, quæ complet totum circulum ABC æqualis est reliquæ, quæ eundem circulum complet. quare et angulus BXC angulo COK est equalis. similis igitur est BXC portio portioni COK: et sunt in equalibus rectis lineis BC CK. quę autem in æqualibus rectis lineis similes circulorũ portiones, et inter se equales sunt. ergo portio BXC est æqualis portioni COK. est autem et BGC triangulum triangulo CGK æquale. et totus igitur sector BGC toti sectori CGK æqualis erit. Eadem ratione et GKL sector vtrique ipsorum GKC GCB est æqualis. Tres igitur sectores BGC CGK KGL æquales sunt inter se. Similiter et sectores HEF HFM HMN inter se sunt æquales. quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentiæ BC, totuplex est et GBL sector sectoris GBC. Eadem ratione et quotuplex est circumferentia NE circũferentiæ EF, totuplex est et HEN sector sectoris HEF. quare si circumferentia BL circumferentię EN est equalis, et sector BGL equalis est sectori EHN. et si circumferentiæ BL superat circumferentiã EN, superat et BGL sector sectorem EHN, et si minor minor. Quattuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC EF circumferentijs, duobus uero sectoribus GBC EHF, sumpta sunt æque multiplicia, circumferentiæ quidem BC et GBC sectoris circumferentia BL et GBL sector. circumferentię vero EF, et sectoris HEF æquemultiplicia circumferentia EN, et HEN sector. atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam EN, et sectorem BGL superare sectorem EHN. et si æqualis equalem esse; et si minor, minorem. est igitur vt BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita sector GBC ad HEF sectorem. quod ostendere oportebat.

15 quinti
20 tertij
4 primi.
27 tertij.
11 dif tertij.
24 tertij.
5 diffi. quinti.





C O R O L L A R I V M

Perspicuum etiam est, et vt sector ad sectorem, ita esse angulum ad angulum. 11. quinti.

SEXTI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER SEPTIMVS
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS, ET COMMENTARIIS
Federici Commandini Vrbinatis.



DIFFINITIONES.

I.



NITAS est, qua vnumquodque eorũ, quæ sunt vnum dicitur.

II.

Numerus autem ex vnitatibus constans multitudo.

III.

Pars est numerus numeri, minor maioris, quando maiorem metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Pars ea nomen inuenit à numero, per quem minor maiorem metitur. Si enim minor bis metitur maiorem, dicetur pars dimidia, si ter dicetur tertia, si quater quarta. & ita in alijs.

IIII.

Partes autem, quando non metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Partes nomen trahunt ab ijs numeris, per quos communis duorum numerorum mensura vtramque ipsorum metitur. nam si communis eorum mensura minorem numerum bis metiatur, & maiorem ter, dicentur hae partes duae tertiae; si vero minorem ter metiatur, & maiorem quater, dicentur tres quartae. Quòd si maiorem quinquies metiatur, dicentur tres quintae. & ita in reliquis. Recentiores numerum, per quem communis mensura minorem metitur, numerantem, vel numeratorem appellant, vtpote qui partium multitudinem definiat: numerum vero, per quem communis mensura maiorem metitur, denominantem, seu denominatorem dicunt, vt qui his partibus nomen imponat.

V.

Multiplex est maior minoris, quando minor eum metitur.

F. C.

Multiplex autem nomen habet ab eo numero, per quem minor eum metitur. Si enim minor bis metiatur maiorem, dicetur maior minoris duplus; si ter, triplus; si quater, quadruplas, & eodem modo in alijs.

V I.

Par numerus est, qui bifariam diuiditur.

V I I.

Impar vero, qui bifariam non diuiditur: vel qui à pari numero vnitate differt.

V I I I.

Pariter par numerus est, quem par numerus per parem numerum metitur.

S C H O L I V M.

Si huic diffinitioni addamus tantum, vt pariter par numerus dicatur is, quem par numerus tantum per parem numerum metitur; faciemus pythagoręorum pariter parem, qui ad vnitatem vsque bifariam diuiditur; vt octo par numerus metitur per parem tantum. duodecim vero Euclidi est pariter par, quem & par numerus metitur per parem numerum; bis enim sex sunt duodecim; & impar numerus per parem metitur. nam si quattuor ter sumantur duodecim fient. Pariter vero imparem dicit, quem par numerus metitur per imparem numerum; vt decem, quem binarius per quinarium metitur. At περισσάρτιος, hoc est impariter par est duodecim: etenim ternarius per quaternarium metitur. & simpliciter quod perfectum nomen est in compositione, per illud dicimus numerũ metiri alium numerum. Itaque sciendum est περισσάρτιον, hoc est impariter parem à pythagoręis sic dictum, plures diuisiones suscipere, quæ in partes æquales fiunt, nõ tamẽ ad vnitatẽ vsq; diuisionẽ procedere. Nouit autem hunc & in ipse Euclides, cuius mentionem facit in nono libro. pulchre ipsum neque pariter parem, neque pariter imparem dicens, per negationem duorum extremorum significauit, quemadmodum in contrarijs mediatis, media, quibus nomina imposita non sunt, per negationem extremorum explicamus. Huius autem mentionem facit Euclides in 34 noni libri.

I X.

Pariter vero impar est, quem par numerus per numerum imparem metitur.

F. C. COMMENTARIVS

Ex diffinitione octaua, & nona, & ex iis, quae in nono libro traduntur, apparet Euclidem pariter parem numerū appellare eū, quē par numerus per numerum parem metitur, siue sit ex numeris à binario duplatis, siue non: & pariter imparem appellare eum, quem par numerus per numerum imparem metitur, siue dimidium habeat imparem, siue parem. numeros enim à binario duplatos ipse pariter pares tantum appellat, & eos, qui dimidium imparem habent vocat pariter impares tantum. eos vero, qui neque à binario duplati sunt, neque dimidium habent imparem, & pariter pares, & pariter impares dicit. At Nicomacho, Boetioq́, paris numeri species tres sunt, Vnà quae dicitur pariter par, alia quae pariter impar, & tertia, quae impariter par. Pariter par numerus est, qui pōt in duo paria diuidi, eiusq́, pars in alia duo paria & rursus partis pars in alia duo paria; & hoc semper, quoad diuisio partium ad vnitatem perueniat, vt 64. Pariter impar numerus est, qui quoniam par est, in partes quidem aequales diuiditur, partes vero eius mox indiuisibiles sunt, vt 6. 10. 14. 18. 22. Impariter par numerus est, qui inter duos iam dictos quodammodo medius est, diuiditur enim in partes aequales, eiusq́; pars rursus diuiditur in alias partes aequales, & interdum partes partium in alias aequales diuidi possunt; sed diuisio ad vnitatem vsque non perducitur. Qui igitur his est pariter par, Euclides pariter parem tantum vocat; qui vero his pariter impar est, Euclides pariter imparem tantum. & qui his impariter par Euclides & pariter parem, & impariter parem appellat. Quare illud, quod in extrema parte antecedentis scholij additur, verum non videtur, nisi fortasse intelligamus eum, qui pariter par est, & pariter impar eo modo, quo sumit Euclides, neque pariter parem esse tantum, neque pariter imparem tantum.

X.

Impariter vero impar numerus est, quē impar numerus per numerum imparem metitur.

X I.

Primus numerus est, quem vnitas sola metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Primum numerum nullus metitur numerus, preter quàm quòd ipse se ipsum metitur.

X II.

Primi inter se numeri sunt, quos sola vnitas communis mensura metitur.

X I I I.

Compositus numerus est, quem numerus aliquis metitur.

X I I I I.

Compositi inter se numeri sunt, quos numerus aliquis communis mensura metitur.

X V.

Numerus numerū multiplicare dicitur, quando quot vnitates sunt in ipso, toties componitur multiplicatus, & aliquis gignitur.

Quando

XVI.

Quando duo numeri se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus est planus appellatur: latera vero ipsius sunt numeri se se multiplicantes.

XVII.

Quando autem tres numeri se se multiplicantes aliquem fecerint, factus solidus appellatur: latera vero ipsius se se multiplicantes numeri.

XVIII.

Quadratus numerus est, qui æqualiter est æqualis, vel qui duobus æqualibus numeris continetur.

XIX.

Cubus vero, qui æqualiter est æqualis æqualiter, vel qui tribus æqualibus numeris continetur.

XX.

Numeri proportionales sunt, quando primus secundi, & tertius quarti eque multiplex fuerit, vel eadem pars, vel eædem partes.

F. C. COMMENTARIVS.

Vel igitur primus est maior secundo, vel minor. & si quidem maior, vel eum minor metitur, vel non metitur. & si metitur erit primus secundi aeque multiplex, atque tertius quarti: si vero non metitur, quae partes est secundus primi, eędem partes erit & quartus tertij. vel etiam hoc modo si primus est maior secundo, quae pars, vel partes est secundus primi, eadem pars, vel partes erit & quartus tertij. sed si primus sit minor, quae pars, vel quae partes est primus secundi, eadem pars, vel eędem partes erit & tertius quarti. Ponit autem nunc minorem numerum maioris partem esse, vel partes, quod postea in quarto theoremate huius demonstratione confirmat.

XXI.

Similes plani, & solidi numeri sunt, qui latera habent proportionalia.

XXII.

Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est ęqualis.

F. C. COMMENTARIVS.

Numerus autem qui suis ipsius partibus minor est abundans appellatur, qui vero maior, diminutos. His diffinitionibus nos aliam addidimus sed & petitiones quasdam, & communes notiones apponere libuit, quibus Euclides in his libris vti usus est.

Z Cum

XXIII.

Cum fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus ad tertium duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad secundum: & primus ad quartum triplam, & eodem modo in alijs.

PETITIONES.

1 *Cuilibet numero quotlibet sumi posse æquales, vel multiplices.*
2 *Quolibet numero sumi posse maiorem.*
3 *Numerus infinite augetur, sed non infinite diminuitur.*

COMMVNES NOTIONES.

1 *Quicumque eiusdem, vel equalium æque multiplices fuerint, & ipsi inter se sunt æquales.*
2 *Quorum idem numerus æque multiplex fuerit, vel quorũ eque multiplices fuerint æquales, & ipsi inter se æquales sunt.*
3 *Quicumque eiusdem numeri, vel æqualium eadem pars, vel eædem partes fuerint, & ipsi inter se sunt æquales.*
4 *Quorum idem, vel æquales numeri eadem pars, vel eędem partes fuerint, inter se sunt æquales.*
5 *Omnis numeri pars est vnitas ab eo denominata, binarij enim numeri vnitas pars est ab ipso binario denominata, quæ dimidia dicitur, ternarij vero vnitas est pars, quæ à ternario denominata tertia dicitur, quaternarij quarta, & ita in alijs.*
6 *Vnitas omnem numerum metitur per vnitates, quę in ipso sunt.*
7 *Omnis numerus se ipsum metitur.*
8 *Si numerus metiatur numerum, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quę sunt in metiente, vnitates.*
9 *Quicumque numerus alium metitur, multiplicans eum, vel multiplicatus ab eo, per quem metitur, illum ipsum producit.*
10 *Si numerus numerum alium multiplicans aliquem produxerit, multiplicans quidem productum metitur per vnitates, quæ sunt in multiplicato; multiplicatus vero metitur eundem per vnitates, quæ sunt in multiplicante.*
11 *Quicumque numerus metitur duos, vel plures, metietur quoque eũ, qui ex illis componitur.*
12 *Quicumque numerus metitur aliquem, metietur quoque eum, quem ille ipse metitur.*
13 *Quicũque numerus metitur totũ & ablatum, etiã reliquũ metietur.*

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si duobus numeris inæqualibus expositis, detracto semper minore de maiore, reliquus minime metiatur præcedentem, quo ad assũpta fuerit vnitas; numeri à principio positi primi inter se erũt.



Duobus enim inæqualibus numeris expositis AB CD, detracto semper minore de maiore reliquus minime metiatur præcedentẽ, quoad assumpta fuerit vnitas. Dico numeros AB CD inter se primos esse, hoc est ipsos AB CD vnitatẽ solã metiri. Si enim AB CD nõ sint primi inter se, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitq; E: & CD quidem ipsum AB metiens relinquat se ipso minorẽ FA, AF vero metiens DC relinquat se ipso minorem GC; & GC metiẽs FH vnitatẽ HA relinquat. quoniam igitur numerus E ipsum CD metitur, CD vero metitur BF; & E ipsum BF metitur; metitur aũt & totũ BA. ergo & reliquũ AF metietur. Sed AF metitur DG. quare & E ipsum DG metietur. metitur autem & totum DC. ergo & reliquum metietur CG. at CG metitur FH. & E igitur ipsum FH metietur. sed & metitur totum FA; & reliquam igitur vnitatem AH metietur, numerus existens. quod fieri non potest. non igitur ipsos AB CD metietur aliquis numerus. ergo AB CD primi inter se sunt. quod oportebat demonstrare. Per 12. cõem notionem. 13. com not.

F. C. COMMENTARIVS.

Huius conuersam hoc modo demonstrabimus.

Expositis duobus numeris inter se primis; si de maiori semper minor detrahatur, non cessabit huiusmodi detractio antequam ad vnitatem deuentum fuerit.



Sint enim numeri inter se primi AB CD; & si fieri potest iisdem manentibus, & detracto sẽper minore de maiore deuentũ sit ad numerũ HA, qui præcedẽtẽ GC metiatur. Si igitur HA metitur GC, & ipsũ FH metietur. metitur aũt & se ipsũ, ergo & FA metietur; ac propterea ipsũ DG. sed & metiebatur GC. quare & totũ DC metietur. atq; ob id ipsum BF metitur. metitur aũt & FA, vt ostensum est. ergo & totũ BA metietur. Itaque quomã HA numerus duos numeros AB CD metitur, erunt AB, CD inter se compositi. Sed & inter se primi ponuntur. quod fieri non potest. nõ igitur expositis duobus numeris inter se primis, si de maiori semper minor detrahatur, cessabit detractio, antequam ad vnitatem deuentum fuerit. quod oportebat demonstrare. 11. com. not. 11. com. not. Diffi 14.

Sed & illud constat.

Expositis duobus numeris inter se compositis, si de maiori semper detrahatur minor, detractio ad vnitatem vsque non perueniet.

Si enim ad vnitatem perueniat, erunt hi inter se primi, sed & compositi. quod est absurdum. 1. huius.

Ex iam demonstratis problema quoque illud perspicue apparere potest.

Duobus numeris expositis comperire an inter se primi sint, an compositi.

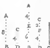
Facta namque detractione, vt dictum est, si deuenet ad vnitatem vsque, dicemus eos inter se primos esse, sin minus, compositos.

PROBLEMA I. PROPOSITIO II.

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram inuenire.

Sint dati duo numeri non primi inter se AB CD; quorũ minor sit CD. oportet ipsorum AB CD maximam communem mensuram inuenire. Si igitur CD metitur AB cum etiam se ipsum metiatur, erit CD ipsorum AB CD communis mensura. & perspicuum est eam maximam esse: nullus enim maior CD ipsum CD metietur:

Z 2 si vero



si vero CD non metitur AB, ipsorum AB CD detracto semper minore de maiore, relinquetur aliquis numerus, qui metietur præcedentem. vnitas quidem non relin-
Ex antecedente. quetur; essent enim AB CD primi inter se. quod nō ponitur. & CD quidem ipsum AB metiens relinquat se ipso minorem AE; AE vero metiens CD relinquat se ipso minorem CF. & CF ipsum AE metiatur. Itaque quoniā
12. com. not. CF ipsum AE metitur, AE vero ipsum DF, & CF ipsum
11. com. not. DF metietur. sed & metitur se ipsum. & totū igitur metietur CD. At CD ipsum BE metitur. ergo & CF metitur BE. metitur autem & EA. & totum igitur AB metietur. sed & metitur CD. ergo CF ipsos AB CD metitur; ac propterea CF ipsorum AB CD est cōmunis mēsura. dico etiam maximam esse. Si enim non est maxima, ipsos AB CD metietur aliquis numerus maior ipso CF. metiatur, sitq; G. & quoniam G ipsum CD metitur, CD vero ipsum BE & G ipsum BE metitur. metitur autem & totum BA. & reliquum igitur AE metietur. Sed AE metitur DF. ergo & G ipsum DF metitur. metitur autem & totum DC. quare & reliquum CF metietur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur ipsos AB CD numeros numerus aliquis metietur, maior ipso CF. ergo CF ipsorum AB CD maxima erit communis mensura. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenta est. quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

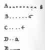
Ex hoc manifestum est, si numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem mensuram metiri.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc corollarium apparet ex postrema parte demonstrationis. sit enim duorum numerorum AB CD communis mensura CF: & sit numerus aliquis G, qui ipsos AB CD metiatur. Dico etiam maximam eorum communem mensuram CF metiri. Quoniam enim G ipsum CD metitur: CD vero metitur BE: et G ipsum BE metitur. sed & metitur totum BA. ergo & reliquum AE metie-
12. com. not. 13. com. not. *tur: metitur autem AE ipsum DF. ergo G ipsum DF metitur. Sed & metitur totum DC. Quare & reliquum CF, maximam scilicet eorum communem mensuram metietur. quod demonstrare oportebat.*

PROBLEMA II. PROPOSITIO III.

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam ipsorū communem mensuram inuenire.



Sint dati tres numeri non primi inter se ABC. oportet ipsorum ABC maximam communem mensuram inuenire. Sumatur enim duorum AB maxima cōmunis mēsura D. itaque D vel ipsum C metitur, vel non metitur. metiatur primū. metitur autem et ipsos A B. ergo D numeros A B C metitur: et ob id ipsorum est communis mensura. dico et maximam esse. si enim D non est ipsorum A B C maxima communis mensura, metietur eos aliquis numerus maior ipso D. metiatur, et sit E. quoniam igitur E metitur numeros A B C, et ipsos AB metietur, et ipsorū AB maximam communē mēsuram, quæ est D. ergo E ipsum D metitur, maior minorem. quod fieri non pōt. non igitur ABC numeros numerus aliquis maior ipso D metietur. ergo D ipsorum ABC maxima est cōis mensura.

Non

Non metiatur autē D ipsum C. Dico primum numeros D C non esse primos inter se. Quoniam enim ABC non sunt inter se primi, metietur eos aliquis numerus. et qui metitur ipsos ABC, & ipsos AB metietur, et ipsorum AB maximam communem mensurā, videlicet D. metitur autem et ipsum C. ergo ipsos DC numerus aliquis metietur; ideoq; DC non sunt inter se primi. Sumatur ipsorum maxima communis mensura E. et quoniam E ipsum D metitur, et D metitur ipsos AB, et E ipsos AB metitur. metitur autē et C. ergo et ipsos ABC metietur; eritq; E ipsorum ABC communis mensura. Dico et maximam esse. si enim E non est ipsorum ABC maxima communis mensura, metietur ABC numeros numerus aliquis maior ipso E. metiatur, sitq; F. et quoniam F metitur numeros ABC, et ipsos AB, et ipsorum AB maximam communem mensuram metietur, videlicet ipsum D. ergo F ipsum D metitur. metitur autem et ipsum C. quare F et ipsos DC, et ipsorum DC maximam communem mensuram metietur, videlicet ipsum E. ergo F ipsum E metitur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur ABC numeros numerus aliquis maior ipso E metietur. ergo ipsorum ABC maxima est communis mēsura. Tribus igitur numeris datis non primis inter se, eorum maxima communis mensura inuēta est. quod facere oportebat.

A 18
B 12
C 4
D 6
E 2
F

Ex corol anteced.

COROLLARIVM.

Ex his manifestum est, si numerus numeros tres metiatur, et ipsorum maximam communem mensuram metiri. A

Eodem modo et pluribus numeris datis maximā communem mensuram inueniemus. B

F. C. COMMENTARIVS.

Ex his manifestum est &c.] *Sequitur hoc, quemadmodum in antecedente demonstrauimus.* A
Eodem modo &c.] *Sed & illud constat, si numerus plures numeros metiatur, & communem earum mensuram metiri.* B

THEOREMA II. PROPOSITIO IIII.

Omnis numerus omnis numeri minor maioris, vel pars est, vel partes.

Sint duo numeri A BC, quorum BC sit minor. Dico BC ipsius A vel partem esse, vel partes. Numeri enim A BC vel primi sunt inter se, vel non. sint prius inter se primi, & diuiso BC in vnitates, quæ in ipso sunt, erit vnaquæque vnitas earum, quæ in BC, pars aliqua ipsius A. ergo BC ipsius A partes est. sed non sint A BC inter se primi: Itaque BC vel ipsum A metitur, vel non. et siquidem metitur, erit BC pars ipsius A: sin minus, sumatur ipsorum A BC maxima communis mensura D; et diuidatur BC in numeros ipsi D æquales BE EF FC. Quoniā igitur D numerum A metitur, erit D pars ipsius A. æqualis autem est D vnicuique ipsorum BE EF FC. ergo et vnusquisque ipsorum BE EF FC pars est ipsius A: ac propterea BC ipsius A partes est.

A 8
B 5C
A 8
B 4C
A 8
B 2E 2F 2C
D 2

Omnis

Omnis igitur numerus omnis numeri, minor maioris, vel pars est, vel partes. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA III. PROPOSITIO. V.

Si numerus numeri pars fuerit, et alter alterius eadem pars; et vterque vtriusque eadem pars erit, quæ vnus vnius.

Numerus A numeri BC pars sit: et alter D alterius EF eadem pars, quæ est A ipsius BC. Dico et vtrumque AD vtriusque BC EF eãdem partem esse, quæ est A ipsius BC. Quoniam enim quæ pars est A ipsius BC, eadem est et D ipsius EF, quot numeri sunt in BC æquales ipsi A, tot erũt et in EF numeri æquales ipsi D. Diuidatur BC quidem in numeros æquales ipsi A, videlicet in BG, GC; EF vero diuidatur in numeros ipsi D æquales, hoc est EH HF. erit vtique æqualis multitudo numerorũ BG GC multitudini ipsorum EH HF. & quoniam æqualis est BG ipsi A, & EH ipsi D, erunt BG EH ipsis A D æquales. Et eadem ratione cum GC sit æqualis ipsi A, & HF ipsi D; & GC HF ipsis A D æquales erunt. quot igitur numeri sunt in BC, æquales ipsi A, tot sunt & in BC EF æquales ipsis A D. ergo quotuplex est BC ipsius A, totuplex erit et vterque BC EF vtriusque A D. quę igitur pars est A ipsius BC, eadem pars erit et vterque A D vtriusque BC EF. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc autem licet illud etiam demonstrare.

Si numerus numeri multiplex fuerit, et alter alterius æque multiplex; et vterque vtriusque æque multiplex erit, atque vnus vnius.

Sit enim A numerus numeri B multiplex, et alter C alterius D aeque multiplex. Dico vtrumque AC vtriusque BD aeque multiplicem esse, atque A ipsius B. quoniam enim A ipsius B multiplex est, & C ipsius D aeque multiplex; erit B ipsius A pars aliqua, & D ipsius C eadem pars. quare ex ijs, quae proxime tradita sunt & vterque BD vtriusque AC eadem pars erit, quae est B ipsius A. Vterque igitur AC vtriusque BD aeque multiplex est, atque A ipsius B. quod demonstrare oportebat.

Sed quod de duobus dicitur, possumus etiam ad quotcumque numeros amplificare. vt] Si fuerint quotcumque numeri quotcumque numerorum æqualium multitudine, singuli singulorum æque multiplices, quotuplex est vnus vnius, totuplices erunt & omnes omnium [*quod eodem modo demonstrabimus Hoc autem respondebit ei, quod in prima propositione quinti libri de omnibus magnitudinibus demonstratur.*

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. VI.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eędem partes; & vterque vtriusque eædem partes erit, quę vnus vnius.

Numerus enim AB numeri C partes sit, & alter DE alterius F eędem partes, quæ AB ipsius C. Dico & vtrumque AB DE vtriusque C F easdẽ partes esse, quæ AB ipsius C. quoniam enim quę partes est AB ipsius C, eædem est DE ipsius F, quot partes sunt in AB ipsius C, tot erunt & in DE

partes ipsius F. Diuidatur AB quidem in partes ipsius C, videlicet AG GB, DE vero diuidatur in partes ipsius F, hoc est DH HE. erit ipsorum AG GB multitudo ęqualis multitudini ipsorũ DH HE. & quoniam quæ pars est AG ipsius C, eadem est pars & DH ipsius F. quę pars est AG ipsius C, eadem pars erit & vterque AG DH vtriusque C F. Simili ratione & quæ pars est GB ipsius C, eadem pars erit & vterque GB HE vtriusque C F. Quę igitur partes est AB ipsius C, eędem partes est & vterque AB DE vtriusque C, F. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter & hanc, & antecedentem possumus ad quotcunque numeros transferre; ut Si quotcumque numeri minores ad totidem alios maiores referantur, sintq; singuli singulorum vel eadem pars, vel eædem partes, quę pars, vel partes est vnus vnius, eadem pars, vel eædem partes erunt & omnes omnium.

THEOREMA V. PROPOSITIO. VII.

Si numerus numeri pars fuerit, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri CD pars sit, quæ ablatus AE ablati CF. Dico & reliquum EB reliqui FD eandem partem esse, quę est totus AB totius CD. quæ enim pars est AE ipsius CF, eadem pars sit & EB ipsius CG. ergo quæ pars est AE ipsius CF, eadem pars est & AB ipsius GF. quæ autẽ pars est AE ipsius CF, eadem pars ponitur & AB ipsius CD. quæ igitur pars est AB ipsius GF, eadem est & AB ipsius CD. quare AB vtriusque GF CD eadem est pars. ęqualis igitur est GF ipsi CD. communis anferatur CF. ergo reliquus GC reliquo FD est æqualis. & quoniam quæ pars est AE ipsius CF, eadem est & EB ipsius GC. æqualis autem est GC ipsi FD. quę pars est AE ipsius CF, eadem erit & EB ipsius FD. sed quæ pars est AE ipsius CF, eadem est & AB ipsius CD. ergo quæ pars est EB ipsius FD, eadem est & AB ipsius CD. & reliquus igitur EB reliqui FD eadem pars erit, quæ totus AB totius CD. quod demonstrare oportebat.

5. huius.

4 com. not.

D 4 F 8 B 2 E C 4 A G

F. C. COMMENTARIVS.

Ex his autem illud quoque demonstrare licebit.

Si numerus numeri æque multiplex fuerit, atque ablatus ablati, & reliquus reliqui ęque multiplex erit, atque totus totius.

Iisdem enim, quae supra, manentibus. sit numerus CD aeque multiplex numeri AB, atque ablatus CF ablati AE. Dico & reliquum FD reliqui EB aeque multiplicem esse, atque totũ CD totius AB. quoniam enim CD ipsius AB aeque multiplex est, atque ablatus CF ablati AE; erit AB ipsius CD eadem pars, quae est AE ipsius CF. ergo ex iam demonstratis & reliquus EB reliqui FD eadem pars est, quae totus AB totius CD. reliquus igitur FD reliqui EB aequemultiplex erit, atque totus CD totius AB. quod demonstrandum fuerat.

D 4 F B 2 E 8 4 C A

THEOREMA VI. PROPOSITIO VIII.

Si numerus numeri partes fuerit, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eædem partes erit, quę totus totius.

Numerus enim AB numeri CD partes sit, quę ablatus AE ablati CF. Dico & reliquum EB reliqui FD easdem partes esse, quæ totus AB totius CD. ponatur enim

ipsi

ipsi A B equalis GH. quæ igitur partes est GH ipsius CD, eędē est & AE ipsius CF. Diuidatur GH quidē in partes ipsius CD, videlicet G K KH. AE vero diuidatur in partes ipsius CF, videlicet AL LE erit igitur ipsarū GK KH multitudo æqualis multitudini ipsarum AL LE Et quoniā quæ pars est GK ipsius CD, eadem est & AL ipsius C F maior aūt CD, quā CF. ergo & GK, quā AL est maior ponatur ipsi AL ęqualis GM. quę igitur pars est GK ipsius CD, eadem est et GM ipsius CF quare et reliquus MK reliqui FD eadē pars est, quę totus GK totius CD. Rursus quoniā quæ pars KH ipsius CD, eadē est et E L ipsius CF; maior autem CD, quam CF. erit & KH quàm EL maior. ponatur ipsi EL ęqualis KN. quę igitur pars est KH ipsius CD, eadē est & KN ipsius CF. ergo & reliquus NH reliqui FD eadē pars est, quæ totus KH totius CD. ostēsum autem est & reliquum MK reliqui FD eandem partem esse; quæ totus GK totius DC. & vterque igitur MK NH ipsius DF eædem partes est, quę totus HG totius DC. æqualis autem vterque quidem MK NH ipsi EB, HG vero ipsi BA. & reliquus igitur EB reliqui FD eædem partes est, quæ totus AB totius CD. quod demonstrare oportebat.

(margin: huius.)

THEOREMA. VII, PROPOSITIO IX.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; & permutando quæ pars est, vel partes primus tertij, eadē erit pars, vel eædem partes & secundus quarti.

Numerus enim A numeri BC pars sit, & alter D alterius EF eadem pars, quę A ipsius BC. minor autem sit A, quàm D. Dico & permutādo quę pars est A ipsius D, vel partes, eādem partem esse & BC ipsius EF, vel easdem partes Quoniam enim quę pars est A ipsius BC, eadem est & D ipsius EF; quot numeri sunt in BC ęquales ipsi A, tot sunt et in EF æquales ipsi D. diuidatur BC quidem in numeros ipsi A æquales, videlicet in BG GC. EF vero diuidatur in numeros ipsi D ęquales, EH HF erit ipsorū BG GC multitudo qualis multitudini ipsorum EH HF. et quoniam numeri BG GC inter se sunt ęquales sun. autem et ęquales EH HF, atque est ipsorum BG GC multitudo æqualis multitudini ipsorum EH HF quæ pars est BG ipsius EH, vel partes, eadem pars erit et GC ipsius HF, vel eædem partes ergo quæ pars est BG ipsius EH, vel partes,
5 huius. eadem pars erit et vterque BC vtriusque EF, vel eædem partes. æqualis autem est
6 huius. BG ipsi A, et EH ipsi D. quæ igitur pars est A ipsius D, vel partes, eadem pars erit et BC ipsius EF, vel eædm partes. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO X.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes; & permutando quę partes est primus tertij, vel pars, eędem partes erit & secundus quarti, vel eadem pars.

Numerus enim AB numeri C partes sit, et alter DE alterius F eędem partes: sit autem AB minor, quàm DE. Dico et permutando quæ partes est AB ipsius DE, vel pars, easdem partes esse et C ipsius F, vel eandem partem. quoniam enim quæ partes est AB ipsius C, eædem partes est et DE ipsius F; quot sunt in AB partes ipsius C, tot erunt et

in DE partes ipsius F. diuidatur AB quidem in partes ipsius C, videlicet AG GB: DE vero diuidatur in partes ipsius F, hoc est DH HE. erit vtique ipsarum AG GB multitudo multitudini ipsarum DH HE æqualis. et quoniam quæ pars est AG ipsius C, eadem est pars et DH ipsius F. et permutando quæ pars est AG ipsius DH, vel partes, eadem pars erit et C ipsius F, vel eçdẽ partes. simili ratione et quæ pars est GB ipsius HE, vel partes, eadem pars erit et C ipsius F, vel eadem partes. ergo quę pars est AG ipsius DH, vel partes; eadem pars erit et AB ipsius DE, vel eædem partes. sed quæ pars est AG ipsius DH, vel partes, eadem pars est et C ipsius F, uel eędem partes. Et quæ igitur partes est AB ipsius DE, vel pars, eædem partes est et C ipsius F, vel eadem pars. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO XI.

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

Sit vt totus AB ad totum CD, ita ablatus AE ad ablatum CF. Dico et reliquum EB ad reliquum FD ita esse, vt totus AB ad totum CD. Quoniam enim est vt AB ad CD, ita AE ad CF, quæ pars est AB ipsius CD, vel partes, eadẽ pars erit et AE ipsius CF, vel eædem partes. ergo et reliquus EB reliqui FD eadem pars erit, vel eædem partes, quę AB ipsius CD. est igitur ut EB ad FD, ita AB ad CD. quod demonstrare oportebat.

D 3 B F 2 E 6 4 A C

Diffi 20
7 8 huius.
Per cõuersã.
Diffi 20.

F. C. COMMENTARIVS.

Precedens demonstratio congruit, cum AB fuerit minor, quàm CD. sed si AB maior sit, quàm CD, nihilominus idem demonstrabitur. nam vel CD metitur ipsum AB, vel non metitur. & si quidẽ metitur, quoniam est vt AB ad CD, ita AE ad CF; erit AB ipsius CD aeque multiplex, atque AE ipsius CF. quare ex ijs, quae nos demõstrauimus ad septimã huius; & reliquus EB reliqui FD reliqui FD aeque multiplex est, atq; totus AB totius CD. reliquus igitur EB ad reliquum FD, erit vt totus AB ad totum CD. si vero CD non metitur ipsum AB, rursus quoniam vt AB ad CD, ita est AE ad CF, quae partes est CD ipsius AB, eędem partes erit CF ipsius AE. ergo & reliquus FD reliqui EB eędem partes est, quae totus CD totius AB. reliquus igitur EB ad reliquum FD ita erit, vt totus AB ad totum CD. quod oportebat demonstrare.

B 6 E D 3 F 8 4 A C

B 5 D E F 6 4 A C

Diffi 20
Per cõuersã.
Diffi. 20.
Diffi 20
8 huius
Per couersã.
Diffi. 20.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XII.

Si quotcumque numeri proportionales fuerint, vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcumque numeri proportionales ABCD; sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico vt A ad B, ita esse AC ad BD. Quoniam enim est vt A ad B, ita C ad D, quæ pars est A ipsius B, uel partes, eadem pars erit et C ipsius D, vel partes. et uterque igitur AC vtriusque BD eadem pars est, uel partes, quæ A ipsius B. ergo ut A ad B, ita est AC ad BD. quod demonstrare oportebat.

2 3 4 6 A B C D

Diffi 20
5.6 huius
Per conuers.
Diffi 20

SCHOLIVM.

Hoc quinto, & sexto vniuersalius est. quae enim illic seorsum in parte, & partibus, eadem hoc loco vnà demonstrantur.

F. C. COMMENTARIVS.

Et hęc demonstratio congruit tantum, cum antecedentes numeri minores fuerint consequentibus. quòd si maiores sint, rursus vel B metitur ipsum A, vel non metitur. si metitur, ita dicemus. Quoniam est vt A ad B, ita C ad D, aeque multiplex erit A ipsius B, atque C ipsius D. ergo ex ijs, quae demonstrauimus ad quintam huius, & vterque A C vtrusq;

Conuer. 20. diffi. *BD aeque multiplex est, atque A ipsius B. Vt igitur A ad B, ita erit vterq; A C ad vtrúq; B D.*

Quod si B non metitur ipsum A, ita argumentabimur. quoniam est vt A ad B, ita C ad D, quae

6 huius. *partes est B ipsius A, eędem partes erit D ipsius C. ergo & uterq; A C vtrusque B D eędem par-*

Conuer. 20. diffi. *tes est, quae A ipsius B. quare vt A ad B, ita erit A C ad B D.*

Idem demonstrabimus etiam si plures sint numeri proportionales, hoc, quod sequitur, pręmisso.

Quæ eidem eædem sunt numerorum proportiones, et inter se eædem erunt.

Sit vt A ad B, ita C ad D: vt autem C ad D, ita E ad F. Dico vt A ad B, ita esse E ad F. Si enim numerus A sit maior, quàm B, quoniam est vt A ad B, ita C ad D, quae pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars erit, vel partes D ipsius C. Rursus quoniam vt C ad D, ita est E ad F, quae pars est, vel partes D ipsius C, eadem pars, vel partes erit F ipsius E. quae igitur pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars erit, vel partes F

Conuer. 20. diffi. *ipsius E. ergo vt A ad B, ita est E ad F.*

Si vero A sit minor, quàm B, quoniam vt A ad B, ita est C ad D, quae pars est, vel partes A ipsius B, eadem pars, vel partes erit C ipsius D. Rursus quoniam vt C ad D, ita E ad F, quae pars, vel partes est C ipsius D, eadem pars, vel partes erit E ipsius F. ergo quae pars, vel partes est A ipsius B, eadem est pars, vel par-

Conuer. 20. diffi. *tes E ipsius F. vt igitur A ad B, ita E ad F. quod demonstrandum proposuimus.*

Hoc demõstrato sint numeri proportionales A B C, D E F; sitq; vt A ad D, ita B ad E, & C ad F. Eadẽ ratione demonstrabimus vt A ad D, ita esse A B ad D E. Et quoniam vt A ad D, ita est C ad F, erit ex ijs, quae nos proxime demõstrauimus, vt A B ad D E, ita C ad F. nõ aliter ostendemus vt A B ad D E, ita esse A B C ad D E F. vt igitur A ad D, ita erũt A B C ad D E F. et eodẽ modo in alijs, quotquot numeri proportionales fuerint. Hoc autem respondet ei, quod in 12 quinti vniuerse de magnitudinibus demonstratur.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

Si quattuor numeri proportionales fuerint, & permutando proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD; sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico et per-

et permutãdo proportionales esse, videlicet vt A ad C, ita esse B ad D. quonia enim est vt A ad B, ita C ad D, quę pars est A ipsius B, vel partes, eadẽ pars erit et C ipsius D, vel eædem partes. permutãdo igitur quæ pars est A ipsius C, vel partes, eadẽ pars est & B ipsius D, uel partes. ergo vt A ad C, ita est B ad D. quod demonstrare oportebat. Diff. 10. 9. 10. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Hęc demonstratio congruit, vbi antecedentes numeri minores sunt consequentibus, sitq; A minor, quàm C. si vero sint maiores, & A maior sit quã B, & minor quàm C, ita dicemus. Quoniam est vt A ad B, ita C ad D; quae pars est, vel partes B ipsius A, eadem pars, vel partes erit D ipsius C. ergo permutando quae pars est, vel partes B ipsius D, eadem pars, vel partes erit A ipsius C. vt igitur A ad C, ita est B ad D. Diff. 10. 9. 10. huius. Cõu dif 10.

Quòd si A sit maior, quàm B, et maior, quàm C, ita argumẽtabimur. Quoniã vt A ad B, ita C ad D, quae pars, uel partes est D ipsius C, eadẽ pars, vel partes erit B ipsius A. ergo permutãdo quę pars, vel partes est D ipsius B, eadem pars, vel partes erit C ipsius A. est igitur vt A ad C, ita B ad D. Denique si A sit minor, quam B, & maior, quàm C. hoc modo Quoniam vt A ad B, ita C ad D, quae pars, vel partes est C ipsius D, eadem pars, vel partes est A ipsius B. permutando igitur quae pars est, vel partes C ipsius A, eadem pars, vel partes est D ipsius B. ergo vt A ad C, ita erit B ad D. 9. 10. huius. Cõu dif 10.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

Si fuerint quotcumque numeri, et alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, et in eadem proportione; etiam ex ęquali in eadem proportione erunt.

Sint enim quotcumque numeri ABC, & alij ipsis multitudine ęquales, qui bini sumantur, & in eadem proportione DEF; sitq; vt A ad B, ita D ad E; vt autem B ad C, ita E ad F. Dico etiam ex ęquali vt A ad C, ita esse D ad F. Quoniam enim est vt A ad B, ita D ad E, erit permutãdo vt A ad D, ita B ad E. Rursus quoniam est vt B ad C, ita E ad F; permutando vt B ad E, ita erit C ad F. vt autem B ad E, ita erat A ad D. & vt igitur A ad D, ita C ad F. ergo permutando vt A ad C, ita D ad F. quod oportebat demonstrare. Ex antecedente. Ex demonstratis ad 12 huius

F. C. COMMENTARIVS.

Quòd si plures, quàm tres numeri proportionales fuerint ABCD EFGH; sitq; ut A ad B, ita E ad F: vt autem B ad C, ita F ad G; et vt C ad D, ita G ad H: similiter demonstrabimus ut A ad C, ita esse E ad G. et quoniã est vt C ad

D, ita G ad H, rursus demonstrabimus vt A ad D, ita E ad H. & eodem modo in alijs.

Sed quoniam Euclides conuersam rationem, compositam, & diuisam, conuersionemq; rationis in numeris omisit, nos eas, ne quid desideretur, hoc loco apponere curauimus.

PROPOSITIO I.

Si quattuor numeri proportionales sint, & conuertendo proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD;
sitq; vt A ad B, ita C ad D. Dico vt B ad A, ita
esse D ad C. Si enim A sit minor, quàm B, quo-
Diffi 10. *niam est vt A ad B, ita C ad D, quae pars uel*
partes est A ipsius B, eadẽ pars, vel eędẽ partes
Cõu dif. 10. *erit C ipsius D ergo ut B ad A, ita est D ad C.*
Si uero A sit maior, quàm B, rursus quoniam vt A ad B, ita C ad D, quę pars, vel partes est B ipsius A, eadem pars, uel partes erit D ipsius C. Vt igitur B ad A, ita est D ad C.

PROPOSITIO II.

Si quattuor numeri proportionales sint, & componendo proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales A B C D; & sit vt A ad B, ita C ad D. Dico vt A B ad B, ita esse C D ad D. nam cum sit ut A ad B, ita C ad D, & permutando vt A ad C, ita erit B ad D. quare ex duodecima huius vt A B ad C D, ita est B ad D. Rursus igitur permutando ut AB ad B, ita CD ad D.

PROPOSITIO III.

Si quattuor numeri proportionales sint, & diuidendo proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales AB B CD D; sitq; vt numerus AB,
qui ex duobus numeris constat ad numerum B, ita C D ex duobus C D constans
ad ipsum D. Dico vt A ad B, ita esse C ad D. Quoniam enim est vt AB ad B, ita
13 huius. *CD ad D, erit permutando vt A B ad C D, ita B ad D. si autem fuerit ut totus*
11. huius. *ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad to-*
tum. ergo A ad C est vt AB ad CD. sed ut AB ad C D, ita erat B ad D. Ex eo igitur, quod demonstrauimus ad 12 huius, vt A ad C, ita erit B ad D: & rursus permutando ut A ad B, ita C ad D.

PROPOSITIO IIII.

Si quattuor numeri proportionales sint, et per conuersionem rationis proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales AB B CD D; sitq; vt AB ad B, ita
CD ad D. Dico ut AB ad A, ita esse CD ad C. Quoniam enim est ut AB ad B, ita
13 huius. *CD ad D, erit permutando vt A B ad C D, ita B ad D. quòd cum sit vt totus ad*
11. huius *totum, ita ablatus ad ablatum, erit & reliquus A ad reliquum C, vt A B ad*
CD, & rursus permutando, conuertendoq; ut AB ad A, ita CD ad C.

Sed et quod Euclides de magnitudinibus demonstrauit in vigesima quarta quinti libri, nos de numeris demonstrabimus in hunc modum.

PROPOSITIO V.

Si primus ad secundum eandem habeat proportionem, quam tertius ad quartum; habeat autem et quintus ad secundum proportionem eandem, quam sextus ad quartum; et compositus primus et quintus ad secundum eandem proportionem

nem habebit, quam tertius et sextus ad quartum.

Primus enim numerus AB ad secundum C proportionem habeat eandem, quam tertius DE ad quartum F: habeatq́; quintus BG ad secundum C eandem proportionem, quam sextus EH ad quartum F. Dico primum & quintum AG ad secundum C eandem proportionẽ habere, quam tertius, & sextus DH ad quartum F. Quoniam enim est vt EG ad C, ita EH ad F; erit conuertendo vt C ad BG, ita F ad EH. et quoniam vt AB ad C, ita DE ad F: vt autem C ad BG, ita F ad EH, erit ex aequali vt AB ad BG, ita DE ad EH. quare componendo ut AG ad GB, ita erit DH ad HE. Sed vt GB ad C, ita est EH ad F. rursus igitur ex aequali vt AG ad C, ita est DH ad F. 1 Additarũ. 14. huius. 2. Additarũ.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XV.

Si vnitas numerum aliquem metiatur, alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem; et permutando unitas tertium numerum æqualiter metietur, atque secundus quartum.

Vnitas enim A numerum aliquem BC metiatur, alter autem numerus D æqualiter metiatur alium aliquem EF. Dico & permutando A vnitatem æqualiter metiri numerum D, atque BC ipsum EF. Quoniam enim A vnitas æqualiter metitur numerum BC, atque D ipsum EF, quot vnitates sunt in BC, tot sunt et in EF numeri ęquales ipsi D. diuidatur BC quidem in vnitates, quæ in ipso sunt, videlicet BG GH HC: EF vero diuidatur in numeros ipsi D æquales EK KL LF. erit igitur ipsorum BG GH HC multitudo ęqualis multitudini ipsorum EK KL LF. & quoniam BG GH HC vnitates inter se ęquales sunt: suntq́; numeri EK KL LF inter se æquales, & vnitatum BG GH HC multitudo æqualis multitudini numerorum EK KL LF: erit vt BG vnitas ad numerum EK, ita GH vnitas ad numerum KL, & vnitas HC ad LF numerum, & vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes cõsequentes est. igitur vt BG ad numerum EK, ita BC ad EF. æqualis autem est BG vnitas vnitati A: et EK numerus numero D. quare ut A vnitas ad numerum D, ita est BC ad EF. ęqualiter igitur A unitas numerum D metitur, atque BC ipsum EF. quod demonstrare oportebat. 12 huius Diff. 20.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XVI.

Si duo numeri se se multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipsis inter se ęquales erunt.

Sint duo numeri A B, & A quidem ipsum B multiplicans faciat C: B vero multiplicans A faciat D. Dico C ipsi D ęqualem esse. Quoniam enim A ipsum B multiplicans fecit C, metietur B ipsum C per vnitates, quæ sunt in A. metitur autem & E vnitas numerum A per vnitates, quę in ipso sunt. æqualiter igitur E vnitas numerum A metitur, atq; B ipsum C. quare permutando vnitas E numerum B ęqualiter metitur, atq; A ipsum C. Rursus quoniam B ipsum A multiplicans fecit D; A metietur ipsum D per vnitates, quæ sunt in B. metitur autem & E unitas numerum B per unitates, quæ in ipso sunt. ergo E unitas numerum B æqualiter metitur, atque A ipsum D. sed E unitas numerũ B æqualiter 10 corr. Ifiot. 6. com. ... Ex antecedente.

B æqualiter metitur, atque A ipsum C Cum igitur A vtrũque ipsorum C D æqualiter metiatur, erit C ipsi D æqualis. quod demonstrare oportebat. (4. com. not.)

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVII.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos, facti ex ipsis eandem proportionem habebunt, quam multiplicati.

Numerus enim A duos numeros B C multiplicans faciat ipsos D E. Dico ut B ad C, ita esse D ad E quoniam enim A ipsum B multiplicans fecit D, metietur B ipsum D per unitates, quæ sunt in A. (10. com not.) metitur autem et F unitas numerum A per vnitates, quæ in ipso sunt. (6. com. not.) æqualiter igitur F unitas numerum A metitur, atque B ipsum D. ergo ut F unitas ad numerum A, ita est B ad D. (Conuers. 20. Diffi.) eadem ratione et ut F unitas ad numerum A, ita C ad E. & ut igitur B ad D, ita C ad E; & permutando ut B ad C, ita D ad E. quod demõstrare oportebat.

F 1
A. 2
B. 3
C .. 4
D.... 6
E 8

F. C. COMMENTARIVS.

Idem sequetur etiam si numerus aliquis plures quàm duos numeros multiplicans fecerit totidem alios, facti namque eandem, quam multiplicati, proportionem habebunt.

Numerus enim A tres numeros BCD multiplicans faciat ipsos EFG. Dico vt B ad C, ita esse E ad F; & vt C ad D, ita F ad G. Similiter enim, vt supra, demonstrabimus, vt H vnitas ad numerum A, ita esse B ad E, & C ad F, & D ad G. erit igitur vt B ad E, ita C ad F, & D ad G. itaque quoniam est vt B ad E, ita C ad F, erit permutando vt B ad C, ita E ad F. Rursus quoniam vt C ad F, ita D ad G, & permutando erit vt C ad D, ita F ad G. vt igitur B ad C, ita est E ad F: & vt C ad D, ita F ad G quod oportebat demonstrare.

H . 1
A . . 2
B . . . 3
C 4
D 5
E 6
F 8
G 10

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos, facti ex ipsis eandem proportionem habebunt, quam multiplicantes.

Duo enim numeri A B numerum aliquem C multiplicantes faciant ipsos D E. Dico vt A ad B, ita esse D ad E. Quoniam enim A ipsum C multiplicans fecit D, & C multiplicans A ipsum D fecit. (16. huius.) Eadem ratione & C ipsum B multiplicans fecit E. Itaque numerus C duos numeros A B multiplicans ipsos D E fecit. est igitur ut A ad B, ita D ad E. quod demonstrare oportebat. (Ex antecedente.)

A... 3
B.... 4
C.. 2
D...... 6
E........ 8

F. C. COMMENTARIVS.

Quòd si plures quàm duo numeri aliquem multiplicantes fecerint totidem alios, facti similiter eandem, quam multiplicantes, proportionem habebunt. quod eodem modo demonstrabimus.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XIX.

Si quattuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, & quarto

quarto fit numerus æqualis erit ei, qui fit ex secundo, & tertio. & si numerus, qui fit ex primo, & quarto æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio, quattuor numeri proportionales erunt.

Sint quattuor numeri proportionales ABCD; sitq; vt A ad B, ita C ad D: & A quidẽ ipsũ D multiplicans faciat E B vero multiplicans C faciat F. Dico E ipsi F æqualem esse. multiplicãs enim A ipsum C faciat G. & quoniam A ipsum quidem C multiplicans fecit G; ipsum uero D multiplicans E fecit: numerus A duos numeros CD multiplicans fecit ipsos G E. est igitur ut C ad D, ita G ad E. Vt autem C ad D, ita A ad B. quare & ut ad B, ita G ad E. Rursus quoniam A ipsum C multiplicans G fecit; sed & B ipsum C multiplicãs fecit F: duo numeri A B numerum aliquem C multiplicantes fecerunt ipsos G F. vt igitur A ad B, ita est G ad F. Sed & vt A ad B, ita G ad E. ergo & ut G ad E, ita est G ad F. quod cum G ad utrumque ipsorum E F eãdem proportionem habeat, erit E ipsi F æqualis. Sed sit E æqualis ipsi F. Dico ut A ad B, ita esse C ad D. iisdem enim constructis quoniam A ipsos C D multiplicans fecit G E, erit ut C ad D, ita G ad E. est autem E ipsi F æqualis. ut igitur G ad E, ita G ad F. sed ut G ad E, ita C ad D. ergo & ut C ad D, ita G ad F. ut autem G ad F, ita A ad B. & ut igitur A ad B, ita C ad D. quod demonstrare oportebat.

17 huius. Ex antecedente. A 17 huius. B C

F. C. COMMENTARIVS.

A Quòd cum G ad utrumque ipsorum E F eandem proportionem habeat, erit E ipsi F æqualis] *Hoc patet ex vigesima diffinitione. Si enim G sit maior, quam E, vel F; erit vterque ipsorum E F vel eadem pars, vel eędem partes ipsius G. si vero G; sit minor, erit G vel eadem pars, vel eędem partes vtriusque ipsorum E F. quare E F inter se aequales sint necesse est.* 34 co. not.

B Est autem E ipsi F æqualis. ut igitur G ad E, ita G ad F.] *Per conuersam vigesimae diffinitionis. nam siue vterque ipsorum E F eadem pars, vel eędem partes sit ipsius G, siue G eadem pars sit, vel eędem partes vtriusque ipsorum E F, erit vt G ad E, ita G ad F.*

C Vt autem G ad F, ita A ad B.] *cum enim duo numeri A B ipsum C multiplicantes faciant G F, vt A ad B, ita erit G ad F.*

THEOREMA. XVIII. PROPOSITIO XX.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei, qui fit à medio. Si autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei, qui à medio; tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri proportionales ABC; sitq; ut A ad B, ita B ad C. Dico numerum, qui fit ex AC æqualem esse ei, qui fit ex B. ponatur enim ipsi B æqualis D. est igitur ut A ad B, ita D ad C. ergo qui fit ex AC æqualis est ei, qui ex BD. qui autem fit ex BD est æqualis ei, qui fit ex B; ęqualis etenim est B ipsi D. qui igitur fit ex AC ipsi B est æqualis. Sed qui fit ex AC æqualis sit ei, qui ex B. Dico ut A ad B, ita esse B ad C. Quoniam enim qui ex AC fit ęqualis est ei, qui fit ex B; qui autem fit ex B est æqualis ei, qui ex BD: erit ut A ad B, ita D ad C. sed B ipsi D est ęqualis. ut igitur A ad B, ita est B ad C. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente. Ex antecedente.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Minimi numeri eandem, quam ipsi proportionem habentium, eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem.

Sint enim minimi numeri eandem, quam A B, proportionem habentium CD EF. Dico CD æqualiter metiri ipsum A, atque EF ipsum B. numerus enim CD ipsius A non est partes. Si enim fieri potest, sit CD partes ipsius A. ergo EF ipsius B eædem
20.def.7. partes erit, quæ CD ipsius A. quot igitur in CD partes sunt ipsius A, tot erunt & in EF partes ipsius B. Diuidatur CD quidem in ipsius A partes CG GD: EF vero diuidatur in partes ipsius B, EH HF. erit igitur ipsarum CG GD multitudo æqualis multitudini ipsarum EH HF. & quoniam CG GD æquales inter se sunt; sunt autem & EH HF inter se æquales, atque est ipsarum CG GD multitudo
* multitudini ipsarum EH HF æqualis: erit ut CG ad EH, ita GD ad HF. erit igitur & ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes
12.huius. nes consequentes. quare ut CG ad EH, ita est CD ad EF; ac propterea CG EH in eadē sunt proportione, in qua CD EF, minores ipsis existentes quod fieri non potest: ponuntur enim CD EF minimi numeri eandem, quam ipsi proportionem habentium. non igitur CD ipsius A partes est. ergo est pars. et EF ipsius B pars eadem est quæ CD ipsius A. æqualiter igitur CD ipsum A, atque EF ipsum B metitur. quod oportebat demonstrare.

C.2.G 2.D
E 2 H F
A....... 8
B......6

F. C. COMMENTARIVS.

* Erit ut CG ad EH, ita GD ad HF.] *Per conuersam vigesimae diffinitionis. nam cum CG GD inter se aequales sint, itemq; aequales inter se EH HF, si CG sit minor, quam EH, quae pars, uel partes est CG ipsius EH, eadem pars, vel partes erit GD ipsius HF. si vero sit maior, quae pars, vel partes EH ipsius CG, eadem erit pars, vel partes HF ipsius GD. ergo vt CG ad EH, ita GD ad HF.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si sint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, et in eadem proportione; sit autem perturbata eorum analogia: etiam ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint tres numeri A B C, et alij ipsis multitudine æquales qui bini sumantur, et in eadem proportione D E F; sitq; perturbata eorum analogia: et ut A quidem ad B, ita sit E ad F, vt autem B ad C, ita D ad E. Dico etiam ex æquali vt A ad C, ita esse D ad F. Quoniam enim est
19.huius. ut A ad B, ita E ad F; qui fit ex AF æqualis erit ei, qui ex BE. Rursus quoniam est vt B ad C, ita D ad E; qui fit ex CD æqualis erit ei, qui ex BE. ostensum autem est et qui
19 huius. fit ex AF æqualem esse ei, qui ex BE. ergo et qui fit ex AF æqualis est ei, qui fit ex CD. vt igitur A ad C, ita D ad F. quod demonstrare oportebat.

12 6 4 3 9 6
A B C D E F

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIII.

Primi inter se numeri minimi sunt eorum, qui eãdem, quam ipsi proportionem habent.

Sint primi inter se numeri A B. Dico eos minimos esse eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent. si enim non ita sit, erunt aliqui numeri minores ipsis A B, qui eandē, quam A B proportionem habebunt. sint C D. Quoniam igitur minimi numeri eandem, quam ipsi proportionem habentium eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens cō sequentem; numerus C ipsum A æqualiter metietur, atque D ipsum B. quoties autem C metitur ipsum A, tot vnitates sint in E. ergo et D ipsum B metitur per vnitates, quę sunt in E. et quoniam C metitur ipsum A per vnitates quę sunt in E, numerus E ipsum A per vnitates, quæ sunt in C, metietur. et eadem ratione E metietur B per vnitates, quæ sunt in D. ergo E ipsos A B metitur, primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis A B, qui eandē habeant proportionem. ergo A B minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi proportionem habent. quod oportebat demonstrare.

21 huius. 9. com. not.

A.....7
B....4
E—
C—
D—

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIIII.

Minimi numeri eorum, qui eandem, quam ipsi proportionem habent, primi inter se sunt.

Sint minimi numeri eorum qui eandem, quam ipsi proportionē habent A B. Dico A B primos inter se esse. si enim nō sunt A B inter se primi, eos aliquis numerus metietur, metiatur; sitq; C. et quoties C ipsum quidem A metitur, tot vnitates sint in D. quoties vero C metitur ipsum B, tot vnitates sint in E. et quoniam C. ipsum A metitur per vnitates, quę sunt in D, multiplicans C ipsum D fecit A. Eadem ratione et C multiplicans E ipsum B fecit. Itaque cum numerus C duos numeros DE multiplicans faciat A B, erit ut D ad E, ita A ad B. ergo DE in eadem sunt proportione, in qua AB, minores ipsis existentes. quod fieri non potest. non igitur A B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A B primi inter se sunt. quod oportebat demonstrare.

9. com. not. 17 huius.

A . . . 6
B . . 5
C—
D—
E—

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO. XXV.

Si duo numeri primi inter se fuerint, qui vnum ipsorum metitur numerus ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se A B, et aliquis numerus C ipsum A metiatur. Dico et B C inter se primos esse. Si enim B C nō sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitq; D. et quoniam D ipsum C metitur, et C ipsum A; et D ipsum A metietur. metitur autem et ipsum B. ergo D numeros AB metitur primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur B C numeros numerus aliquis metietur. ideoq; B C inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare.

A 6
B 5
C . . . 3
D —

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXVI.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint, et qui sit ex ipsis ad eum primus erit.

Duo enim numeri A B ad aliquem numerũ C primi sint: et A ipsum B multiplicans faciat D. Dico C D inter se primos esse. si enim C D non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur; sitq; E. et quoniã C A primi inter se sunt, et ipsum C metitur aliquis numerus E; erunt E A inter se primi. quoties autem E ipsum D metitur, tot vnitates sint in F. quare et F metitur ipsum D per vnitates, quæ sunt in E. ergo E ipsum F multiplicans fecit D. sed et A multiplicas B ipsum D fecit. qui igitur fit ex E F est æqualis ei, qui ex A B. si uero qui fit ex extremis æqualis fuerit ei, qui ex medijs, quattuor numeri proportionales erunt. est igitur ut E ad A, ita B ad F. sunt autem A E inter se primi, et qui primi etiam minimi sunt. minimi vero eãdẽ, quam ipsi, proportionem habentium, eos, qui eandem habẽt proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem. ergo E ipsum B metitur. metitur autẽ et ipsum C. quare E ipsos B C metitur, primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur C D numeros numerus aliquis metietur; ac propterea C D inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.

8 com. not.
9 com. not.

19 huius.

23 huius
21. huius.

A . 2 B . . . 3
C 5
D —— 6
E ——
F ——

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

Si duo numeri primi inter se fuerint, qui fit ab vno ipsorum ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri inter se primi AB; & A se ipsum multiplicans faciat C. Dico B C inter se primos esse. ponatur enim ipsi A ęqualis D & quoniam AB sunt primi inter se, æqualis autem A ipsi D; & DB inter se primi erunt. vterque igitur ipsorum A D ad B primus est. ergo & qui ex AD fit primus erit ad B. sed qui fit ex AD est numerus C. quare C B inter se primi sunt. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.

A . . 2 B . . 3
C 4
D . . 2

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVIII.

Si duo numeri ad duos numeros vterque ad vtrumque primi fuerint, & qui fiunt ex ipsis inter se primi erunt.

Duo enim numeri A B ad duos numeros C D vterque ad vtrumque primi sint: & A quidem ipsum B multiplicans faciat E: C vero multiplicans D faciat F. Dico EF inter se primos esse. Quouiam enim vterque ipsorum A B ad C primus est, & qui fit ex A B ad C primus erit. qui autem fit ex A B est E. ergo E C primi inter se sunt Eadẽ ratione & E D primi sunt inter se. vterque igitur ipsorum C D ad E primus est: ac propterea qui fit ex C D primus erit ad E qui uero ex CD fit est numerus F. ergo E F primi inter se erunt. quod demonstrare oportebat.

26. huius.

3 5 15 3 4 8
A B E C D F

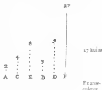
THEOREMA XXVII. PROPOSITIO. XXIX.

Si duo numeri primi inter se fuerint, & vterque seipsum multiplicans faciat aliquos: facti ex ipsis primi erunt inter se. & si numeri à principio positi eos, qui facti sunt, multiplicantes aliquos

faciant

faciant, & ipsi inter se primi erunt: & semper circa extremos hoc continget.

Sint duo numeri inter se primi A B. & A se ipsum quidem multiplicans faciat C, multiplicans vero C faciat E: & B se ipsũ multiplicãs D faciat, multiplicans autem D faciat ipsum F. Dico C D, & E F inter se primos esse. Quoniam enim A B primi inter se sunt; & A se ipsum multiplicans fecit C; erunt C B primi inter se. & quoniam C B inter se primi sunt, & B se ipsum multiplicans fecit D; erũt C D inter se primi. Rursus quoniam A B primi sunt inter se, & B se ipsum multiplicans D fecit; A D inter se primi erunt. Cum igitur duo numeri A C ad duos numeros B D vterque ad vtrumque primi sint, & qui ex A C fit ad eum, qui fit ex B D primus erit. sed qui fit ex AC est numerus E, qui vero ex BD fit est F. ergo E F primi inter se sunt. quod oportebat demonstrare.



27 huius.

Ex antecedente

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XXX.

Si duo numeri primi inter se fuerint, & vterque simul ad vtrũque ipsorum primus erit. quòd si vterque simul ad vnum aliquem ipsorum sit primus, & numeri à principio positi inter se primi erunt.

Componantur enim duo numeri inter se primi AB BC. Dico & vtrumque simul, videlicet A C ad vtrumque ipsorum AB BC primum esse. Si enim non sint CA AB inter se primi, metietur eos numerus aliquis. metiatur, & sit D. Quoniam igitur D metitur ipsos CA AB; & reliquum BC metietur. metitur autem & BA. ergo D ipsos AB BC metitur, primos inter se existentes; quod fieri non potest. non igitur CA AB numeros numerus aliquis metietur; ac propterea AB AC inter se primi sunt. ergo CA ad vtrumque ipsorum est primus. Sint rursus CA AB primi inter se. Dico & ipsos AB BC inter se primos esse. Si enim AB BC non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitq; D. & quoniam D metitur vtrumque ipsorum AB BC, & totum CA metietur; metitur autem & AB. ergo D ipsos CA AB metitur, primos inter se existentes, quod fieri non potest. non igitur ipsos AB BC numeros numerus aliquis metietur. ideoq; AB BC inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare.

A ... C

D —

13. com not.

A

11. com not.

B

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo CA ad vtrumque ipsorum est primus] *eodem enim modo demonstrabitur & A C B inter se primos esse.*

B Ideoq; AB BC inter se primi sunt] *idem etiam sequetur si AC CB inter se primi sint. quod eodem modo demonstrabimus.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXI.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

Sit primus numerus A, qui numerum B non metiatur. Dico B A inter se primos

esse, si enim non sint B A inter se primi, metietur eos aliquis nu-
A merus. metiatur, et sit C. ergo C non est vnitas. et quoniam C ip- A.... 3B.....2
sum B metitur, A vero non metitur ipsum B, non erit C idem
B qui A. et quoniam C ipsos B A metitur, et metietur ipsum A pri- C —
mum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest.
non igitur ipsos B A numeros numerus aliquis metietur. quare A B inter se primi sunt. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo C non est vnitas] *si enim eos vnitas sola metiretur, primi essent inter se. quod non ponitur.*

B Et quoniam C ipsos B A metitur, et metietur ipsum A primum existentem, cum
9. com. not. non sit idem, qui A. quod fieri non potest] *omnis enim numerus se ipsum metitur.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXII.

Si duo numeri se se multiplicantes aliquem faciāt, eum vero, qui ex ipsis fit, metiatur aliquis numerus primus; & vnum ipsorum, qui à principio positi sunt, metietur.

Duo enim numeri A B se inuicem multiplicantes faciāt C, ipsum vero C metiatur aliquis numerus primus, qui sit D. Dico D vnū ipsorum A B metiri. ipsum enim A non metiatur; atque est D numerus primus. ergo A D primi inter
ante-cedente. se sunt. et quoties D ipsum C metitur, tot unitates sint in E. Quoniam igitur D metitur ipsum C per eas, quæ sunt in
Com.not.9. E unitates; numerus D ipsum E multiplicans fecit C. sed et A multiplicans B ipsum C fecit. ergo qui fit ex D E æqualis est ei, qui ex AB. est igitur ut D ad A, ita B ad E. et sunt
19 huius. A D primi inter se, primi vero et minimi. sed minimi eos,
23 huius. qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, et mi-
21 huius. nor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem. ergo D ipsum B metitur. similiter demonstrabimus, si D non metiatur B ipsum A metiri. quare D metitur vnum ipsorum A B. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXIII.

Omnem numerum compositum primus aliquis numerus metitur.

Sit compositus numerus A. Dico primum aliquem numerum
Diffi. 13. ipsum A metiri. Quoniam enim compositus numerus est A, me- A.........8
tietur ipsum aliquis numerus. metiatur, et sit B. & si quidem pri-
mus est B, manifestum est, quod quæritur. si vero compositus, ip- B.....4
sum aliquis numerus metietur. metiatur, sitq; C. Et quoniam C C...2
metitur ipsum B, B uero ipsum A, & C ipsum A metitur. & si qui-
12. co. n. dem primus est C, manifestum est quod quæritur. Si vero compositus eum aliquis numerus metitur. & hac consideratione facta, relinquetur tandem aliquis numerus primus, qui præcedentem & ipsum A metietur. si enim nō relinquetur primus,
3 postul. metientur ipsum A infiniti numeri, quorum alter altero est minor. quod in numeris fieri non potest. ergo relinquetur aliquis, qui et præcedentem metietur et ipsum A. omnem igitur numerum compositum primus aliquis numerus metitur. quod demonstrare oportebat.

ALITER

ALITER. Sit compositus numerus A. Dico primum aliquem numerum ipsum A metiri. Quoniam enim A compositus est, metietur ipsum aliquis numerus. & sit B minimus eorum, qui ipsum A metiuntur. Dico B primum esse. si enim non sit primus, compositus erit. ergo eum aliquis numerus metietur. metiatur; sitq; C. erit C minor, quàm B. & quoniam C ipsum B metitur, sed & B ipsum A; & C ipsum A metietur, minor existens ipso B, qui est minimus omnium, qui metiuntur. quod est absurdũ. non igitur B compositus numerus est. ergo est primus. quod demonstrandũ fuit.

A.........9
B...3
C..

THEOREMA. XXXII. PROPOSITIO XXXIIII.

Omnis numerus vel primus est, vel eum primus aliquis numerus metitur.

Sit numerus A. Dico A vel primum esse, vel primum aliquem numerum ipsum A metiri. si quidem igitur primus est A, manifestum est quod quæritur. si vero compositus ipsum aliquis primus numerus metietur. Omnis igitur numerus vel primus est, vel eum primus aliquis numerus metitur. quod demonstrare oportebat.

A...3
A.....6 — Ex antecedente.
...3

PROBLEMA III. PROPOSITIO. XXXV.

Numeris quotcumque datis inuenire minimos eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habeant.

Sint dati quotcũque numeri A B C. oportet inuenire minimos eorum, qui eandem, quam ipsi A B C, proportionem habeãt. vel igitur A B C primi inter se sunt, vel non. si quidem primi, et minimi erunt eandem, quã ipsi proportionem habentium. si vero non primi, sumatur ipsorum A B C maxima communis mensura D, et quoties D vnumquemque ipsorum A B C metitur, tot vnitates sint in vnoquoque horum E F G. et vnusquisque igitur ipsorum E F G vnumquemque ipsorum A B C metitur per eas, quæ sunt in D vnitates. ergo E F G ipsos A B C equaliter metiuntur, ac propterea E F G in eadem sunt proportione, in qua ipsi A B C. Dico cosetiã minimos esse. si enim E F G non sint minimi, eandem, quam ipsi A B C, proportionem habentium, erunt aliqui ipsis E F G minores in eadem proportione, in qua A B C. sint H K L, æqualiter igitur H metitur ipsum A, ac vterque ipsorum K L vtrũque BC metitur. quoties autem H metitur ipsum A, tot vnitates sint in M. et vterque igitur K L vtrumque BC metitur per eas, quæ sunt in M vnitates. et quoniã H ipsum A metitur per vnitates, quæ sunt in M, et M ipsum A per vnitates, quæ sunt in H metietur. Eadem ratione et M vtrumque ipsorũ BC metietur per vnitates, quę sunt in utroque K L. ergo M ipsos A B C metitur. Rursus quoniam H ipsum A metitur per vnitates, quæ sunt in M, H ipsum M multiplicans fecit A. Eadem ratione et E multiplicans D ipsum A fecit. ergo qui ex E D fit ei, qui fit ex HM est æqualis. vt igitur E ad H, ita M ad D maior autem est E, quàm H. ergo et M quàm D est maior, et ipsos ABC metitur. quod fieri nõ potest. ponitur enim D ipsorum A B C maxima communis mensura. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis E F G, in eadem proportione, in qua A B C. ergo E F G minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi A B C proportioné habent. quod oportebat demodstrare.

A.....6
B.....8
C..........10 — 25. huius. 2 huius.
D 2
E 3
F —— 4
G —— 5 — 18. huius.
H ——
K ——
L ——
M —— — 21. huius.

Margin notes: 8. com. not. — 9. com. not. — 19. huius.

Quoniam sepe vsu venit, vt duo minimi numeri in data proportione inueniendi sint, libuit hoc loco sequens problema adnectere.

Numeris quotcũque datis deinceps proportionalibus, inuenire duos minimos, qui eandem, quam ipsi, proportionem habeant.

Sint dati quotcunque numeri deinceps proportionales ABC. oportet inuenire duos minimos numeros, qui eandem, quam ipsi A B C proportionem habeant. Itaque vel A B primi sint inter se, vel non primi: et si quidem primi,
23.huius. *& minimi erunt eorum, qui eandem proportionem habent. si minus, su-*
2.huius. *matur ipsorum AB maxima communis mensura D: & quoties D metitur A, tot vnitates sint in E; quoties vero idem metitur B, tot vnitates sint in F. ergo & E F ipsos A B aequaliter metiuntur. ideoq; E F in eadem sint pro-*
18 huius. *portione, in qua ipsi A B. Dico E F etiam minimos esse. si enim non sint minimi, erunt aliqui numeri minores ipsis E F, qui eandem, quam A B proportionem habeant. sint GH. ergo G aequaliter metitur A, atque H ipsum B. &*
21.huius. *quoties G metitur A, tot vnitates sint in K. quare & H metietur B per eas, quae sint in K vnitates. & ob id K metietur A per vnitates, quae sint in G, metietq; B per vnitates, quae sunt in H. ergo K ipsos A B metitur. & quo-*
8 com. not. *niam G ipsum A metitur per eas, quae sint in K vnitates, G multiplicans K fecit A. Rursus quoniam E metitur A per vnitates, quae sint in D; & E mul-*
19 huius *tiplicans D fecit A. qui igitur fit ex E D est aequalis ei, qui ex GK; ac propterea vt E ad G, ita erit K ad D. est autem E maior, quàm G. ergo & K maior quàm D, & ipsos A B metitur. quod fieri non potest. erat enim D ipsorum AB maxima communis mensura. non igitur sunt aliqui numeri minores ipsis E F, qui eandem, quam ipsi A B proportionem habeant. & quoniam vt A ad B, ita est B ad C, erunt E F minimi numeri in eadem proportione, in qua A B C. Inuenti igitur sunt minimi numeri E F, qui eandem, quam ipsi ABC proportionem habeant. quod facere oportebat.*

A . 4
B . . 6
C . . . 9
D. 2
E 2
F . . . 3
G
H
K

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO XXXVI.

Duobus numeris datis, inuenire quem minimum numerum metiantur.

Sint dati duo numeri A B. oportet inuenire quem minimum numerum metiantur. numeri enim A B uel primi inter se sunt, vel non. sint primum A B inter se
26.huius primi: & A ipsum B multiplicãs faciat C. ergo & B multiplicans A ipsum C fecit. ac propterea numeri A B ipsum C metiuntur. Dico etiam C minimum esse. si enim non ita sit, metientur A B numerum aliquem minorẽ, quàm C. metiantur ipsum D. & quoties A ipsum D metitur, tot vnitates sint in E, quoties autem B metitur D, tot unitates sint in F. ergo A quidem ipsum E multiplicans fecit D, B uero multiplicans F ipsum D fecit. qua-
19 huius. re numerus, qui ex AE fit est ęqualis ei, qui fit ex BF. vt igitur A ad B, ita est F ad E.
23 huius. & sunt A B primi. primi autem & minimi. sed minimi eos, qui eandem habent pro-
21 huius. portionem ęqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. ergo B ipsum E metitur, & consequens consequentem. & quoniam A numeros B E multipli-
18.huius. cans fecit C D, erit vt B ad E, ita C ad D. metitur autem B ipsum E. ergo & C ipsum D metitur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur A B metiuntur aliquem numerum minorem ipso C, quando A B primi inter se fuerint. ergo A B ipsum C minimum existentem metiuntur. Sed non sint A B primi inter se: & sumãtur
19 huius. minimi numeri eandem, quam A B proportionem habentium, qui sint F E. ęqualis igitur est, qui ex A E fit ei, qui ex BF. & A ipsum E multiplicãs faciat C. ergo & B multi-

A 3 B . . 4
C 12
D
E
F

multiplicans F ipsum C fecit. quare A B ipsum C metiũtur. Dico & minimum esse. nisi enim ita sit, metientur A B aliquem numerum minorem, quam C. metiantur ipsum D. & quoties A ipsum D metitur, tot vnitates sint in G. quoties autem B metitur D, tot vnitates sint in H. ergo A quidem ipsum G multiplicans fecit D; B vero multiplicans H ipsũ D fecit. qui igitur ex A G fit est ęqualis ei, qui fit ex B H. vt igitur A ad B, ita H ad G. sed vt A ad B, ita F ad E. ergo & vt F ad E, ita H ad G: & sunt F E minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. quare E ipsum G metitur. & quoniam A numeros E G multiplicans ipsos C D fecit, vt E ad G, ita erit C ad D. Sed E metitur ipsum G. ergo & C ipsum D metitur, maior minorem. quod fieri nõ potest. non igitur metiuntur A B aliquem numerum minorem, quàm C. ergo A B ipsum C minimum existentem metientur. quod demonstrare oportebat.

9. com. not. 19. huius. 21. huius. 18. huius.

F . 2A . . . 4
E . . . 3B 6
C 12
D
G
H

SCHOLIVM.

Minimum dicit, quo minorem duo numeri metiri non possunt. vt est 15. eo enim minorem duo numeri 3, & 5 non metiuntur.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXVII.

Si duo numeri metiantur numerum aliquem, & minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

Duo enim numeri A B numerum aliquem C D metiantur, minimum autem ipsum E. Dico & E ipsum C D metiri. si enim E non metitur C D E, metiens F D relinquat se ipso minorem CF. & quoniam A B ipsum E metiuntur, E vero ipsum DF: & A B metientur D F. sed & metiuntur totum CD. ergo & reliquum C F minorem ipso E metientur. quod fieri non potest. non igitur E ipsum CD non metitur. quare ipsum metiatur necesse est. quod demonstrare oportebat.

11. com. not. 13 com. not.

A . . 2
B . . . 3
E 6
C —— F —— D

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXXVIII.

Tribus numeris datis inuenire quem minimum numerum metiantur.

Sint dati numeri A B C. oportet inuenire quem minimum metiantur numerum. sumatur enim D, quem minimum duo A B metiuntur. itaque C vel metitur D, vel non metitur. metiatur primum. sed & A B metiuntur ipsum D. ergo A B C ipsum D metientur. Dico & minimum. si enim non, metientur A B C quendam numerum minorem ipso D, metiantur E. Quoniam igitur A B C metiuntur ipsum E, & A B ipsum E metiuntur. ergo & minimus, quem metiuntur A B ipsum E metietur. minimus autem, quem metiuntur A B, est D. quare D metitur ipsum E, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur A B C metiuntur aliquem numerum ipso D minorem. ergo A B C minimum D metiuntur. non metiatur autem C ipsum D: & sumatur minimus

Ex antecedente. 36. huius.

12 6 4 3
A B C D E

nimus numerus E, quẽ C D metiuntur. Itaque quõ A B metiuntur ipsum D, D vero ipsum E, & A B ipsũ E metientur. (11. ex not.) metitur aũt & C ipsum E. ergo A B C ipsum E metiuntur. Dico & minimum. si enim non, metientur A B C numerum minorem ipso E. metiantur F. & quoniam A B C metiuntur F, & A B ipsum F metientur. ergo & minimus, quem A B metiuntur, metietur ipsum F: (Ex antecedente.) minimus autem, quem A B metiuntur, est D. quare D ipsum F metitur, & metitur C ipsum F. ergo D C ipsum F metientur; ac propterea minimus, quem metiuntur D C, metietur & F. sed minimus, quem metiuntur D C, est E ergo E ipsum F metitur, maior minorẽ quod fieri non potest. non igitur A B C metiuntur aliquẽ numerum minorem ipso E. ergo numerum E minimum existentem ipsi A B C metiuntur. quod demonstrare oportebat.

A 2, B 3, C 4, D 6, E 12, F

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO. XXXIX.

Si numerum numerus aliquis metiatur, mensus partem habebit à metiente denominatam.

Numerum enim A numerus aliquis B metiatur. Dico A partem habere ab ipso B denominatam. quoties enim B ipsum A metitur, tot vnitates sint in C. Quoniam igitur B metitur ipsum A per eas, quę sunt in C, vnitates; metitur autem & D unitas ipsorum C per vnitates, quæ in ipso sunt: & D vnitas ipsum C numerum æqualiter metietur, atque B ipsum A. (15 huius.) quare permutando unitas D ipsum B numerum ęqualiter metietur, atque C ipsum A. quæ igitur pars est unitas D ipsius B numeri, eadem est pars & C ipsius A. (3. com. not.) sed unitas D ipsius B numeri pars est ab eo denominata. ergo & C ipsius A pars est denominata ab ipso B. quare A partem habet C ab ipso B denominatam. quod ostendere oportebat.

A 12, B 3, C 4, D 1

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO. XL.

Si numerus partem quamcumque habeat, eum numerus à parte denominatus metietur.

Numerus enim A partem habeat quamcumque B; & ab ipso B denominatus sit numerus C. Dico C ipsum A metiri. Quoniam enim B ipsius A pars est denominata ab ipso C. (5. com. not.) est autem & D vnitas ipsius C numeri pars ab eo denominata. quæ igitur pars est vnitas D ipsius C numeri, eadem pars est & B ipsius A. ergo vnitas D æqualiter metitur ipsum B numerum, atque B ipsum A. (15. huius.) & permutando unitas D ipsum B numerum æqualiter metitur, atque C ipsum A. ergo C ipsum A metitur. quod oportebat demonstrare.

A 12, B 2, C 6, D 1

PROBLEMA. VI. PROPOSITIO XLI.

Numerum inuenire, qui minimus existens datas partes habeat.

Sint

Sint datæ partes A B C. oportet numerum inuenire, qui cum minimus sit, habeat partes A B C. sint ab ipsis A B C partibus denominati numeri D E F. & sumatur minimus numerus G, quem ipsi D E F metiuntur. Quoniam igitur D E F metiuntur ipsum G, habebit G partes ab ipsis D E F denominatas: partes autem denominatæ ab ipsis D E F sunt A B C. ergo G partes A B C habet. Dico & minimum esse. si enim G non existens minimus partes habet A B C, erit numerus aliquis minor ipso G, qui easdem partes habeat. sit H. Quoniam igitur H partes habet A B C, eum metientur numeri ab ipsis A B C partibus denominati, sunt autem hi numeri D E F. ergo D E F ipsum H metietur; atque est H minor ipso G. quod fieri non potest. non igitur erit aliquis numerus minor ipso H, qui partes A B C habeat. quod oportuit demonstrare.

38 huius.

39. huius.

A $\frac{1}{2}$ D..2

B $\frac{1}{3}$ E...3

C $\frac{1}{4}$ F....4

G............12

H ———

SEPTIMI LIBERI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER OCTAVVS
CVM COMMENTARIIS,
Federici Commandini Vrbinatis.



THEOREMA I. PROPOSITIO. I.



I sint quotcumque numeri deinceps proportionales, quorum extremi sint inter se primi; minimi erunt omnium qui eandem, quam ipsi proportionem habent.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D, quorũ extremi A D primi inter se sint. Dico A B C D minimos esse omnium, qui eandem, quam ipsi proportionem habent. si enim non, sint minores ipsis A B C D numeri E F G H, & in eadem proportione. Et quoniam A B C D sunt in eadem proportione, in qua E F G H; atque est ipsorũ A B C D multitudo æqualis multitudini ipsorum E F G H: erit ex æquali ut A ad D, ita E ad H: et sunt A D primi; primi autem, & minimi numeri æqualiter metiuntur eos, qui eandem proportionem habent, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo A ipsum E metitur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur E F G H minores ipsis A B C D existentes in eadẽ sunt, in qua ipsi, proportione; ac propterea A B C D minimi sunt omnium, qui eandẽ, quam ipsi proportionem habent. quod demonstrare oportebat.

14. septimi.

21. septimi.

A 8
B 12
C 18
D 27
E
F
G
H

PROBLEMA I. PROPOSITIO. II.

Numeros inuenire deinceps proportionales minimos, quotcumque quis imperauerit in data proportione.

Sit data proportio in minimis numeris, quam habet A ad B. oportet numeros inuenire deinceps proportionales minimos quotcumque quis imperauerit in proportione A ad B. imperentur quattuor: et A se ipsum multiplicans faciat C, multiplicans vero B faciat D, et B se ipsum multiplicans faciat E, & adhuc A multiplicans C D E ipsos F G H faciat, B vero multiplicans E faciat K. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit C, multiplicãs vero B ipsum D fecit; numerus A duos numeros A B multiplicans fecit C D. est igitur ut A ad B, ita C ad D. rursus quoniam

17. septimi.

niam A ipsum B multiplicans fecit D, & B seipsũ multiplicans fecit E; vterque ipsorum A B multiplicans B vtrumque ipsorum D E fecit. vt igitur A ad B, ita D ad E. sed vt A ad B, ita C ad D. ergo & vt C ad D, ita D ad E. Et quoniam A numeros CD multiplicans ipsos F G fecit, ut C ad D, ita erit F ad G. vt autem C ad D, ita erat A ad B. & ut igitur A ad B, ita F ad G. rursus quoniam A numeros D E multiplicans fecit GH, erit vt D ad E, ita G ad H. sed vt D ad E, ita A ad B. ergo & vt A ad B, ita G ad H. quòd cum A B ipsum E multiplicantes faciant HK, erit vt A ad B, ita H ad K. ostensum autem est & ut A ad B, ita esse & F ad G, et G ad H. ergo & ut F ad G, ita G ad H, & H ad K. numeri igitur C D E, & F G H K proportionales sunt in proportione, quã habet A ad B. Dico ẽt minimos esse. Quoniam enim A B minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent; minimi vero, & primi sunt inter se: erunt ipsi A B inter se primi. et vterque quidem ipsorum A B seipsum multiplicans vtrumque C E fecit; vterque vero C E multiplicans fecit vtrumque F K. ergo C E, & F K primi inter se sunt. si autem sint quotcumque numeri deinceps proportionales, & eorum extremi sint inter se primi; minimi erunt omnium eandem, quam ipsi proportionem habentium. ergo C D E, & F G H K minimi sunt omnium, qui eandem quam A B proportionẽ habẽt. quod oportebat demonstrare.

18. septimi. 18. septimi. 23. septimi. 29. septimi. Ex antecedente.

A .2
B .. 3
C ... 4
D 6
E 9
F 8
G 12
H 18
K —— 27

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est si tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint, eandem, quam ipsi proportionem habentium; extremos eorũ quadratos esse: si vero quattuor esse cubos.

A 8
B 12
C 18
D —— 27

THEOREMA II.
PROPOSITIO. III.

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, minimi omniũ, qui eãdem, quam ipsi proportionem habent; eorum extremi primi inter se erunt.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D minimi omnium qui eandem, quã ipsi, proportionem habent. Dico eorum extremos A D inter se primos esse. sumãtur enim duo numeri minimi in proportione ipsorum ABCD, qui sint E F, tres vero GHK, & semper deinceps vno plures, quoad assumpta multitudo æqualis fuerit multitudini ipsorum ABCD. sumantur, & sint LMNX. extremi igitur ipsorum LX primi in-

E .2
F .. 3
G ... 4
H 6
K 9
L 8
M 12
N 18
O —— 27

Ex antecedente. 29 septi.

ter se sunt. Quoniam enim EF primi sunt, & vterque ipsorum se ipsum multiplicās vtrumque GK fecit; vtrumque vero GK multiplicans fecit vtrumque LX erunt & GK, & LX primi. & quoniam ABCD minimi sunt eorum, qui eandem, quam ipsi, proportionem habent, sunt autem & LMNX minimi in eadē proportione, in qua ABCD; estq́; ipsorum ABCD multitudo æqualis multitudini ipsorum LMNX: erit vnusquisque ipsorum ABCD vnicuique ipsorum LMNX æqualis. Ergo A quidem est ęqualis L, B vero ipsi M, C ipsi N, & D ipsi X. quòd cum LX primi sint inter se, & L ipsi A æqualis, & X ipsi D, & AD inter se primi erūt. quod oportebat demōstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

* Sumātur enim duo minimi numeri in proportione ipsorum ABCD] *ex eo, quod ad 35 huius addidimus.*

PROBLEMA II. PROPOSITIO. IIII.

Proportionibus datis quotcumque in minimis numeris, numeros inuenire deinceps minimos in datis proportionibus.

Sint datæ proportiones in minimis numeris, videlicet proportio A ad B, & proportio C ad D, & E ad F. oportet numeros inuenire deinceps minimos in proportione A ad B, & in proportione C ad D; & adhuc in proportione E ad F. Sumatur enim minimus numerus,
38. septimi. quem BC metiuntur; sitq́; G. & quoties B metitur G, toties A ipsum H metiatur, quoties vero C ipsum G metitur, toties & D metiatur K; itaque E ipsum K vel metitur, vel non metitur. metiatur primum. & quoties E metitur K, toties F ipsum L metiatur. & quoniam A æqualiter metitur H, atque B ipsum G, erit vt A ad B, ita H ad
17. septimi. G. Eadem ratione & vt C ad D, ita G ad K, & adhuc vt E ad F, ita K ad L. ergo HGKL deinceps proportionales sunt in proportione A ad B, & in proportione C ad D, & adhuc in proportione E ad F. Dico etiam minimos esse. Si enim non sint HGKL deinceps minimi in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F; erunt aliqui numeri minores ipsis HGKL deinceps minimi in eisdem proportionibus. sint N X M O. & quoniam est vt A ad B, ita N ad X; & sunt A B minimi; minimi autem eos, qui
21 septimi. eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem, hoc est antecedens antecedētem, & consequēs
A consequentem: metietur B ipsum X. Eadem ratione & C ipsum X metietur. quare B C metiuntur X, ac propterea minimus, quem metiuntur B C, ipsum X me-
37 septimi. tietur. minimus autem, quem metiuntur B C, est G. ergo G metietur X, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis H G K L deinceps minimi in proportione A ad B, C ad D, & E ad F. Sed non metiatur E ipsum K; & sumatur minimus numerus, quem ipsi E K metiuntur;
36 septimi. sitq́, M. quoties autem K metitur M, toties & vterque ipsorum HG vtrumque N X metiatur: & quoties E metitur M, toties & F metiatur O. Quoniam igitur H ipsum
7. septimi. N æqualiter metitur, atque G ipsum X; erit vt H ad G, ita N ad X. vt autem H ad G, ita A ad B. & vt igitur A ad B, ita N ad X. Eadem ratione & vt C ad D, ita X ad M. rursus quoniā E ipsum M æqualiter metitur, atque F ipsum O; erit vt E ad F, ita M ad O. quare NXMO deinceps proportionales sunt in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F. Dico minimos quoque esse. Si enim non sint NXMO deinceps minimi

A...3 B...4
C. 2 D...3
E....4 F.....5
H......6
G.......8
K.......... 12
L...............15
N
X
M
O

in

in proportionibus A ab B, C ad D, & E ad F, erũt aliqui numeri minores ipsis NX MO deinceps minimi in eisdem proportionibus. sint PRST. & cum sit vt P ad R, ita A ad B, sintq; AB minimi, minimi vero eos, qui eãdẽ habẽt proportionẽ, ęqualiter metiũtur, antecedẽs antecedẽtẽ, & cõsequẽs cõsequẽtẽ: numerus B ipsũ R metietur 21. septimi.

Eadem ratione & C metietur ipsũ R. ergo B C ipsum R metiuntur: & ob id minimus, quem metiũtur B C, ipsum R metietur. minimus aũt, quẽ metiũtur B C, est G. ergo G metitur ipsum R. atque est vt G ad R, ita K ad S. quare & K ipsum S metitur: metitur autem & E ipsum S; ideoq; E K ipsum S metiuntur. & minimus igitur, quem metiuntur E K, metietur ipsum S. Sed minimus, quem metiũtur E K, est M. ergo M ipsum S metietur, maior minorem. quòd fieri non potest. non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis N X M O deinceps minimi in proportionibus A ad B, C ad D, & E ad F. ergo N X M O deinceps minimi sunt in eisdem proportionibus. quod demonstrare oportebat. B 37. septimi. C

A ... 4 B 5
C 2 D . 3
E 4 F .. 3
H 8
G 10
K 15
N ——— 30
X ——— 40
M ——— 60
O ——— 45
P ———
R ———
S ———
T ———

F. C. COMMENTARIVS.

Eadem ratione & C ipsum X metitur.] *Quoniam enim est vt C ad D, ita X ad M; & sint C D minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, aequaliter metiuntur: numerus C ipsum X metietur.* A

Eadem ratione & C metietur ipsum R] *est enim vt C ad D, ita R ad S: suntq; C D minimi. ergo ob iam dictam caussam C ipsum R metietur.* B

Atque ut G ad R, ita K ad S] *est enim vt G ad K, ita R ad S. quare permutando vt G ad R, ita K ad S.* C

THEOREMA III. PROPOSITIO V.

Plani numeri inter se proportionẽ habẽt ex lateribus cõpositã.

Sint plani numeri A B, et ipsius quidem A latera sint CD numeri, ipsius vero B latera sint E F. Dico A ad B proportionẽ habere ex lateribus cõpositã. proportionibus enim datis, videlicet quã hẽt C ad E, & quã D ad F, sumãtur numeri deinceps minimi GHK in proportionibus C ad E, & D ad F, sitq; vt C ad E ita G ad H. vt aũt D ad F, ita H ad K. ergo GHK inter se proportiones habẽt laterũ. Sed proportio G ad K composita est ex proportione G ad H, et proportione H ad K. quare G ad K proportionem habet ex lateribus compositam. Dico igitur vt A ad B, ita esse G ad K; numerus enim D ipsum E multiplicans faciat L. & quoniam D multiplicans C ipsum A fecit, multiplicans vero E fecit L: erit vt C ad Ex antecedente.

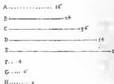
A 6
L 12
B ——— 20
C 2
D . 3
E .. 4
F 5
G ——— 24
H ——— 48
K ——— 80

E, ita

E, ita A ad L. ut antem C ad E, ita G ad H. ergo & vt G ad H, ita A ad L. rursus quoniam E ipsum quidem D multiplicans fecit L, multiplicans vero F ipsum B fecit; vt D ad F, ita erit L ad B. sed vt D ad F, ita est H ad K. & ut igitur H ad K, ita L ad B. Ostensum autem est & vt G ad H, ita A ad L. quare ex æquali ut G ad K, ita A ad B. Sed G ad K proportionem habet compositam ex lateribus. ergo & A ad B proportionem habebit ex lateribus compositam. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO VI.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius aliquis ullum metietur.



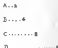
Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D E, & A ipsum B non metiatur. Dico neque alium aliquem ullum metiri. At vero numeros A B C D E deinceps sese nõ metiri, perspicuum est, neque enim A ipsum B metitur. Dico neque alium alium aliquem vllum metiri. Dico enim A non metiri ipsum C. nam quot sunt A B C, tot sumantur minimi numeri eandem, quam ipsi A B C proportionem habentes. & sint F G H. Quoniam igitur F G H in eadem sunt proportione, in qua A B C, atque est ipsorum A B C multitudo æqualis multitudini ipsorum F G H; erit ex æquali vt A ad C, ita F ad H. & quoniam est vt A ad B, ita F ad G, non metitur autem A ipsum B; neque F ipsum G metietur. non igitur F vnitas est; vnitas enim omnem numerum metitur. & sunt F H primi inter se. ergo neque F metitur ipsum H. atque est vt F ad H, ita A ad C. neq; igitur A ipsum C metietur. similiter demonstrabimus neque alium aliquem vllum metiri. quod demonstrare oportebat.

9 huius,

THEOREMA V. PROPOSITIO VII.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, primus autem metiatur extremum; & secundum metietur.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales ABCD, & A ipsum D metiatur. Dico A ipsum quoque B metiri. si enim A non metitur ipsum B, neque alius aliquis vllum metietur. quod est absurdũ. ponitur enim A ipsum D metiri. metitur autem A ipsum D. ergo & A ipsum B metietur. quod demonstrasse oportuit.



THEOREMA VI. PROPOSITIO. VIII.

Si inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter alius eandem, quam ipsi, proportionem habentes, cadent.

Inter

Inter duos enim numeros A B cadant numeri C D deinceps proportionales; & fiat vt A ad B, ita E ad F. Dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter A B, totidem & inter E F deinceps proportionales cadere. quot enim numeri sunt A C D B, totidem sumantur minimi numeri eandem, quam ipsi A C D B proportionem habentium G H K L. ergo extremi ipsorum G L primi inter se sunt. & quoniam A C D B ad ipsos G H K L in eadem sunt proportione; atque est ipsorum A C D B multitudo æqualis multitudini ipsorum G H K L; erit ex æquali vt A ad B, ita G ad L. vt autem A ad B, ita E ad F. & vt igitur G ad L, ita E ad F; & sunt G L primi. sed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem proportionem habent, ęqualiter metiuntur, maior maiorem, & minor minorem. ergo G ęqualiter metitur ipsum E, atque L ipsum F. quoties autem G metitur ipsum E, toties & vterque ipsorum H K vtrumque M N metiatur. numeri igitur G H K L ipsos E M N F æqualiter metiuntur. ideoq; G H K L in eadem sunt proportione, in qua ipsi E M N F. at G H K L similiter in eadem sunt proportione, in qua A C D B. ergo A C D B in eadem proportione erunt, in qua E M N F. Sed A C D B sunt deinceps proportionales. ergo & E M N F deinceps proportionales erunt. quot igitur deinceps proportionales cadunt inter A B, totidē deinceps ptoportinnales & inter E F cadent. quod demonstrare opurtebat.

A . . 2
C 4
D 8
B 16
G . 1
H . . 2
K 4
L 8
E . . 3
M 6
N 12
F 24

35. septimi.
3. huius.
14. septimi.
23. septimi.
21. septimi.
18. septimi.

THEOREMA VII. PROPOSITIO IX.

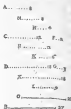
Si duo numeri inter se primi fuerint, & inter ipsos numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter ipsos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter vtrumque ipsorum, & vnitatem deinceps proportionales cadent.

Sint duo numeri inter se primi A B: & inter ipsos deinceps proportionales cadant C D; exponaturq; vnitas E. Dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter ipsos A B, totidem & inter vtrumque ipsorum A B, & vnitatem E numeros deinceps proportionales cadere. sumantur enim duo quidem numeri minimi F G in eadem proportione, in qua sunt A C D B, tres vero H K L, & semper deinceps vno plures, quo ad fiat ipsorum multitudo æqualis multitudini ipsorum A C D B. sumantur, & sint M N X O. itaque manifestum est F se ipsum quidem multiplicantem fecisse H, multiplicantem vero H fecisse M. & G se ipsum quidē multiplicantem fecisse L, multiplicantem vero L fecisse O. & quoniam M N X O minimi sunt qui eādem, quam ipsi F G proportionem habent; sunt autem & A C D B minimi eandem, quam F G proportionem habentium; atque est ipsorum M N X O multitudo ęqualis multitudini ipsorum A C D B: erit vnusquisque ipsorum M N X O vnicuique ipsorum A C D B æqualis. æqualis igitur est M ipsi A, & O ipsi B. & quoniā F se ipsum multiplicans fecit H, metitur F ipsum H per vnitates, quę sunt in F. 10. com. not.

A 8
M 8
H 4
A
C 12
F . . 2
N 12
2. huius.
K 6
D 18
G . . 3.
X 18
L 9
O ——— 27
B ——— 27

metitur

6.com not. metitur autem & E vnitas numerum F per vnitates, quæ in ipso sunt. ergo E vnitas numerum F æqualiter metitur, atque F ipsum H. Conuers. 20 diffi. est igitur vt E vnitas ad numerum F, ita F ad H. rursus quoniam F multiplicans H fecit M, metitur H ipsum M per vnitates, quæ sunt in F; metitur autem & E vnitas numerum F per vnitates, quę in ipso sunt. æqualiter igitur E vnitas numerum F metitur, atque H ipsum M. ergo Conuers. 20 diffi. vt E vnitas ad numerum F, ita H ad M. ostensum est autem & ut E unitas ad numerum F, ita esse F ad H. & ut igitur E unitas ad numerum F, ita F ad H, & H ad M. sed M est ęqualis ipsi A. quare vt B E unitas ad numerum F, ita F ad H, & H ad M. Eadem ratione & ut E unitas ad numerum G, ita G ad L, & L ad B. quot igitur numeri deinceps proportionales cadunt inter A B, totidem & inter utrumque ipsorum A B, & vnitatem E numeri deinceps proportionales cadent, quod oportebat demonstrare.



F. C. COMMENTARIVS.

A Sumantur enim duo minimi numeri F G in eadem proportione, in qua sunt A C D B] *ex problemate, quod nos ad 35 septimi conscripsimus.*

B Eadem ratione, & vt E unitas ad numerum G, ita G ad L, et L ad B] *quoniam enim G se ipsum multiplicans fecit L, metitur G ipsum L per vnitates, quae sunt in ipso G. metitur autem & E vnitas ipsum G per vnitates, quae in ipso sunt. ergo E vnitas aequaliter metitur numerum G, atque G ipsum L. quare vt E vnitas ad numerum G, ita G ad L. rursus quoniam G multiplicans L fecit O, numerus L ipsum O metietur per vnitates, quae sunt in G. sed E vnitas metitur ipsum G per vnitates, quae in ipso sunt. aequaliter igitur E vnitas metitur G, atque L ipsum O. ergo vt E vnitas ad G, ita est L ad O. vt autem E vnitas ad G, ita erat G ad L. vt igitur E vnitas ad G, ita G ad L, & L ad O, hoc est ad B, qui ipsi O est aequalis. quod oportebat demonstrare.*

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. X.

Si inter duos numeros, & vnitatem deinceps proportionales numeri ceciderint, quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem cadunt numeri deinceps proportionales; totidem & inter ipsos numeri deinceps proportionales cadent.



Inter duos enim numeros A B, & vnitatem C numeri deinceps proportionales cadant D E, & FG. Dico quot inter vtrumque ipsorum A B, & vnitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter ipsos A B numeros deinceps proportionales cadere. numerus enim D ipsum F multiplicans faciat H: vterque autem ipsorum D F ipsum H multiplicans faciat vtrumque 20 diffi. K L. & quoniam est ut C vnitas ad numerum D, ita D ad E, vnitas C ipsum D numerum

rum æqualiter metietur, atque D ipsum E. Sed unitas C numerum D metitur per 6. com. not.
vnitates, quæ sunt in D. ergo & numerus D ipsum E per vnitates, quæ sunt in D me
titur: ac propterea numerus D seipsum multiplicans fecit E. rursus quoniam vt vni 9. com. not.
tas C ad D numerum, ita est E ad A; vnitas C ipsum D numerum æqualiter meti- 20 diffi.
tur, atque E ipsum A. sed vnitas C ipsum D numerum metitur per vnitates, quæ
sunt in D. quare et E ipsum A per unitates, quæ sunt in D metietur: ideoq; D ipsū 9. com. not.
E multiplicans fecit A. Eadem ratione & F se ipsum multiplicans fecit G, multipli
cans vero G ipsum B fecit. et quoniam D se ipsum multiplicans fecit E, multipli-
cans vero F fecit H; erit vt D ad F, ita E ad H. & ob eandem caussam ut D ad F, ita 17. septimi.
H ad G. vt igitur E ad H, ita H ad G. rursus quoniam D vtrumque ipsorum E H
multiplicans fecit vtrumque A K, erit ut E ad H, ita A ad K. sed vt E ad H, ita D 17. septimi.
ad F. & ut igitur D ad F, ita A ad K. Rursus quoniam vterque D F ipsum H multi-
plicans vtrumque K L fecit, vt D ad F, ita est K ad L. vt autem D ad F, ita erat A 18 septimi.
ad K. & ut igitur A ad K, ita K ad L. præterea cum F vtrumque H G multiplicans
vtrumque L B faciat, erit vt H ad G, ita L ad B. sed vt H ad G, ita D ab F. ergo & 17. septimi.
vt D ad F, ita L ad B. ostensum autem est & vt D ad F, ita & A ad K, & K ad L, & L
ad B. quare A K L B numeri deinceps proportionales sunt. quot igitur inter vtrū-
que ipsorum A B, & vnitatem C cadunt numeri deinceps proportionales, totidem
& inter A B numeri deinceps proportionales cadent. quod demōstrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. XI.

Inter duos numeros quadratos vnus medius proportionalis cadit: et quadratus ad quadratum duplam proportionē habet eius, quam latus habet latus.

Sint quadrati numeri A B; et ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico inter ipsos A B vnum medium proportionalem cadere, et A ad B duplam proportionem habere eius, quam habet C ad D. numerus enim C multiplicans D faciat E. et quoniam A numerus quadratus est, cuius latus C; numerus C seipsum multiplicans fecit A. eadem ratione et D se ipsum multiplicans fecit B. Quoniam igitur C utrumque ipsorum C D multiplicans vtrumque A E fecit, vt C ad D, ita erit A ad E. Rursus quoniam C multiplicans D ipsum E fecit, et D se ipsum multiplicans fecit B; duo numeri C D vnum, & eundem numerum D multiplicantes ipsos E B fecerunt. est igitur vt C ad D, ita E ad B. sed ut C ad D, ita erat A ad E. ergo et vt A ad E, ita E ad B. inter numeros igitur A B vnus medius proportionalis E cadit. Dico et A ad B duplam habere proportionem eius, quam habet C ad D. Quoniam enim tres numeri proportionales sunt A E B, habebit A ad B duplam proportionem eius, quā habet A ad E. vt autem A ad E, ita C ad D. ergo A ad B duplam proportionem habet eius, quam C latus habet ad latus D. quod oportebat demonstrare.

A....4
C..2
E......6
D...3
B.........9

18 diffin. 17 septimi. 18. septimi. Diffi 13.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XII.

Inter duos numeros cubos duo medij proportionales cadunt, et cubus ad cubum triplam habet proportionem eius, quam latus habet ad latus.

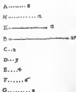
Sint numeri cubi A B; & ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico inter ipsos A B duos medios proportionales cadere, et numerum A ad B triplam habere proportionem eius, quam C habet ad D. numerus enim C se ipsum multiplicans faciat E; multiplicans vero D ipsum F faciat, et D se ipsum multiplicans fa

ciat G: et vterq; ipsorum C D multiplicās F vtrumque H K faciat. Quoniam igitur cubus est A, & eius latus C, numerus C se ipsum multiplicans fecit E, multiplicans vero E ipsum A fecit. similiter & D se ipsum multiplicans fecit G; multiplicans vero G fecit ipsum B. & quoniam C vtrūque ipsorum C D multiplicans vtrumque E F fecit, vt C ad D, ita est E ad F. eadem ratione & ut C ad D, ita F ad G. Rursus quoniam C vtrumque ipsorum E F multiplicans fecit vtrumque A H, erit vt E ad F, ita A ad H. ut autem E ad F, ita C ad D. et vt igitur C ad D, ita A ad H. Rursus quoniam vterque ipsorum C D multiplicans F vtrumque H K fecit, vt C ad D, ita erit H ad K. rursus quoniam D vtrumque F G multiplicans fecit vtrumque K B, erit vt F ad G, ita K ad B. ut autem F ad G, ita C ad D. & ut igitur C ad D, ita K ad B. ostensum autem est vt C ad D, ita esse A ad H, & H ad K. ergo vt A ad H, ita H ad K, & K ad B: ac propterea inter ipsos A B duo H K medij proportionales cadunt. Dico & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet C ad D. Quoniam enim quattuor numeri proportionales sunt A H K B, habebit A ad B triplam proportionem eius, quā habet A ad H. vt autem A ad H, ita C ad D. ergo A ad B triplam habet proportionem eius, quam C habet ad D. quod demonstrare oportebat.

17. septimi.

18. septimi.

23 diffin.



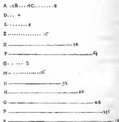
THEOREMA XI. PROPOSITIO. XIII.

Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales, & vnusquisque se ipsum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipsis proportionales erunt. et si positi à principio numeri factos multiplicantes alios faciant, et ipsi proportionales erunt. et semper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcumque numeri proportionales A B C; sitq; ut A ad B, ita B ad C. & ipsi A B C se ipsos multiplicantes faciant D E F: ipsos uero D E F multiplicantes faciant G H K. Dico nnmeros DEF & G H K deinceps proportionales esse. numerus enim A ipsum B multiplicans faciat L; vterque autem ipsorum A B multiplicans L faciat vtrumque M N. et rursus B quidem multiplicans C ipsum X faciat; vterque vero ipsorum B C multiplicans X faciat vtrumque O P.

A similiter ijs, quę dicta sunt, ostendemus D L E, & G M N H deinceps proportionales esse in proportione, quæ

B est A ad B: & adhuc E X F, & H O P K deinceps esse proportionales in proportione B ad C. atque est vt A ad B, ita B ad C. ergo & D L E in eadem sunt proportione, in qua E X F: & præterea G M N H in eadem proportione, in qua H O P K. estq; ipsorum quidem D L E multitudo



multitudo multitudini ipsorum E X F æqualis. multitudo autē ipsorum G M N H æqualis multitudini ipsorum H O P K. ex æquali igitur vt D ad E, ita E ad F. vt autem G ad H, ita H ad K. quod demonstrare oportebat. 14. septimi.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter ijs, quæ dicta sunt, ostendemus D L E, & G M N H deinceps proportionales esse in proportione, quæ est A ad B] *quoniam enim A duos numeros A B multiplicans fecit D, erit vt A ad B, ita D ad L. rursus quoniam B duos numeros A B multiplicans ipsos L E fecit, vt A ad B, ita erit L ad E. sed vt A ad B, ita est D ad L. vt igitur A ad B, ita est D ad L, & L ad E. quare sequitur D L E deinceps proportionales esse in eadem proportione, in qua est A ad B. & quoniam A duos numeros D L multiplicans fecit ipsos G M, erit vt D ad L, hoc est vt A ad B, ita G ad M rursus, quoniam duo numeri A B multiplicantes L ipsos M N fecerunt, vt A ad B, ita erit M ad N. Præterea cū B duos numeros L E multiplicans faciat N H, erit vt L ad E, vi delicet vt A ad B, ita N ad H. Sed vt A ad B, ita erat G ad M, & M ad N. vt igitur G ad M, ita M ad N, & N ad H. ergo C M N H deinceps proportionales sunt in eadē proportione, in qua est A ad B.* A 17. septimi. 18. septimi.

Et adhuc E X F, & H O P K deinceps esse proportionales in proportione B ad C] *hoc eodem, quo supra, modo ostendemus. numerus enim B duos numeros B C multiplicans fecit ipsos N X, & numerus C duos numeros B C multiplicans ipsos X F fecit. ergo vt B ad C, ita est E ad X, & X ad F. Præterea B duos numeros E X multiplicans fecit H O: & duo numeri B C multiplicantes X fecerunt ipsos O P. rursus C duos numeros X F multiplicans ipsos P K fecit. quare vt E ad X, hoc est vt C ad B, ita H ad O: & rursus vt C ad B, ita O ad P. præterea vt X ad F, hoc est vt B ad C, ita est P ad K vt igitur B ad C, ita H ad O, & O ad P, & P ad K. ex quibus constat E X F, & H O P K deinceps proportionales esse in ea proportione, in qua est B ad C.* B C

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

Si numerus quadratus metiatur quadratum numerum, & latus latus metietur; & si latus metiatur latus, & quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A B quorum latera C D, & A ipsum B metiatur. Dico & latus C ipsum D metiri. numerus enim C multiplicans D ipsum E faciat. ergo A E B deinceps proportionales sunt in proportione, quæ est C ad D. Quoniam igitur A E B deinceps sunt proportionales, metitur A ipsum B; & A ipsum E metietur. atque est vt A ad E, ita C ad D. ergo & C metitur ipsum D. sed C metiatur ipsum D. Dico & A ipsum B metiri. Iisdem enim constructis similiter ostendemus A E B deinceps proportionales esse in proportione C ad D. & quoniam est vt C ad D, ita A ad E, metitur autem C ipsum D, & A ipsum E metietur. & sunt A E B deinceps proportionales, metitur igitur & A ipsum B, si igitur numerus quadratus. & reliqua. quod oportebat demonstrare. Ex demonstratis in 2 huius. 7 huius.

A 4
E 8
B 16
C 2
D 4

F. C. COMMENTARIVS.

Metitur igitur & A ipsum B] *quoniam enim A E B deinceps proportionales sunt; metitur A ipsum E; & E ipsum B metietur. quare A ipsum B metiatur necesse est ex duodecima communi notione.* 20 diffi.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XV.

Si numerus cubus metiatur cubum numerum, & latus latus metietur

tietur: & si latus metiatur latus,& cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B metiatur: & ipsius quidem A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico C ipsum D metiri. numerus enim C se ipsum multiplicans faciat E, & multiplicãs D faciat F: D vero se ipsum multiplicãs faciat G, & vterque ipsorum C D multiplicans F vtrumque H K faciat. manifestum est E F G, & AHKB deinceps proportionales esse in proportione, quę est C ad D. & quoniã A H K B deinceps proportionales sunt, metiturq; A ipsum B; A ipsum H metietur. est aũt vt A ad H, ita C ad D. ergo C ipsũ D metietur. sed C metiatur D. Dico & A ipsum B metiri. ijsdẽ enim cõstructis similiter ostẽdemus A HKB deinceps proportionales esse in proportione C ad D. & quoniã C ipsum D metitur, estq; vt C ad D, ita A ad H; & A metitur ipsum H. quare & ipsum B metietur. quod demonstrare oportebat.

A........8
H.................16
E.........32
B.........64
C..2
D....4
E....4
F........8
G.................16

(margin: A; 7.huius.)

F. C. COMMENTARIVS.

A Manifestum est E F G, & A H K B deinceps proportionales esse in proportione, quæ est C ad D] *hoc similiter vt in 13 demonstrabimus.*

B Et A metitur ipsum H. quare & ipsum B metietur] *quoniam enim est vt A ad H, ita H ad K, metiturq; A ipsum H; & H metietur ipsum K. quare & A ipsum K metietur. rursus quoniam vt A ad H, ita est K ad B, & K ipsum B metietur. ergo & A ipsum B metiatur necesse est.*

(margin: 20.diff. 11. m.net.)

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XVI.

Si numerus quadratus non metiatur quadratum numerum, neque latus latus metietur: & si latus non metiatur latus, neque quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A B, quorum latera C D. & A non metiatur ipsum B. Dico neque C ipsum D metiri. si enim metitur C ipsum D, & A ipsum B metietur. nõ metitur autem A ipsum B. non igitur C ipsum D metietur. sed C non metiatur D. Dico neque A ipsum B metiri. Si enim A metitur ipsum B, & C ipsum D metietur: atqui C nõ metitur D. neque igitur A ipsum B metietur. quod demonstrare oportebat.

(margin: 14.huius.)

A.........9
B.................16
C...3
D...4

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVII.

Si numerus cubus non metiatur cubum numerum, neque latus latus metietur. & si latus non metiatur latus, neque cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B non metiatur: & ipsius quidẽ A latus sit C, ipsius vero B latus D. Dico C ipsum D nõ metiri.

A........8
B..........................27
C..2
D...3

si enim

si enim C metitur ipsum D, & A ipsum B metietur. atqui non metitur A ipsum B. non igitur C ipsum D metietur. Sed non metiatur C ipsum D. Dico neque A ipsum B metiri. si enim A ipsum B metitur, & C metietur ipsum D. non metitur autem C ipsum D. neque igitur A ipsum B metietur. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Inter duos similes planos numeros vnus medius proportionalis cadit: & planus ad planum duplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

A...... 6
G 12
B 24
C .. 2
D .. 3
E ... 4
F 6

Sint duo numeri plani inter se similes A B; & ipsius quidem A latera sint C D, ipsius vero B latera E F. & quoniam similes plani sunt, qui latera habent proportionalia; erit ut C ad D, ita E ad F. Dico inter ipsos A B vnum medium proportionalem cadere: & A ad B duplam proportionem habere eius, quam latus homologum C habet ad homologum latus E, vel D ad F. quoniam enim est vt C ad D, ita E ad F; & permutando vt C ad E, ita erit D ad F. & quoniam planus numerus est A, cuius latera CD, numerus D ipsum C multiplicans fecit A. Eadem ratione, & E multiplicans F ipsum B fecit. numerus autem D ipsum E multiplicans faciat G. & cum D ipsum quidem C multiplicans faciat A; multiplicans vero E faciat G, erit vt C ad E, ita A ad G. sed vt C ad E, ita D ad F. & vt igitur D ad F, ita A ad G. rursus quoniam E ipsum D multiplicans fecit G, multiplicas vero F ipsum B fecit, vt D ad F, ita erit G ad B. ostensum est aūt & vt D ad F, ita esse A ad G. & vt igitur A ad G, ita G ad B. ergo A G B deinceps proportionales sunt; ac propterea inter A B vnus medius proportionalis cadit. Dico & A ad B duplam proportionem habere eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est quam C ad E, vel D ad F. Quoniam enim A G B deinceps proportionales sunt, A ad B duplam proportionem habebit eius, quam habet ad G. atque est vt A ad G, ita C ad E, & D ad F. ergo & A ad B duplam proportionem habet eius, quam C habet ad E, vel D ad F. quod oportebat demōstrare.

21. diffi. — 17. septimi. — Diffi. 5.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Inter duos similes solidos numeros duo medij proportionales cadunt; & solidus ad solidum triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

A........ 8
N.......... 12
X.. 18
B 27
C .. 1
D 2
E 2
F . 3
G .. 3
H .. 3
K .. 4
M 6
L 9

Sint duo numeri solidi inter se similes A B, & ipsius quidem A latera sint C D E; ipsius uero B latera F G H, & quoniam similes solidi sunt, qui latera habent proportionalia, erit vt C ad D, ita F ad G. vt autem D ad E, ita G ad H. Dico inter ipsos A B duos medios proportionales cadere, & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet C ad F, & D ad G, & adhuc D ad H. numerus enim C ipsum D multiplicans faciat K, F uero multiplicans G ipsum L faciat. & quoniam C D in eadem sunt proportione, in qua F G: & ex ipsis C D

21. diffi.

fit

fit K, ex ipsis vero F G fit L, erunt K L similes plani numeri. quare inter ipsos vnus medius proportionalis cadit. sit is numerus M. ergo M fit ex D F, vt in precedenti theoremate. est igitur vt K ad M, ita M ad L. & quoniam D ipsum C multiplicans fecit K, multiplicans vero F fecit M, erit vt C ad F, ita K ad M. sed vt K ad M, ita M ad L. ergo K M L deinceps proportionales sunt in proportione C ad F. & quoniã vt C ad D, ita F ad G, erit permutando vt C ad F, ita D ad G. rursus quoniam vt D ad E, ita G ad H, & permutãdo erit vt D ad G, ita E ad H. ergo K M L deinceps proportionales sunt in proportione C ad F, & D ad G, & E ad H. vterque autem ipsorum E H multiplicans M faciat vtrumq; N X & quoniam solidus est A, latera autem ipsius C D E, numerus E eum, qui fit ex C D multiplicans fecit A. qui vero fit ex C D est K. ergo E multiplicans K ipsum A fecit. Eadem ratione & H multi-

Ex antecedente.

17 septimi

A ... 8
N ... 12
X ... 18
B ... 27
C 2
D 1
E 2
F 3
G 3
H 5
K 4
M 6
L ... 9

A plicans L, qui fit ex F G, fecit ipsum B. & quoniam E ipsum K multiplicans fecit A, sed & multiplicans M fecit N, erit vt K ad M, ita A ad N. vt autem K ad M, ita C ad F, & D ad G, & adhuc E ad H. ergo vt C ad F, & D ad G, & E ad H, ita A ad N. rursus quoniam vterque ipsorum E H multiplicans M fecit vtrumque N X, erit vt E ad H, ita N ad X. sed vt E ad H, ita C ad F, & D ad B G. est igitur vt C ad F, & D ad G, & E ad H, ita & A ad N, & N ad X. rursus quoniam H multiplicans M fecit ipsum X; sed & multiplicans L fecit B: erit vt M ad L, ita X ad B. sed vt M ad L, ita C ad F, & D ad G, & E ad H. & vt igitur C ad F, & D ad G, & E ad H, ita non solum X ad B, sed & A ad N, & N ad X. ergo A N X B deinceps proportionales sunt in dictis laterum proportionibus. Dico & A ad B triplam proportionem habere eius, quam habet latus homologum ad homologum latus, hoc est quam habet numerus C ad F, vel D ad G, & E ad H. Quoniam enim quattuor numeri proportionales sunt A N X B, habebit A ad B triplam proportionem eius, quam habet A ad N. sed vt A ad N, ita ostensus est & C ad F, & D ad G, & E ad H. ergo A ad B triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est qua C habet ad F, & D ad G, & E ad H. quod demonstrare oportebat.

B ff. 24.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam E ipsum K multiplicans fecit A] *est enim K, qui fit ex C D, & E multiplicans eum, qui fit ex C D ipsum A fecit*

B Rursus quoniam H multiplicans M fecit ipsum X, sed & multiplicans L fecit B] *est enim L, qui fit ex F G, & H eum, qui fit ex F G multiplicans ipsum B fecit.*

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XX.

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat, numeri similes plani erũt.

Inter duos enim numeros A B vnus medius proportionalis cadat C. Dico numeros A B similes planos esse

A Sumantur enim minimi numeri D E. eandem, quam ipsi A C B proportionem habentium. est igitur vt D ad E, ita A ad C. vt autem A ad C, ita C ad B. ergo & vt D ad E ita C ad B. equaliter igitur D ipsum A metitur, atque E ipsum C ergo quoties D metitur A, tot vnitates sint in

.. diffi.

A ... 8
C ... 12
B ... 18
D 4
E 6
F 2
G 3

F; proptereaq; F multiplicans D ipsum A fecit; multiplicans vero E fecit C. quare 9. com. not.
A planus numerus est, cuius latera D F. rursus quõ D E minimi numeri sunt, eãdẽ
quã G B proportionẽ habẽtiũ; æqualiter D ipsum C metitur, & E ipsum B. quoties 21. septimi.
aũt E ipsũ B metitur, tot vnitates sint in G. ergo E ipsũ B metitur per eas, quæ sunt
in G vnitates. quare G ipsum E multiplicãs fecit B: ideoq; B numerus planus est, cu 9. com. not.
ius latera E G. ergo numeri A B sunt plani. Dico & similes esse. Quoniam enim uter
que ipsorum F G multiplicans E vtrumque C B fecit, ut F ad G, ita erit C ad B. ut 18 septimi.
aũt C ad B. ita D ad E. & ut igitur D ad E, ita F ad G. quare A B similes plani sunt; B
cum ipsorum latera sint proportionalia. id quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Sumantur enim minimi numeri DE, eandem, quam ipsi A C B proportionem A
habentium] *ex eo, quod additum est ad 35 septimi.*

Quare A B similes plani sunt, cum ipsorum latera sint proportionalia] *quoniam* B
enim est vt D ad E, ita F ad G, erit permutando vt D ad F, ita E ad G. & sunt D F latera ipsius A, & E G latera ipsius B. cum igitur plani A B latera habeant proportionalia, similes inter se erunt.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant, numeri similes solidi erunt.

A ...8
C ...12
D ...18
B ...27
E ...4
F ...6
G ...9
H . 2
K . 2
N 2
L . 3
M . 3
X . 3

Inter duos enim numeros A D duo medij pro
portionales cadant C D. Dico ipsos A B similes
solidos esse. sumantur enim minimi numeri tres,
eandem quã A C D B proportionẽ habentiũ, qui A
sint EFG. extremi igitur ipsorum E G primi inter
se sunt. & quoniam inter EG unus medius propor 3. huius.
tionalis cecidit F, erunt numeri E G similes plani.
sint ipsius quidem E latera H K; ipsius uero G late Ex antecedenti.
ra L M. manifestum est ex antecedente E F G dein B
ceps proportionales esse in proportione H ad L,
& in proportione K ad M. & quoniam E F G mini
mi sunt, eandem, quam ACD proportionem ha-
bentium, erit ex æquali ut E ad G, ita A ad D: &
sunt E G primi, sed primi & minimi. minimi ue- 23 septimi. 21. septimi.
ro eos, qui eandem habent proportionem æquali-
ter metiuntur, maior maiorem, & minor minorẽ,
hoc est antecedens antecedentem, & consequens
consequentem. ergo E ipsum A æqualiter meti-
tur, atque G ipsum D. quoties autem E metitur A,
tot unitates sint in N. ergo N ipsum E multiplicãs 9. com. not.
fecit A. sed E fit ex H K: ac propterea N eum, qui
fit ex H K multiplicãs ipsum A fecit. solidus igitur
est A, cuius latera H K N. Rursus quoniam E F G
minimi sunt, eandem quam ipsi C D B proportio
nem habentium, E ipsum C æqualiter metitur, atque G ipsum B. & quoties G me-
titur B, tot unitates sint in X. ergo G ipsum B metitur per eas, quę sunt in X unita-
tis; ideoq, X multiplicans G ipsum B fecit. at G fit ex L M. ergo X eum, qui fit ex L
M multiplicans fecit B; multiplicans vero E ipsum C fecit. solidus igitur est B, &
eius latera L M X. quare A B solidi sunt. Dico etiam similes esse. quoniam enim N X C
multiplicantes E ipsos A C fecerunt, ut N ad X, ita erit A ad C, hoc est E ad F. sed vt
E ad F, ita H ad L, & K ad M. & vt igitur H ad L, ita K ad M, & N ad X. sunt autem
HKN

HKN latera ipsius A,& L M X latera ipsius B. ergo A B similes solidi erunt. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Sumantur enim minimi numeri tres eandem, quam ACDB proportionem habentium] *inueniantur primum duo minimi numeri eandem quam A C D B proportionem habētum ex iis, quae nos ad 35 septimi tradidimus: deinde ex 2. huius inueniantur tres minimi numeri, qui eandem proportionem habeant; vel ex 35 septimi: sumantur tres minimi numeri eandem, quam ACD proportionem habentium.*

B Manifestum est ex antecedente E F G deinceps proportionales esse in proportione H ad L, & in proportione K ad M] *quoniam enim E G similes plani sunt, ipsorum latera eandem habent proportionem. est igitur vt H ad K, ita L ad M: & permutando vt H ad L, ita K ad M. & K multiplicans L faciat F. itaque quoniam K ipsum H multiplicans fecit E; multiplicās*
17. septimi. *vero L ipsum F fecit, vt H ad L, ita erit E ad F. rursus quoniam L ipsum K multiplicans fecit F, multiplicans vero M ipsum G fecit, vt K ad M, ita est F ad G. ostensum est autem vt H ad L, ita esse K ad M. ergo & vt E ad F, ita F ad G: ac propterea E F G deinceps proportionales sunt in proportione H ad L, & in proportione K ad M.*

C Quoniam enim NX multiplicantes E ipsos A C fecerunt, ut N ad X, ita erit A ad C] *etenim E ipsum C aequaliter metitur, atque G ipsum B, vt ostensum est. quoties autem G metitur B, tot vnitates sunt in X. ergo X multiplicans E ipsum C fecit.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit quadratus, & tertius quadratus erit.

Sint tres numeri deinceps proportionales A B C; sitq; primus A quadratus Dico & tertium C quadratum esse. Quoniā
20. huius. enim inter A C unus medius proportionalis cadit B, erūt A C similes plani. sed A est quadratus, ergo & C quadratus erit. quod oportebat demonstrare.

A . . 4
B 6
C 9

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

Si quattuor numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit cubus, & quartus cubus erit.

Sint quattuor numeri deinceps proportionales A B C D, & A sit cubus. Dico & D cubum esse. Quoniam enim inter A D duo medij proportio-
21. huius. nales cadunt B C, erunt A D similes solidi. est autem A cubus, ergo et D cubus erit. quod demonstrare oportebat.

A 8
B 12
C 18
D 27

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIIII.

Si duo uumeri inter se proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit.

Duo enim numeri A B inter se proportionem habeant, quam numerus quadratus C ad quadratum numerum D: sitq; A quadratus. Dico & B quadratum esse.
quoniam

quoniam enim CD quadrati sunt, erunt C D similes plani; ideoq; inter ipsos CD vnus medius proportionalis cadit. est autem vt C ad D, ita A ad B. quare etiam inter A B cadit vnus medius proportionalis. estq; A quadratus. ergo & B quadratus erit.

A....4
....6
B........9
C..............16
.....................24
D.................................36

18 huius.
8.huius.
22.huius.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri inter se proportionem habeant, quam numerus cubus ad cubum numerum, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit.

Duo enim numeri A B inter se proportionem habeant, quam cubus numerus C ad numerũ cubum D; sitq; A cubus. Dico & B cubum esse. Quoniam enim CD cubi sunt, erunt CD similes solidi. ideircoq; inter ipsos duo medij proportionales cadent: quot autem inter C D cadunt medij proportionales, totidem cadent & inter eos, qui eandem, quam ipsi proportionem habent. ergo inter A B duo medij cadent proportionales. cadant E F. quoniam igitur quatuor numeri A E F B deinceps proportionales sunt, estq; A cubus; & B cubus erit. quod oportebat demonstrare.

A 8
E 12
F 18
B——————27
C——————64
——————96
——————144
D——————216

19.huius.
8 huius.
23 huius.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXVI.

Similes plani numeri inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Sint similes plani numeri A B. Dico A ad B proportionem habere, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Quoniam enim A B similes plani sunt, inter eos vnus medius cadit proportionalis. cadat, sitq; C: & sumantur minimi numeri, eandem, quam ABC proportionẽ habentiũ D E F. ergo ipsorum extremi D F quadrati sunt. & quoniam est vt D ad F, ita A ad B; et sunt DF quadrati: habebit A ad B proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. quod demonstrare oportebat.

A..... 6
C 12
B..... 24
D 1
E 2
F ... 4

18 huius.
35 septimi.
Cor.2. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed & huius conuersum verum est. quod hoc modo demonstrabimus.

Plani numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, inter se similes sunt.

Sint plani numeri A B, qui proportionem habeant, quā quadratus numerus C ad quadratum numerum D. Dico eos inter se similes esse. Quoniam enim CD quadrati sunt, erunt similes pla
18 huius. *ni. quare inter eos cadit vnus medius proportionalis : atque est*
8 huius. *vt C ad D, ita A ad B. ergo & inter ipsos A B vnus medius*
20. huius. *proportionalis cadit. numeri igitur AB similes plani sunt. quod demonstrare oportebat.*

A...... 6
B........................24
C. .
D....4

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVII.

Similes solidi numeri inter se proportionem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.

Sint similes solidi numeri A B. Dico A ad B proportionem habere, quam numerus cubus ad cubum numerum. Quoniā
19. huius. enim A B similes solidi sunt, inter ipsos duo medij cadent proportionales. cadāt
35. septimi. C D; & sumantur minimi numeri, qui eā dem, quam A C D B proportionem habeant, ipsis multitudine æquales EFCH.
Corol. 2. huius. ergo eorum extremi EH cubi sunt. atque est vt E ad H, ita A ad B. habet igitur A ad B proportionem, quam numerus cubus ad cubum numerum. quod demonstrare oportebat.

A..............16
C ———————24
D ——————————36
B ————————————54
E.......8
F..........12
G..............18
H ———————27

F. C. COMMENTARIVS.

Huius etiam conuersum verum est. quod ita demonstratur.

Solidum numeri, qui proportionem habent, quam numerus cubus ad numerum cubum, inter se similes sunt.

Sint solidi numeri A B proportionem habentes, quam numerus cubus C ad numerum cubum D. Dico eos inter se similes esse. Quoniā enim C D cubi sunt, erūt similes so
19 huius. *lidi; ac propterea inter eos cadūt duo medij proportiona*
8 huius. *les. est autem vt C ad D, ita A ad B. quare etiam inter*
21 huius. *ipsos A B duo medij proportionales cadent. similes igitur solidi sunt numeri A B. quod demonstrare oportebat*

A 16
B ————————————54
C...... 8
D ———————27

OCTAVI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM

LIBER NONVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.



THEOREMA I. PROPOSITIO. I.



I DVO similes plani numeri se se multiplicantes aliquem fecerint, factus quadratus erit.

Sint duo similes plani numeri A B, & A ipsum B multiplicans faciat C. Dico C quadratum esse. numerus enim A se ipsum multiplicans faciat D. ergo D quadratus est. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans, fecit D, multiplicans vero B ipsum C fecit; vt A ad B, ita erit D ad C. Et quoniam A B similes 17. septimi. plani sunt, inter ipsos vnus medius proportionalis 18. octaui. cadet. si autem inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter ipsos cadunt, totidem cadent & inter eos, qui eandem habent proportionem. quare & inter D C vnus medius proportionalis cadit. atque est D quadratus. ergo & C quadratus erit. quod oportebat demonstrare.

A....4

E......6 8. octaui.

B 9

D 16

22. octaui.

F ———————— 24

C ——————————— 36

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si duo numeri se multiplicantes quadratum numerum efficiant, similes plani erunt.

Duo enim numeri A B se se multiplicantes quadratum numerum C efficiant. Dico A B similes planos esse. numerus enim A se ipsum multiplicans faciat D. ergo D quadratus est. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit D, multiplicans vero B ipsum C fecit; vt 17. septimi A ad B, ita erit D ad C. & quoniam D quadratus est, sed & C; erit D C similes plani. quare 1. octaui.

A...3

......6

B 12

D.........9

———————— 18

C ——————————— 36

8. octaui. inter ipsos vnus medius proportionalis cadit. atque est vt D ad C, ita A ad B. ergo & inter A B cadet vnus medius proportionalis. si autem inter duos numeros vnus
20. octaui. medius proportionalis cadat. erunt similes plani. ergo A B similes plani sunt. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si cubus numerus se ipsum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A se ipsum multiplicans faciat B. Dico B cubum esse. sumatur enim ipsius A latus C, & C se ipsum multiplicans faciat D. manifestū est C multiplicantem D facere ipsum A. & quoniam C se ipsum multiplicans fecit
1e com. not. D, metitur C ipsum D per vnita-
6. com. not tes, quæ in ipso sunt. sed & vnitas metitur C per eas, quę in ipso sunt
Conuer. 20. vnitates. est igitur vt vnitas ad C,
diffi. ita C ad D. rursus quoniam C multiplicans D ipsum A fecit, metitur D ipsum A per vnitates, quæ sunt in C. metitur autem & vnitas ipsum C per vnitates, quæ in ipso sunt. ergo vt vnitas ad C, ita D ad A. sed vt vnitas ad C, ita C ad D. vt igitur vnitas ad C, ita C ad D, & D ad A: ideoq; inter vnitatem, & numerum A duo medij deinceps proportionales cadunt CD. rursus quoniā A se ipsum multiplicans fecit B & A ipsum B metitur per vnitates, quæ in ipso sunt. metitur autem & vnitas ipsum A per vnitates, quæ sunt in ipso. est igitur vt vnitas ad A, ita A ad B. sed inter vnitatem, & A cadunt duo medij proportio
8 octaui. nales. ergo & inter A & B duo medij proportionales cadent. quòd si inter duos nu
23. octaui. meros cadant duo medij proportionales, primus autem sit cubus, & quartus cubus erit. atque est A cubus, ergo & B cubus erit. quod demonstrare oportebat.

C . . 2
D 4
A 8
. . . . 16
———————— 32
B ———————— 64

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

Si numerus cubus cubum numerum multiplicās faciat aliquē, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A cubum numerum B multiplicans ipsum C faciat. Dico C cubum esse. numerus enim A se ipsum
Ex antecedente. multiplicans faciat D. ergo D cubus est. & quoniam A se ipsum multiplicans fecit D;
17. septimi. multiplicans vero B ipsum C fecit, vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam A B cubi sunt, erunt similes solidi; ac propterea in-
8 octaui. ter ipsos cadent duo medij proportionales. quare & inter D C duo medij propor
23. octaui. tionales cadent. estq; D cubus. ergo & C cubus erit.

A 8
B ———— 27
D ———— 64
C ————

THEOREMA. V. PROPOSITIO V.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat cubum, & multiplicatus cubus erit.

Cubus

Cubus enim A numerũ aliquem B multiplicans faciat cubum C. Dico B cubum esse. numerus enim A se ipsum multiplicãs faciat D. ergo D cubus est. & quoniam A se ipsum quidem multiplicans fecit D; multiplicans vero B ipsum C fecit, vt A ad B, ita erit D ad C. & quoniam D C cubi sunt, similes sunt solidi, ac propterea inter ipsos cadunt duo medij proportionales: atque est vt D ad C, ita A ad B. ergo & inter A B duo medij proportionales cadent estq; A cubus. Ergo & B cubus erit. quod oportebat demonstrare.

A 8
B ———— 27
D ———— 64
C ———— 216

Ex antecedente.
17. septimi.
8. octaui.
23. octaui.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex duobus precedentibus & illa sequuntur.

Si cubus numerus numerum non cubum multiplicans faciat aliquem, factus nõ erit cubus.

Si enim factus sit cubus, & multiplicatus cubus erit, ex antecedente. quod non ponitur.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat numerum non cubum & multiplicatus non erit cubus.

Si enim multiplicatus fuerit cubus, & factus cubus erit, ex 4. huius. quod non ponitur.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, & ipse cubus erit.

Numerus enim A se ipsum multiplicãs cubum B faciat. Dico & A cubum esse. numerus enim A multiplicans B faciat C. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit B. multiplicans vero B ipsum C fecit, erit C cubus. & quoniam A se ipsum quidem multiplicans fecit B; multiplicãs vero B fecit C, vt A ad B, ita erit B ad C. quòd cum BC cubi sint, similes solidi erũt: ideoq; inter ipsos cadent duo medij proportionales. & est ut B ad C, ita A ad B. quare & inter A B duo medij proportionales cadunt. atque est B cubus, ergo & A cubus. ergo & A cubus erit. quod oportebat demonstrare.

A 8
B ———— 64
C ———— 512

Diffi. 19.
17. septimi.
19. octaui.
23. octaui.

THEOREMA VII. PROPOSITIO. VII.

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicãs, quempiam faciat, factus solidus erit.

Cõpositus enim numerus A numerum aliquem B multiplicans ipsum C faciat. Dico C solidũ esse. Quoniã enim A cõpositus est, cũ numerus aliquis metietur. metiatur D. & quoties D ipsum A metitur, tot unitates sint in E. ergo E multiplicans D fecit A. & quoniam A ipsum B multiplicans fecit C; estq; A, qui fit ex D E; numerus, qui fit ex D E, ipsum B multiplicans fecit C. ergo B multiplicans eum, qui fit ex D E, ipsum C fecit. ac propterea C solidus est, cuius latera D E. quod oportebat demonstrare.

A .. 6
B 7
C ———— 42
D . 3
E 2

13 diffi.
9. com. not.
16. septimi
Diffi. 17.

THEO-

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

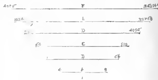
Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: quartus aūt est cubus, & duos intermittētes omnes: septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

Sint ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D E F. Dico tertium quidē ab vnitate B quadratum esse, & vnum intermittentes omnes: quartum autem C cubum, & duos intermittentes omnes, septimum vero F cubum simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes.
Diffin 20. Quoniam enim vt vnitas ad A, ita A ad B, vnitas æ-
6 com. not. qualiter metitur numerum A, atque A ipsum B. sed
vnitas metitur A per vnitates, quæ in ipso sunt. Ergo & A ipsumB per vnitates, quę sunt in A metitur. quare A se ipsum multiplicans fecit B. quadratus igitur est B. & quoniam B C D deinceps proportio
22. octaui nales sunt; estq; B quadratus; & D quadratus erit. Eadem ratione erit & F quadratus. similiter demonstrabimus & vnum intermittentes omnes quadratos esse. Dico & quartum ab vnitate videlicet C esse cubum, & duos intermittentes omnes. Quoniam enim est vt vnitas ad A, ita B ad C; vni
20 diffin. tas numerum A æqualiter metitur, atque B ipsum
6 com. not. C. sed vnitas numerum A metitur per vnitates, quę
5. com. not. in A sunt. Ergo & B metitur C per vnitates, quę sunt in A; & ob id A multiplicans B ipsum C fecit. Quoniam igitur A se ipsum multiplicans fecit B; multiplicans ve-
19 diffi. ro B fecit C; erit C cubus. quòd cum C D E F deinceps proportionales sint, sitq; C
23 octaui. cubus, & F cubus erit. ostēsū aūt est & quadratū esse. septimus igitur ab vnitate F, & cubus est, & quadratus. Similiter quoque demonstrabimus quinque intermittentes omnes & cubos, & quadratos esse. quod demonstrare oportebat.



THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero post vnitatem sit quadratus; & reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem sit cubus, & reliqui omnes cubi erunt.



Sint ab vnitate numeri quotcumque deinceps proportionales A B C D E F, & qui post vnitatem A sit quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos esse: tertiū quidem ab vnitate

B esse quadratum, & vnum intermittentes omnes, demonstratum iam est. sed & reliqui omnes quadrati erunt. Quoniam enim A B C deinceps sunt proportionales; estq; A quadratus: & C quadratus erit. rursus quoniam B C D deinceps propor- A
tionales sunt; est autem B quadratus: & D quadratus erit. similiter ostendemus & reliquos omnes quadratos esse. sit autem A cubus. Dico & reliquos cubos esse. quartum quidem ab vnitate C esse cubum, & duos intermittentes omnes, iam demonstratum est. sed & reliqui omnes cubi erunt. Quoniam enim est vt vnitas ad A, ita
A ad B, vnitas numerum A equaliter metitur, atque A ipsum B. sed vnitas metitur 20 diffin.
numerum A per vnitates, quæ sunt in ipso. quare & A numerum B metitur per vnitates, quæ in ipso sunt. ergo A seipsum multiplicans fecit B, atque est A cubus. si au
tem cubus numerus se ipsum multiplicans fecerit aliquem, factus cubus erit. Ergo 2 huius.
B est cubus. & quoniam quattuor numeri A B C D deinceps proportionales sunt,
estq; A cubus, & D cubus erit. Eadem ratione & E est cubus, & similiter reliqui om B
nes cubi sunt. quod demonstrare oportebat.

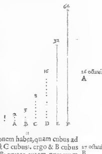
F. C. COMMENTARIVS.

Rursus quoniam BCD deinceps proportionales sunt, est autem B quadratus; et A
D quadratus erit] *videntur hęc supervacanea esse, cum superius demonstratum sit tertium ab vnitate quadratum esse, & vnum intermittentes omnes.*

Eadem ratione & E est cubus] *quattuor enim numeri B C D E deinceps proportionales* A
sunt; atque est B cubus. ergo & E cubus sit necesse est. 23 octaui.

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero post unitatem non sit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & unum intermittentes omnes. At si qui post vnitatem non sit cubus; neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes oēs.



Sint ab vnitate deinceps proportionales numeri A B C D E F, & qui post vnitatem A non sit quadratus. Dico neque alium vllum quadratum esse, pręter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. si enim fieri potest, sit C quadratus; est autem & quadratus B. ergo B C inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerũ: atque est vt B ad C, ita A ad B. habent igitur A B inter se proportionem eam, quam numerus quadratus
ad quadratum numerum: ideoq; AB similes plani 26 octaui.
sunt. & est B quadratus. ergo & A quadratus est. A
quod non ponitur. non igitur C quadratus erit. similiter ostendemus neque alium ullum quadratum esse, pręter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. sed non sit A cubus. Dico neque alium vllum cubum esse, pręter quartũ ab vnitate, & duos intermittentes omnes. si enim fieri potest, sit D cubus. est autem & cubus C; quartus enim est ab vnitate. & vt C ad D, ita est B ad C. ergo & B ad C proportionem habet, quam cubus ad
cubum; ac propterea B C similes solidi sunt, atque est C cubus. ergo & B cubus 27 octaui.
erit. & quoniam est vt unitas ad numerum A, ita A ad B; unitas autem numerum B
A metitur per unitates, quæ sunt in ipso: & A metietur B per vnitates, quæ in ipso sunt.

sunt. quare A se ipsum multiplicans cubum B fecit. si autē numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, & ipse cubus erit. cubus igitur est A. quod non ponitur. ergo neque D est cubus. similiter demonstrabimus neque alium vllū cubū esse, præter quartū ab vnitate, & duos intermittentes omnes. quod demōstrare oportebat.

6 huius.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ideoq; A B similes plani sunt. & est B quadratus; ergo & A quadratus erit] *quoniam enim A B similes plani sunt, inter eos unus medius proportionalis cadit. sunt igitur tres numeri deinceps proportionales; estq; primus quadratus. ergo & tertius quadratus erit.*

18 octaui. 22 octaui.

B Ac propterea B C similes solidi sunt; atque est C cubus; ergo & B cubus erit] *quoniam enim similes solidi sunt, inter eos cadent duo medij proportionales; & quattuor numeri deinceps proportionales erunt. Quòd cum primus sit cubus, & quartus cubus sit necesse est.*

19 octaui. 23 octaui.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

Si ab vnitate quotcūque numeri deinceps proportionales fuerint, minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui sunt in numeris proportionalibus.

Sint ab vnitate A quotcumque numeri deinceps proportionales B C D E. Dico horum B C D E minorem numerum B maiorem E metiri per aliquem ipsorum C D. Qm̄ enim est vt A vnitas ad B, ita D ad E; A vnitas numerū B æqualiter metitur, atque D ipsum E. quare permutādo A vnitas numerum æqualiter D metitur, atque B ipsum E. sed A vnitas metitur D per eas, quę sunt in ipso D vnitates. ergo & B metitur E per vnitates, quæ sunt in D. minor igitur B maiorem E metitur per aliquem eorū, qui sunt in numeris proportionalibus. quod demonstrare oportebat.

15. septimi.



THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Si ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales fuerint, quicumque primorum numerorum metiuntur ultimum, ijdē & eum, qui unitati proximus est, metientur.

Sint ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales A B C D. Dico quicumque primorum numerorum metiuntur D, eosdem & ipsū A metiri. metiatur enim aliquis primus numerus E ipsum D. Dico E ipsum quoque A metiri. Non enim metiatur E ipsum A, atq; E est primus. omnis autem primus numerus ad omnem numerum, quem nō metitur, primus est. ergo E A numeri inter se primi sunt. et quoniam E metitur ipsum D, metiatur per vnitates, quę

31. septimi.
9. com. not.

sunt

sunt in F. ergo E multiplicans F ipsū D fecit. Rursus quoniam A metitur ipsum D per eas, quæ sunt in C vnitates, A multiplicans C ipsum D fecit. Sed & E multiplicans F fecit D. qui igitur fit ex A C ei, qui fit ex E F est æqualis. ergo vt A ad E, ita F ad C. suntq; A E primi: primi aūt, & minimi, minimi vero eos, qui eandē habēt proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. metitur igitur E ipsum C. metiatur per G. ergo E ipsum G multiplicans fecit C. sed ex antecedente & A multiplicans B ipsum C fecit. qui igitur fit ex A B æqualis est ei, qui ex E G. ergo vt A ad E, ita G ad B. & sunt A E primi: sed primi, & minimi; minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. quare & E ipsum B metietur. metiatur per H. multiplicans igitur E ipsum H fecit B. sed & A se ipsum multiplicans fecit B. ergo qui fit ex H E est æqualis ei, qui fit ab ipso A. est igitur vt E ad A, ita A ad H. suntq; A E primi: sed primi, & minimi; minimi vero æqualiter metiūtur eos, qui eandem, quam ipsi proportionem habent, maior maiorem, & minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo E metitur ipsum A. sed & non metitur. quod fieri non potest. non igitur A E sunt inter se primi. ergo compositi erunt. compositos vero primus aliquis numerus metitur. quare ipsos A E metietur aliquis numerus primus. & quoniam E primus ponitur: primum autem non metitur alius numerus præter se ipsum. metitur igitur E ipsos A E: ideoq; E ipsum A metitur. metitur autem & ipsum D. ergo E ipsos A D metietur. similiter demonstrabimus quicumque primorum numerorum metiuntur ipsum D, eosdem & ipsum A metiri. quod demonstrare oportebat.

19. com.not.
A
19. septimi.
23 septimi.
21. septimi.
B
19. septimi.
23 septimi.
21. septimi.
20. septimi.
14. diffi.

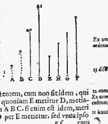
F. C. COMMENTARIUS.

Rursus quoniam A metitur ipsum D per eas, quæ sunt in C vnitates] *hoc enim in antecedente demonstratum fuit.* A

Sed ex antecedente & A multiplicans B ipsum C fecit] *quoniam enim, vt in antecedente demonstratum est, A metitur ipsum C per B; & A multiplicans B fecit C.* B

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales fuerint; qui vero post vnitatem primus sit: maximum nullus alius metietur præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

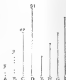


Sint quotcūque numeri ab vnitate deinceps proportionales A B C D, & qui post vnitatem, videlicet A sit primus. Dico maximum D nullum alium numerum metiri, præter ipsos A B C. si enim fieri potest, metiatur E ipsum D, & non sit E idem, qui aliquis ipsorum A B C; manifestum est E primum non esse. Si enim primus sit, & metiatur D, ipsum quoque A metietur primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. non igitur E primus est. ergo compositus: omnem autem compositum numerum primus aliquis numerus metitur. Di co nullum alium primum metiri ipsum E præterquam A. si enim alius metitur E, & E metitur D, & illi ipsum D metietur. quare & ipsum A primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. ergo A ipsum E metitur. & quoniam E metitur D, metiatur ipsum per F. non erit F idem, qui aliquis ipsorum A B C. si enim est idem, metitur; ipsum D per E; & vnus ipsorū A B C ipsum D per E metietur. sed vnus ipso rum

Ex antecedente.
13 diff.
12. com. not.
Ex antecedente.
11 huius.

rum A B C metitur D per aliquem ipsorũ A B C. quare & E idem erit, qui vnus ipsorũ A B C. quod non ponitur. non igitur F est idem, qui vnus ipsorum A B C. similiter ostendemus A metiri ipsum F, rursus ostendentes non esse F primum numerũ. si enim est primus, & metitur ipsum D, ipsum quoque A metietur, primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. non igitur F primus est. ergo cõpositus, & eum aliquis primus metietur. Dico nullum alium metiri ipsum F præterquàm A. si enim alius metitur F, & F metitur D; & ille ipsum D metietur. quare & ipsum A, primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod fieri non potest. ergo A ipsum F metitur. Et quoniam E metitur D per F, & E multiplicans F ipsum D fecit. Sed & A multiplicans C fecit D. qui igitur fit ex A C est æqualis ei,

Ex antecedenti.



19. septimi. qui ex EF. ergo vt A ad E, ita est F ad C. sed A metitur E. quare & F ipsum C metietur. metiatur per G. similiter demonstrabimus G non esse eundem, qui vnus ipsorum A B, & A ipsum G metiri. & quoniam F ipsum C metitur per G, multiplicans F ipsum G fecit C. sed & A multiplicans B ipsum C fecit. ergo qui fit ex A B ei, qui ex F G est æqualis. vt igitur A ad F, ita est G ad B. metitur autem A ipsum F. ergo & G ipsum B metietur. metiatur per H. similiter demonstrabimus H non esse eundẽ, qui A. & quoniam G ipsum B per H metitur, G multiplicans H ipsum B fecit. sed & A se ipsum multiplicans fecit B. qui igitur fit ex HG est æqualis quadrato, qui ex
20 septimi. A. ergo ut H ad A, ita A ad G. metitur autẽ A ipsum G. quare & H ipsum A metietur, primum existentem, cum non sit idem, qui A. quod est absurdum. non igitur aliquis alius metietur ipsum D maximum, præter ipsos A B C. quod demonstrandum fuerat.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XIIII.

Si minimum numerum primi numeri metiantur, nullus alius numerus metietur ipsum, præter eos, qui à principio metiebantur.

Minimum enim numerum A primi numeri B C D metiantur. Dico nullum alium primum numerũ metiri ipsum A, præter ipsos B C D. si enim fieri potest, metiatur E ipsum A; & non sit E idem, qui aliquis ipsorum B C D. & quoniã E metitur A, ipsum per F metiatur. ergo E multiplicans F ipsum A fecit. Et metiuntur A primi numeri B C D. si autem duo numeri se se multiplicantes aliquem faciant, & factum ex ipsis metiatur aliquis primus numerus; &
32. septimi. vnum eorum, qui à principio positi sunt, metietur. ergo B C D metientur vnum ipsorum E F. ipsum quidem E non metientur; etenim E primus est, & nõ idem qui aliquis ipsorum B C D. ergo ipsum F metientur, qui est minor, quàm A. quod fieri nõ potest. ponitur enim A minimus eorum, quos B C D metiantur. non igitur ipsum A metietur aliquis primus numerus, præter ipsos B C D quod demonstrare oportebat.



THEOREMA XV. PROPOSITIO. XV.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, minimi eorũ

qui

qui eandem,quam ipsi proportionem habeant; duo quilibet cõpositi ad reliquum primi erunt.

Sint tres numeri deinceps proportionales minimi eorum,qui eãdem,quam ipsi proportionem habent A B C.Dico duos quoslibet compositos ad reliquũ primos esse, videlicet A B ad C, & B C ad A, & A C ad B. sumantur enim duo minimi numeri qui eandem, quam ipsi A B C proportionem habeant D E E F. manifestum est D E se ipsum quidem multiplicantem facere A; multiplicantem vero E F facere B; & E F se ipsum multiplicantem facere C.& quoniam DE EF minimi sunt,primi erũt inter se.si autem duo numeri primi inter se fuerint, & vterque simul ad vtrumque primus erit. ergo D

A....4B......6
C........9
B..... 6C........9
A...4
C........9A...4
B......6
D..E...F

A
2. octaui.
24. septimi.
30. septimi.
F ad vtrumque ipsorum DE EF primus est.Sed & DE ad EF est primus.quare D
F DE ad EF primi sunt:ac propterea qui fit ex F D DE primus est ad EF. si au- 26. septimi.
tem duo numeri primi inter se fuerint, qui fit ex vno ipsorum ad reliquum primus 27. septimi.
erit.ergo qui fit ex F D DE ad eum, qui fit ex E F est primus. sed qui ex F D DE B
est qui fit ex DE vnà cum eo,qui ex D E E F.qui igitur ex D E vnà cum eo, qui ex
D E EF primus est ad eum, qui ex E F. Sed qui fit ex D E est A; qui vero ex D E
E F est B, & qui ex E F est C. ergo A B compositi ad ipsum C primi sunt. simili-
ter ostendemus & B C ad A esse primos.Dico & A C ad B primos esse. Quoniam C
enim D F ad vtrumque ipsorum D E E F est primus, & qui fit ex D F ad eum, qui
ex D E E F primus erit. Sed ei,qui fit ex D F æquales sunt qui ex D E, & E F fiunt D
vnà cum eo, qui bis fit ex D E E F. qui igitur ex D E, & E F fiunt vnà cum eo, qui
bis ex D E E F primi sunt ad eum, qui ex D E E F. ergo & diuidendo qui fiunt ex E
D E,& E F vnà cum eo,qui semel fit ex DE EF primi sunt ad eum, qui ex D E EF.
& rursus diuidendo qui fiunt ex D E,& EF ad eum, qui fit ex D E E F primi sunt. F
Sed qui fit ex D E est A;qui vero ex D E E F est B; & qui ex E F est C.ergo A C cõ-
positi ad ipsum B primi erunt.quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Sumantur enim duo minimi numeri eandem, quam ipsi A B C proportionem A
habentium] *ex ijs,quae demonstrauimus ad 35 septimi.*

Sed qui ex F D D E est qui fit ex D E vnà cum eo,qui ex D E E F] *Hoc in lineis de* B
monstratur ab Euclide in secundo libro, propositione tertia. sed quoniam numeri propria habent principia, Barlaam monachus non solum hoc ex illis demonstrauit, sed & quęcunque in secundo libro tradita sunt, quae nos vtpote non aliena hoc loco apponenda censuimus. demonstrat autem hoc theoremate tertio.

Quoniam enim D F ad vtrumque ipsorum D E E F est primus, & qui fit ex D F C
ad eum,qui ex DE EF primus erit] *nam cum D F ad vtrunque ipsorum DE E F sit primus, erit DF primus ad eum, qui ex D E E F ex 26 septimi. quare ex 27 eiusdem & qui fit ex D F ad eum. qui ex D E E F est primus.*

Sed ei, qui fit ex D F ęquales sunt qui ex D E,& E F] *hoc in lineis demonstratur in se-* D
cundo libro propositione 4. sed in numeris Barlaam demonstrauit theoremate quarto.

Ergo & diuidendo qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo,qui semel fit ex DE EF E
primi sunt ad eum,qui fit ex DE EF.] *si enim non sunt primi, compositi erunt. quare eos ali*
quis numerus communis mensura metietur. cum igitur is numerus metiatur vtrunque & compo 11. com. not.
situm ex illis metietur, videlicet qui fiunt ex D E, & E F vnà cum eo, qui bis fit ex DE EF. sed & metitur eum, qui fit ex DE EF. ergo qui fiunt ex DE, & EF vnà cum eo, qui bis fit ex D E E F non sunt primi ad eum, qui ex DE EF. atqui primi sunt. quod est absurdum. non igitur sunt compositi. ergo qui fiunt ex DE, & EF vnà cum eo, qui semel fit ex DE EF primi sunt ad eum, qui fit ex D E E F.

F Et rursus diuidendo qui fiunt ex DE, & EF ad eum, qui fit ex DE, EF primi sunt]

Si enim non sint primi, eodem, quo supra, modo ostendemus eos, qui fiunt ex DE, & EF vnà cum eo, qui fit ex DE EF non esse primos ad eum, qui ex DE EF, quod est absurdum: sunt enim primi, vt demonstratum iam fuit. ergo qui fiunt ex DE & EF ad eum, qui ex DE EF primi sint necesse est.

Barlaam Monachi arithmetica demonstratio eorum, quę Euclides libro secundo in lineis demonstrauit.

THEOREMA I.

Si duobus numeris propositis eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propositis æqualis erit numeris planis, qui ex numero indiuiso, & singulis partibus numeri diuisi fiunt.

Sint duo numeri AB C; & diuidatur AB in quotlibet numeros AD DE EB. Dico numerum planum, qui fit ex C AB numeris planis, qui fiut ex C AD, & C DE, & C EB aequalem esse. sit enim numerus planus F, qui fit ex C AB: GH vero, qui fit ex C AD: & HI, qui fit ex C DE: & IK, qui ex C EB. Quoniam igitur AB multiplicans C ipsum F fecit, C
10. com. not. *metitur F per eas, quae sunt in AB vnitates. Eadem ratione C metitur GH per vnitates, quae sunt in AD: & metitur HI per vnitates, quae in DE: & IK per vnitates, quae in EB. ergo C metitur totum GK per vnitates, quae sunt in AB. metiebatur autem & ipsum F per eas, quae sunt in AB vnitates. vterque igitur ipsorum F GK aeque multiplex est*
1. com. not. *numeri C. qui vero eiusdem sunt aeque multiplices, inter se aequales sũt. ergo F ipsi GK est aequalis: atque est F quidem numerus planus, qui fit ex C AB: GK vero compositus ex numeris planis, qui fiunt ex C, & singulis ipsoru AD DE EB. qui igitur fit ex C AB numerus planus aequalis est planis numeris, qui ex C, & singulis ipsorum AD DE EB fiunt. quare si duobus numeris propositis eorum alter in quotlibet numeros diuidatur, numerus planus, qui fit ex duobus numeris ab initio propositis aequalis erit numeris, qui ex numero indiuiso, & singulis partibus numeri diuisi fiunt. quod oportebat demonstrare.*

THEOREMA II.

Si numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui fiunt ex toto, & vtraque parte, inter se cõpositi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico duos numeros planos, qui fiunt ex BA AC, & AB BC inter se compositos, quadrato, qui fit ex AB, aequales esse. numerus enim AB se ipsum multiplicans faciat D: AC vero multiplicans AB faciat EF: & CB eundem AB multiplicans faciat FG. quoniam igitur AC multiplicans AB ipsum EF fecit, AB metitur
12. com. not. *EF per eas, quae sunt in AC vnitates. Rursus quoniam CB ipsum AB multiplicans fecit FG, AB metitur FG per vnitates, quae sunt in CB. metiebatur autem & EF per vnitates, quae in AC. ergo AB totum EG per vnitates, quae in se ipso sunt metitur. rursus quoniam AB se ipsum multiplicans fecit D, metitur AB ipsum quoque D per vnitates, quae in seipso sunt. ergo AB vtrumque ipsorum D, EG metitur per eas, quae in seipso sunt vni-*
1. com. no. *tates. quotuplex igitur est D ipsius AB, totuplex erit & EG ipsius AB. qui vero eiusdem numeri sunt aeque multiplices inter se aequales sunt. ergo D ipsi EG est aequalis. atque est D quidem numerus quadratus, qui fit ex AB, EG vero numerus compositus ex duobus planis, qui fiunt ex AB BC, & BA AC. quadratus igitur numerus ex AB est aequalis numero composito ex duobus planis, qui ex AB BC, & BA AC fiunt. quare si numerus in duos numeros diuidatur, duo numeri plani, qui fiunt ex toto, & utraque parte inter se compositi aequales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur. atque illud est. quod oportebat demonstrare.*

THEO-

THEOREMA III.

Si numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & vna parte fit æqualis est plano, qui fit ex partibus vna cum eo quadrato, qui à prædicta parte efficitur.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico planum numerum, qui fit ex AB BC plano. qui ex AC CB vnà cum quadrato, qui fit à CB aequalem esse. numerus enim AB multiplicans BC ipsum D faciat. AC vero multiplicans CB faciat EF: & CB se ipsum multiplicans faciat FG. itaq; quoniam AB ipsum BC multiplicans fecit D, metitur BC ipsum D per vnitates, quae sunt in AB. rursus quoniam AC multiplicans CB fecit EF, CB metitur EF per eas, quae sunt in AC vnitates. rursus quoniam CB seipsum multiplicans fecit FG, CB metitur FG per vnitates, quae in se ipso sunt: metiebatur autem & EF per vnitates, quae sunt in AC. totum igitur EG metitur CB per eas, quae sunt in AB vnitates: metiebatur autem & ipsum D per vnitates, quae in AB. ergo CB vtrumque D, EG aequaliter metitur: q; vero, quos idem numerus aequaliter metitur, inter se aequales sunt. quare D est aequalis ipsi FG. atque est D quidem planus numerus, qui fit ex AB BC: EG vero, qui ex AC CB vnà cum quadrato, qui à CB. ergo planus numerus, qui fit ex AB BC est aequalis ei, qui ex AC CB, & quadrato, qui à CB. si igitur numerus in duos numeros diuidatur, planus numerus, qui ex toto, & vna parte fit aequalis est plano, qui fit ex partibus vnà cum eo quadrato, qui à prædicta parte efficitur, quod oportebat demonstrare.

10 com.not.

4 com.not.



THEOREMA IIII.

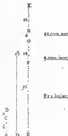
Si numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus ęqualis est quadratis, qui à partibus fiũt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico quadratum, qui fit ex AB quadratis, qui ex AC CB, & numero plano, qui bis ex AC CB fit, aequalem esse. fit enim D quadratus numerus, qui fit ex AB: EF vero quadratus, qui ex AC, & GH quadratus, qui ex CB: numerus autem planus, qui fit ex AC CB vterque ipsorum FG HK. quoniam igitur AC se ipsum multiplicans fecit EF, metitur AC numerum EF per vnitates, quae in se ipso sũt. rursus quoniam BC multiplicans CA fecit FG, metitur CA ipsum FG per vnitates, quae sunt in BC. metiebatur autem & EF per vnitates, quae in ipso sunt. ergo AC totum EG per vnitates, quae sunt in AB metitur. quare AB multiplicans AC ipsum EG fecit: ideoq; EG est numerus planus, qui fit ex BA AC. similiter ostendemus & GK numerum planum esse, qui fit ex AB BC. atque est D numerus quadratus, qui ex AB efficitur. si autem numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus aequalis est duobus numeris planis, qui fiunt ex toto, & vtraque parte. ergo D ipsi EK est aequalis. sed EK constat ex quadratis, qui ex AC CB fiunt, & eo, qui bis ex AC CB numero plano atque est D quadratus ex AB. quadratus igitur ex AB est aequalis quadratis, qui ex AC CB, & ei, qui bis ex AC, CB fit, numero plano. Ergo si numerus diuidatur in duos numeros, qui à toto fit quadratus aequalis est quadratis, qui ex partibus fiunt, & ei, qui bis ex dictis partibus fit numero plano. quod demonstrare oportebat.

10.com.not.

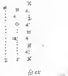
9.com.not.

Ex 2.huius.



THEOREMA V.

Si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur, autem & in numeros inęquales, qui ex inæqualibus partibus fit numerus planus vnà cum quadrato numeri interiecti ęqualis est ei, qui ex dimidio fit quadrato.



Sit par numerus AB: & bifariam in AC CB diuidatur: diuidaturq; in partes inęquales AD DB. Dico quadratum ex CB numero plano, qui

fit ex

fit ex AD DB vnà cum quadrato, qui ex CD aequalem esse. sit enim E quadratus ex CB: numerus vero planus FG, qui fit ex AD DB. & ex DC quadratus sit GH. itaq; quoniam numerus BC diuiditur in duos numeros BD DC, erit quadratus ex BC, hoc est E aequalis quadratis ex BD DC vnà cum eo, qui bis fit ex BD DC numero plano. sit igitur ex BD quidem quadratus KL, ex DC vero quadratus NX. & planus ex BD DC uterque ipsorum LM MN: totus igitur KX ipsi E est aequalis. et quoniam BD se ipsum multiplicans fecit KL, metitur BD ipsum KL per vnitates, quae in se ipso sunt. rursus quoniam CD ipsum DB multiplicãs fecit LM; DB metitur LM per vnitates, quae sunt in CD. metiebatur autem KL per eas, quae in se ipso sunt vnitates. ergo DB totum KM metitur per vnitates, quę sunt in CB. aequalis autem est CB ipsi CA. quare DB metitur KM per vnitates, quae sunt in CA. rursus quoniam CD multiplicans DB fecit MN, DB metitur MN per eas, quae sunt in CD vnitates metiebatur autem & KM per vnitates, quae sunt in AC. ergo DB totum KN per vnitates, quae sunt in AD, metitur. sed & DB metitur FG per vnitates, quae sunt in AD: ponitur enim FG, qui fit ex AD DB. aequalis igitur est FG ipsi KN. qui enim sunt eiusdem aeque multiplices inter se aequales sunt est autem et GH aequalis NX, cum vterque quadratus ex CD ponatur. totus igitur KX toti FH est aequalis; estq; ipsi E aequalis KX. Ergo FH ipsi E aequalis erit. atque est FH quidem numerus planus ex AD DB vnà cum quadrato, qui fit ex DC. E vero est qui fit ex CB quadratus. numerus igitur planus, qui fit ex AD DB vnà cum quadrato ex DC aequalis est ei, qui fit ex CB quadrato. ergo si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur autem & in numeros inęquales; qui ex inęqualibus partibus fit numerus planus vnà cum quadrato numeri interiecti aequalis est ei, qui ex dimidio fit quadrato. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.

16.com.not.

1.com. not.

THEOREMA VI.

Si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipsi numerus aliquis, qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus vnà cum quadrato dimidij est aequalis quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto constat.

Par enim numerus AB diuidatur bifariam in numeros AC CB: & ipsi alius numerus BD adijciatur. Dico numerum planum qui fit ex AD DB vnà cum quadrato ex CB aequalem esse ei, qui fit ex CD quadrato. Sit enim E quadratus ex CD numerus autem planus, qui fit ex AD DB sit FG: & ex CB quadratus GH. & quoniam quadratus ex CD est aequalis quadratis ex DB BC vnà cũ eo, qui bis fit ex DB BC, sit quadratus quidem ex BD numerus KL. planus vero numerus ex DB BC sit vterque ipsorum LM MN: & ex BC quadratus NX. totus igitur KX est aequalis quadrato ex CD: est autem E, qui fit ex CD quadratus. ergo KX ipsi E est aequalis. & quoniam BD se ipsum multiplicans fecit KL, BD metitur KL per vnitates, quae in se ipso sunt. metitur autem & LM per vnitates, quę sunt in CB ergo DB metitur totum KM per eas, quae sunt in CD vnitates. est autem CB ipsi CA aequalis, vt ponitur. quare DB totum KN metitur per vnitates, quae sunt in AD. sed DB metitur quoque ipsum FG per vnitates, quae sunt in AD; ponitur enim FG, qui fit ex AD DB. ergo FG ipsi KN est aequalis. est autem & HG aequalis NX. vterque enim est quadratus, qui fit ex CB. totus igitur FH est aequalis toti KX. sed KX ostensus est aequalis ipsi E. ergo & FH ipsi E est aequalis. atque est FH quidem planus numerus, qui fit ex AD DB vnà cum quadrato, qui ex CB; E vero est quadratus, qui fit ex CD. qui igitur fit ex AD DB vnà cum quadrato, qui ex CB est aequalis ei, qui fit ex CD quadrato. Ergo si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipsi numerus aliquis, qui fit ex toto cum adiecto, & adiecto planus numerus vnà cum quadrato dimidij est aequalis quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto constat quod oportebat demonstrare.

4 antecedentium.

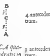
10 com.not.

THEO-

THEOREMA VII.

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vnà cum quadrato vnius partis ęqualis est numero plano, qui bis fit ex toto, & dicta parte vnà cum reliquæ partis quadrato.

Numerus enim A B diuidatur in numeros AC CB. Dico quadratos, qui fiunt ex B A AC aequales esse numero plano, qui bis fit ex B A A C vnà cum ipsius B C quadrato. Quoniam enim quadratus, qui ex A B, est aequalis quadratis, qui ex BC CA, & ei, qui bis fit ex BC CA numero plano. communis apponatur quadratus ex AC. quadratus igitur ex BA vnà cum quadrato ex AC est aequalis duobus quadratis, qui ex A C, & quadrato ex C B vnà cum eo, qui bis fit ex BC CA plano. et quoniam qui semel fit ex BA AC est aequalis ei, qui semel fit ex BC CA vnà cum ipsius CA quadrato; qui bis fit ex BA AC aequalis erit ei, qui bis fit ex BC CA vnà cum duobus quadratis ipsius CA. communis apponatur quadratus, qui ex BC. Duo igitur quadrati ex AC, & quadratus vnus ex CB vnà cum eo, qui bis fit ex BC CA aequales sunt ei, qui bis fit ex BA AC vnà cum ipsius CB quadrato. quadratus igitur ex AB vnà cum quadrato ex AC aequalis est ei, qui bis fit ex BA AC vnà cum quadrato reliquae partis CB. ergo si numerus in duos numeros diuidatur, qui à toto fit quadratus vnà cum quadrato vnius partis aequalis est numero plano, qui bis fit ex toto, & dicta parte vnà cum reliquae partis quadrato. quod oportebat demonstrare.



4 antecedentium.

3 antecedentium.

THEOREMA VIII.

Si numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto & vna parte fit numerus planus vnà cum quadrato reliquæ partis ęqualis est quadrato, qui à toto, & dicta parte, tamquam ab vno efficitur.

Numerus enim AB diuidatur in duos numeros AC CB. Dico numerum planũ, qui quater fit ex AB BC vnà cum quadrato ipsius AC aequalẽ esse ei, qui ex AB BC tamquam ex vno fit quadrato. ponatur enim ipsi B C aequalis BD. & quoniam quadratus ex AD aequalis est quadratis, qui ex AB, BD, & ei, qui bis fit ex AB BD numero plano. atque est B D aequalis B C. ergo qui fit ex A D quadratus aequalis est quadratis, qui ex AB BC, & ei, qui bis fit ex AB BC numero plano. sed quadrati, qui ex AB BC aequales sunt numero plano, qui bis fit ex AB BC vnà cum ipsius AC quadrato. est igitur qui fit ex AD quadratus aequalis ei, qui quater fit ex AB BC, & quadrato ex AC. atque est quadratus ex AD, qui ex AB, & BC, tamquam ex vno efficitur: cteum BD ipsi BC est aequalis. ergo quadratus, qui ex AB BC fit tamquam ex vno est aequalis ei, qui quater fit ex AB BC, & ipsius AC quadrato. si igitur numerus in duos numeros diuidatur, qui quater ex toto, & vna parte fit numerus planus vnà cum quadrato reliquę partis aequalis est quadrato, qui à toto, & dicta parte tamquam ab vno efficitur. quod demonstrare oportebat.

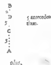


Ex antecedente.

THEOREMA IX.

Si par numerus bifariam diuidatur; diuidatur autem & in numeros inæquales, quadrati, qui ab inæqualibus numeris fiunt, dupli sunt eius quadrati, qui fit à dimidio, vnà cum quadrato numeri inter ipsos interiecti.

Par enim numerus A B bifariam diuidatur in numeros AC CB: diuidatur etiam in numeros inęquales AD DB. Dico quadratos, qui fiunt ex AD D B quadratorum, qui ex AC CD duplos esse. Quoniam enim par numerus AB in numeros aequales diuiditur AC CB: & in numeros inaequales AD DB: qui fit ex AD DB vnà cũ quadrato ex CD aequalis est ei, qui fit ex AC quadrato. qui igitur bis fit ex A D D B vnà cùm duobus ex CD quadratis duplus est eius quadrati, qui fit ex AC. Quoniam igitur AB bifariam diuiditur in numeros AC CB, quadratus, qui fit ex AB quadruplus erit eius, qui ex AC quadrati. & quoniam qui bis fit ex AD DB vnà cum duobus quadratis ex CD duplus est quadrati, qui ex AC. si autem sint duo numeri, quorum alter eiusdem quadruplus sit, alter vero duplus, qui quadruplus est dupli est du



5 antecedentium.

plus,

plus; erit quadratus ex AB duplus eius, qui bis fit ex AD DB vnà cũ duobus qui ex CD quadratis. qui igitur bis fit ex AD DB minor est, quàm dimidius quadrati ex AB, duplo quadrati ex CD. rursus quoniam qui bis fit ex AD DB vnà cum numero compositο ex quadratis AD DB aequalis est ei, qui fit ex AB quadrato: erit compositus ex AD DB quadratis maior, quàm dimidius quadrati ex AB, duplo quadrati ex CD. atque est quadratus ex AB quadrati ex AC quadruplus. compositus igitur ex quadratis AD DB maior est, quàm duplus quadrati ex AC, duplo quadrati ex DC. ergo duplus est quadratorum, qui ex AC CD fiunt. si igitur par numerus bifariam diuidatur, diuidatur autem & in numeros inaequales; quadrati, qui ab inaequalibus numeris fiunt, dupli sunt eius quadrati, qui fit à dimidio vnà cum quadrato numeri inter ipsos interiecti. quod demonstrare oportebat.

4 antecedentium.

B 2 D 3 C 5 A

F. C. COMMENTARIVS.

Precedens demonstratio obscuriuscula est, quare apertius hoc modo explicabitur. Quoniam enim numerus AD diuiditur in numeros AC CD, erit ex quarta huius quadratus, qui fit ex AD, aequalis quadratis ex AC CD vnà cum numero plano, qui bis fit ex AC CD. & cum numerus CB sit aequalis ipsi AC, quadratus ex AD aequalis erit quadratis ex BC CD vnà cum eo, qui bis fit ex BC CD. addatur communis quadratus ex DB quadrati igitur ex AD DB aequales sunt quadratis ex BC CD DB vnà cum eo, qui bis fit ex BC CD. sed quadrati ex BC CD ex 7. antecedentium sunt aequales ei, qui bis fit ex BC CD vnà cum quadrato DB. ergo quadrati ex AD DB aequales sunt duplis quadratorum ex BC CD, hoc est duplis quadratorum ex AC CD: ac propterea quadrati, ex AD DB quadratorum ex AC CD dupli erunt. quod demonstrare oportebat.

B 2 D 3 C 5 A

THEOREMA X.

Si par numerus bifariam diuidatur, adijciaturq; ipsi alter numerus; qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto vtrique quadrati dupli sunt quadrati ex dimidio, & quadrati, qui ex dimidio, & adiecto, tamquam ex vno efficitur.

Sit enim par numerus AB, & in numeros AC CB bifariam diuidatur, adijciaturq; ipsi alter numerus BD. Dico quadratos ex AD DB quadratorum ex AC CD duplos esse. Quoniam enim numerus AD diuiditur in numeros AB BD, erunt quadrati ex AD DB aequales numero plano, qui bis fit ex AD DB vnà cum quadrato ex AB. quadratus autem ex AB est aequalis quattuor quadratis, qui fiunt ex AC CB; est enim AC ipsi CB aequalis. quadrati igitur ex AD DB sũt aequales ei qui bis fit ex AD DB, & quattuor quadratis ex AC CB. & quoniam qui fit ex AD DB vnà cũ quadrato ex CB est aequalis quadrato ex CD: erit qui bis fit ex AD DB vnà cum duobus ex CB quadratis aequalis duobus quadratis, quæ ex CD fiunt. ergo quadrati ex AD DB aequales sunt duobus quadratis ex CD, & duobus quadratis ex AC. dupli igitur sunt quadratorũ ex AC CD atque est quadratus quidẽ ex AD, qui fit ex toto cũ adiecto; quadratus uero ex DB, qui fit ex adiecto, & quadratus ex CD, qui ex dimidio, & adiecto. quadratus igitur, qui fit ex toto cũ adiecto vna cũ eo, qui ex adiecto, duplus est quadrati, qui fit ex dimidio vnà cũ quadrato eius, qui ex dimidio, & adiecto cõstat. quare si par numerus bifariã diuidatur, adijciaturq; ipsi alter numerus; qui fit ex toto cum adiecto, & qui ex adiecto vtriq; quadrati dupli sunt quadrati ex dimidio, & quadrati, qui ex dimidio, & adiecto, tamquam ex vno efficitur. quod demonstrare oportebat.

7. antecedentium.

6 antecedentium.

D 2 B 3 C 5 A

F. C. COMMENTARIVS.

Illud autem, quod vndecimę secundi libri respondet, nempe numerum ita diuidere, vt qui ex toto, & altera parte fit numerus planus, æqualis sit ei, qui à reliqua parte fit quadrato, nullo modo fieri potest.

Si enim fieri possit, diuidatur numerus AB in numeros AC CB. vt qui ex AB BC fit nume-

rus planus aequalis sit quadrato ex A C. qui igitur quater fit ex A B B C quadrati ex A C quadruplus est. ergo qui quater fit ex A B B C vnà cum quadrato ex A C quintuplus est ipsius quadrati ex A C. sed qui quater fit ex A B B C vnà cum quadrato ex A C numerus quadratus est;



etenim aequalis est quadrato, qui à toto A B, et à parte B C tamquam ab vno efficitur ex octauo premissorum. est autem & qui fit A C quadratus. duo igitur quadrati numeri inter se proportionem habent, quam quinque ad vnum. quod fieri non potest. Ergo numerus non diuiditur ita, vt qui à toto, & altera parte fit numerus planus aequalis sit ei, qui à reliqua parte fit, quadrato. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVI.

Si duo numeri primi inter se fuerint, non erit vt primus ad secũdum, ita secundus ad alium vllum.

Duo enim numeri AB primi inter se sint. Dico non esse ut A ad B, ita B ad alium vllum. si enim fieri potest, sit vt A ad B, ita B ad C. & sunt AB primi, sed primi, & minimi, minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. metitur igitur A ipsum B, vt antecedens antecedentem. sed & ipse se ipsum metitur. ergo A metitur ipsos AB primos inter se existentes. quod est absurdum. non igitur est vt A ad B, ita B ad C. quod oportebat demonstrare.

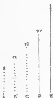


23. septimi.
21. septimi.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

Si fuerint quotcumque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint, non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium vllum.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A B C D, extremi autem ipsorum A D primi sint inter se. Dico non esse vt A ad B, ita D ad alium vllum. si enim fieri potest, sit vt A ad B, ita D ad E. quare permutando, vt A ad D, ita erit B ad E. & sunt A D primi; sed primi, & minimi, minimi vero eos, qui eandem habent proportionem, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. metitur igitur A ipsum B. atque est vt A ad B, ita B ad C. ergo & B metitur ipsum C; & ob id A quoque ipsum C metitur. & quoniam est vt B ad C, ita C ad D; metitur autem B ipsum C, & C ipsum D metietur. Sed A metitur C. quare & ipsum D. metitur autem & se ipsum. Ergo A ipsos A D primos inter se existentes metitur. quod fieri non potest. non igitur erit vt A ad B, ita D ad alium vllum. quod demonstrare oportebat.



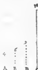
23. septimi.
21. septimi.

2. eius not.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. XVIII.

Duobus numeris datis considerare an tertius ipsis proportionalis inueniri possit.

Sint dati duo numeri A B; & oporteat considerare an possit tertius ipsis proportionalis inueniri. Itaque A B vel primi inter se sunt, vel non primi. si quidem primi, iam ostensum est, fieri non posse, vt tertius ipsis proportionalis inueniatur. Sed non sint A B inter se primi, & B se ipsum multiplicans faciat C. vel igitur A metitur C, vel non metitur. metiatur primum per D. ergo A multiplicans D ipsum C fecit. sed & B se ipsum multiplicans fecit C. qui igitur fit ex A D est equalis ei, qui ex B. ergo vt A ad B, ita B ad D; ac propterea ipsis A B tertius proportionalis D inuentus est.



Sed non metiatur A ipsum C. Dico fieri non posse, vt ipsis A B tertius proportionalis inueniatur. Si enim fieri potest, inuentus sit D. ergo qui fit ex A D aequalis est ei, qui fit ex B. sed qui fit ex B est C. qui igitur fit ex A D ipsi C est equalis. ergo A ipsum D multiplicans fecit C. & ob id A ipsum C per D metitur. sed & non metiri positum est, quod est absurdum. non igitur fieri potest, vt ipsis A B tertius inueniatur proportionalis, quando A ipsum C non metitur. quod demonstrare oportebat.



PROBLEMA II. PROPOSITIO XIX.

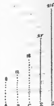
Tribus numeris datis considerare an quartus ipsis proportionalis inueniri possit.

Sint dati tres numeri A B C, & oporteat considerare an possit ipsis quartus proportionalis inueniri. ergo ipsi A B C vel deinceps sunt proportionales, & eorum extremi primi inter se sunt, vel non deinceps proportionales, & eorũ extremi sunt primi inter se, vel proportionales quidẽ deinceps, non autem extremi ipsorum inter se primi, uel neque proportionales deinceps, neque eorum extremi primi inter se sunt. si quidem igitur ABC deinceps sunt proportionales, & eorum extremi A C primi inter se, iam demon-



17 huius. stratum est fieri non posse, vt quartus ipsis proportionalis inueniatur. si vero non sunt deinceps proportionales, & extremi ipsorum sunt primi. Dico quartum proportionalem inueniri non posse. si enim inueniri potest sit D. vt igitur A ad B, ita C ad D: & vt B ad C, ita sit D ad E. ergo ex equali vt A ad C, ita C ad E: sed sunt A C primi; pri

23 septimi. mi autem, & minimi; minimi vero eos, qui eandem pro-
21. septimi. portionem habent, aequaliter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens consequentem. ergo A ipsum C metitur, antecedens antecedentem. metitur autem & se ipsum. quare A ipsos AC primos inter se existentes metitur. quod fieri non potest. ipsis igitur ABC non potest quartus proportionalis inueniri.



Rursus ABC proportionales quidem sint deinceps, nõ autem extremi eorum primi. Dico quartum proportionalem inueniri posse. multiplicans enim B ipsum C faciat D. itaque vel A metitur ipsum D, vel non metitur. metiatur primum per E. ergo A multiplicans E fecit D.
9. com. not. sed & B multiplicãs C ipsum D fecit. qui igitur fit ex AE est aequalis ei, qui ex BC;
19. septimi. propterea vt A ad B, ita est C ad E. ipsis igitur ABC quartus proportionalis E inuentus est.

Sed

Sed non metiatur A ipsum D. Dico fieri non posse, vt ipsis ABC inueniatur quartus proportionalis. si enim inueniri potest, inueniatur, sitq; E. ergo qui fit ex A E est æqualis ei, qui ex BC. sed qui fit ex BC est D. quare qui fit ex A E ipsi D est æqualis & ob id A ipsum E multiplicans fecit D. metitur igitur A ipsum D per E. quare A ipsum D metitur. sed & nó metitur, quod est absurdum. non igitur fieri potest, vt ipsis ABC inueniatur quartus proportionalis, quando A ipsum D non metitur. 19. septimi.

Sed non sint neque deinceps proportionales A B C, neque A C inter se primi, & B ipsum C multiplicans faciat D. similiter demonstrabimus, si A ipsum D metiatur, inueniri posse quartum proportionalem. sin minus, inueniri nó posse. quod demonstrandum fuerat.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

Primi numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.

Sint propositi primi numeri A B C. Dico ipsis A B C plures esse primos numeros. sumatur enim minimus, quem ipsi A B C metiantur; sitq, DE & ipsi DE apponatur vnitas DF. ergo EF vel primus est, vel non. sit primum primus. Inuenti igitur sunt primi numeri ABC EF plures, quàm ipsi ABC. sed non sit EF primus. ergo eum primus aliquis metitur. metiatur G. Dico G nulli ipsorum ABC eundem esse. si enim G idem sit, qui vnus ipsorũ ABC; ipsi autem ABC metiantur DE; & G ipsum DE metietur. metitur autem & EF. & reliquam igitur DF vnitatem metietur numerus existens. quod est absurdum. ergo G non est idem, qui unus ipsorum ABC, & ponitur primus. Inuenti igitur sunt primi numeri A B C G plures proposita multitudine primorum numerorum A B C. quod oportebat demonstrare. 13 com. not.

SCHOLIVM.

In hoc theoremate vult ostendere infinitos esse numeros primos; si enim omni proposita numerorum multitudine primi plures sint, infinitos esse primos manifestum est. si autem hoc, videtur obsistere philosophorum dogmati, qui asserunt prima determinata esse, & numero minora.

quid igitur dicemus? primos numeros non esse principium numerorum, sed vnitatem ipsam, quæ & contracta est & sola. quare & in numeris hoc seruatur, principium non esse infinitum, sed determinatum.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Si pares numeri quotcumque componantur, totus par erit.

Componantur enim pares numeri quotcumque AB BC CD DE. Dico totum AE parem esse. Quoniam enim vnusquisque ipsorum AB BC CD DE par est, habet par- A..4..B...6...C....8....D.......10....E F G H K
✠ tem dimidiam. quare & totus AE partem dimidiam habebit. par autem numerus
6. diffi. est, qui bifariam diuiditur. ergo AE par est. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

✠ Quare & totus AE partem dimidiam habebit.]
Quoniam enim vnusquisque eorum habet dimidium, sit ipsius AB dimidia AF, & ipsius BC dimidia BG, & ipsius CD dimidia CH, denique ipsius DE dimidia DK. vt igitur AB ad eius dimi-
12. septimi. *diam AF, ita & vnusquisque reliquorum ad eius dimidiam. quare vt AB ad AF, ita & omnes AE ad omnes AF BG CH DK. sed AF dimidia est ipsius AB. ergo & AF BG CH DK sunt dimidia totius AE. cum igitur AE dimidiam habeat bifariam diuidetur. ideoq; etiam par erit.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si impares numeri quotcumque componantur, multitudo autem ipsorum sit par; totus par erit.

Componantur enim impares numeri quotcumque multitudine pares AB BC CD DE. Dico totum AE parem esse. Quoniam enim vnusquisque ipsorum AB BC CD DE impar est, detracta ab vno quoque vnitate, erit vnusquisque reliquorum par. A..3..B..5..C..7..D....9....E
Ex antecedente. quare & compositus ex ipsis par erit. est autem par & vnitatum multitudo. & totus igitur AE par est. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO. XXIII.

Si impares numeri quotcumque componãtur, & multitudo ipsorum sit impar, & totus impar erit.

Componantur enim numeri impares quotcumque, quorum multitudo sit impar AB BC CD. Dico & totum AD imparem esse. auferatur ab ipso CD vnitas DE. reliquus igitur AE par est. est autẽ A..5..B.....7....C...8...E 1 D
21. huius. & AC par. ergo & totus AE par erit. atque est DE vnitas. impar igitur AD. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

7. diffi. Atque est DE vnitas. impar igitur est AD] *impar enim numerus est, qui à pari vnitate differt.*

THEOREMA XXII. PROPOSITIO. XXIIII.

Si à pari numero par auferatur, & reliquus par erit.

A pari enim numero AB par auferatur BC. Dico & reliquum CA parem esse. Quoniam enim AB par est, habet partem dimidiam. Eadem ratione & B C. quare & reliquus AC partem habet dimidiam. par igitur est AC. quod oportebat demonstrare.

A..E..C..F..B

F. C. COMMENTARIVS.

Quare & reliquus AC partem habet dimidiam] *Sit ipsius ab dimidia BD, & ipsius CB dimidia BE, erit AB ad BD, vt CB ad BE. & permutando AB ad BC, vt DB ad BE. & diuidendo AC ad CB, vt DE ad EB. rursusq́; permutando AC ad DE, vt CB ad BE. sed BE est dimidia ipsius CB. ergo & DE ipsius AC dimidia erit. cum igitur AC partē habeat dimidiam bifariā diuiditur, ac propterea par est. quod demonstrandū proponebatur.*

A..F..D C.A.E.B

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXV.

Si pari numero impar auferatur, & reliquus impar erit.

A pari enim numero AB impar BC auferatur. Dico & reliquum CA imparem esse. auferatur ab ipso BC vnitas CD. ergo DB par est. est autem par & AB. & reliquus igitur AD est par. atque est CD vnitas. ergo CA impar est. quod demō strare oportebat.

A..F...C D..F..B

Ex antecedente.

THEOREMA. XXIIII. PROPOSITIO XXVI.

Si ab impari numero impar auferatur, & reliquus par erit.

Ab impari enim numero AB impar BC auferatur. Dico reliquum CA parem esse. Quoniam enim AB impar est, auferatur vnitas BD. reliquus igitur AD est par. Eadem ratione & CD est par. quare & reliquus AC par est. quod oportebat demonstrare.

A..F..C...F..D B

24. huius.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO. XXVII.

Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

Ab impari enim numero AB par auferatur BC. Dico reliquum CA imparem esse. auferatur enim vnitas AD. ergo DB par est. est autem par & BC. & reliquus igitur CD est par. atque est DA vnitas. ergo CA impar est. quod oportebat demonstrare.

A D.F.C.F.B

24. huius.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXVIII.

Si impar numerus parem multiplicans faciat aliquem, factus par erit.

Impar enim numerus A parem numerum B multiplicans faciat C. Dico C parem esse. Quoniam enim A multiplicans B ipsum C fecit, componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot vnitates sunt in A. atque est B par. ergo C ex paribus numeris componitur. si autem pares numeri quotcumque componantur totus par erit. ergo C est par. quod demonstrare oportebat.

A B C

22. huius.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXIX.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans faciat aliquem, factus impar erit.

Impar enim numerus A numerum imparem B multiplicans faciat C. Dico C imparem esse. Quoniam enim A multiplicans B ipsum C fecit, componitur C ex tot numeris æqualibus ipsi B, quot sunt in A vnitates. atque est vterque ipsorum A B impar. ergo C ex imparibus numeris componitur, quorum multitudo est impar. qui autem componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar, & ipse impar erit. ergo C est impar. quod demonstrare oportebat.

23. huius.

15 | 3 | 5 | A B C

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XXX

Si impar numerus parem numerum metiatur, & dimidium eius metietur.

Impar enim numerus A parem numerum B metiatur. Dico & dimidium eius metiri. Quoniam enim A metitur B, metiatur ipsū per C D. cō C non esse imparem, na si fieri potest, sit impar. & quoniam A ipsum B metitur per C, A multiplicans ipsum C fecit B. ergo B componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo est impar, ac propterea impar est. quod est absurdum par enim ponitur. non igitur C est impar. ergo par. quare A ipsum B pariter metitur. * & ob id eius quoque dimidium metitur. quod oportebat demonstrare.

9 com not

12 | 4 | 3 | A C B

SCHOLIVM.

* Et ob id eius quoque dimidium metitur] *quoniam enim A ipsum B metitur per C, & C ipsum B per A metietur. habet autem vterque ipsorum CB partem dimidiam. quare vt C ad B, ita erit dimidium ad dimidium. sed C metitur ipsum B per A. ergo & ipsius C dimidium dimidium ipsius B per A metietur; ideoq; A multiplicans ipsius C dimidium, dimidium ipsius B fecit. quare A ipsius B dimidium per dimidium ipsius C metitur.*

9 com not
12. com. not

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO. XXXI.

Si impar numerus ad aliquem numerum sit primus, & ad ipsius duplum primus erit.

Impar enim numerus A ad aliquem numerū B sit primus, & sit C ipsius B duplus. Dico A etiam ad C primū esse. si enim non sint AC primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur, sitq; D. * & est A impar. impar igitur est & D. & quoniam D impar existens metitur ipsum C, atque est C par; & D ipsius C dimidium metietur. sed ipsius C dimidium est B. ergo D ipsum B metitur, metitur autem & ipsum A. quare D ipsos AB metitur, primos inter se existentes. quod fieri non potest. non igitur A ad C primus non est. ergo AC inter se primi sunt. quod oportebat demonstrare.

Ex antecedente.

10 | 5 | 3 | A B C D

SCHOLIVM.

Et est A impar, impar igitur est & D] *quoniam enim A impar est, metitur autem ipsum numerus D, vt positum est & D seipsum metitur, erit D impar. numeros enim impares impar numerus metitur.*

THEO-

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXII.

Numerorum à binario duplatorum vnusquisque pariter par est tantum.

A binario enim A duplentur quotlibet numeri BCD. Dico BCD pariter pares esse tantum. at vero vnumquem ipsorum BCD pariter parem esse, manifesto constat. à binario namque duplatus est. Dico & tantum. exponatur enim vnitas E. Quoniã igitur ab vnitate quotlibet numeri deinceps proportionales sunt, & post vnitatem A primus est; maximum ipsorum numerorum ABCD, videlicet D, nullus alius metietur præter ipsos ABC. atque est vnusquisque ipsorum ABC par. ergo D pariter par est tãtum. similiter demonstrabimus & vnumquemque ipsorũ ABC pariter parẽ esse tãtũ. quod demõstrare oportebat. 13. huius.

E	A	B	C	D
1	2	4	8	16

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO. XXXIII.

Si numerus dimidium habeat imparem, pariter impar est tantum.

Numerus enim A dimidium imparem habeat. Dico A pariter imparem esse tantum. at vero pariter imparem esse perspicuum est. dimidius enim ipsius impar existens ipsum pariter metitur. Dico & tantum. nam si A sit etiam pariter par, dimidius ipsius par erit; atque eum par numerus per parẽ numerũ metietur. ergo dimidium ipsius par numerus metitur, impar existens. quod est absurdum. quare A pariter impar est tantum.

A 10

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXIIII.

Si par numerus neque sit à binario duplatus, neque dimidium imparem habeat; pariter par est, & pariter impar.

Numerus enim A neque sit A binario duplatus, neque dimidium imparem habeat. Dico A & pariter parem, & pariter imparem esse. at vero A pariter esse parem, manifestum est; dimidium enim imparem non habet. Dico etiam pariter imparem esse. nam si A bifariã secemus, & dimidium ipsius bifariam, & hoc semper faciamus, tandem incidemus in aliquem imparem, qui ipsum A per numerum parem metietur. si enim non, incidemus in binarium, atque erit A à binario duplatus. quod non ponitur. quare A & pariter impar est. ostensum autem est & pariter esse parem. est igitur A & pariter par, & pariter impar. quod demonstrare oportebat.

A 24

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXV.

Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales: auferantur autem à secundo, & ultimo æquales primo; erit vt secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A BC D EF, incipientes à minimo A: & auferatur ab ipso BC, & ab EF æqualis ipsi A, videlicet GC FH. Dico vt BG ad A, ita esse EH ad A BC D; ponatur enim ipsi quidem B C æqualis F K; ipsi vero D æqualis FL. Quoniam igitur FK est æqualis ipsi BC, quorum FH est æqualis GC; erit reliquus HK reliquo GB equalis. & quoniam est vt EF ad D, ita D ad BC, & BC ad A, equalis autem est D ipsi FL, & BC ipsi FK, & A ipsi FH: erit vt EF ad FL ita LF ad FK, & KF ad FH. quare diuidendo vt EL ad LF, ita LK ad KF, & KH ad HF, & vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes. est igitur vt KH ad HF, ita EL LK KH ad LF KF HF. atque est KH quidem æqualis BG, FH vero ipsi A, & LF KF HF æquales ipsis D BC A. ergo vt BG ad A, ita est EH ad D BC A. est igitur vt secundi excessus ad primum, ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes. quod oportebat demonstrare.

A 2

B 2 G 2 C

D........8

E... 8... L.4 .K 2 H 2 F

F. C. COMMENTARIVS.

Quare diuidendo vt EL ad LF] *ex ijs, quae nos ad 14 septimi demonstrauimus.*

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO. XXXVI.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps proportionales exponãtur in dupla analogia, quoad totus compositus primus fiat, & totus in vltimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.

Vnitas

A 2

B 4

C 8

D 16

E 31

H T N 31 K

L 124

M 248

F 31 X 465 496 G

P

O



Ab vnitate enim exponantur quotcumque numeri deinceps proportionales in dupla analogia, quoad totus compositus primus fiat A B C D: & toti equalis sit E: & E ipsum D multiplicans faciat FG. Dico FG perfectum esse. quot enim sunt A B CD mul-

CD multitudine, tot sumantur ab ipso E in dupla analogia, qui sint E HK L M. er
go ex æquali vt A ad D, ita erit E ad M. ac propterea qui fit ex E D est æqualis ei, 19. septimi.
qui ex A M. est autem qui ex E D ipse FG. quare FG est, qui fit ex A M. multiplicās
igitur A ipsum M fecit FG. ergo M metitur FG per vnitates, quæ sunt in A. atque 10 com. not.
est A binarius. duplus igitur est FG ipsius M. sunt autem & M L HK E deinceps
dupli inter se. ergo E HK L M FG deinceps proportionales sunt in dupla analo-
gia. auferatur à secundo HK, & ab vltimo FG ipsi primo E æqualis vterque HN,
FX. est igitur vt secundi numeri excessus ad primum, ita excessus vltimi ad omnes
ipsum antecedentes. quare vt NK ad E, ita XG ad M L HK E. atque est NK ipsi E
æqualis. ergo & XG est æqualis ipsis M L HK E. est aūt & FX æqualis ipsi E; atque
E ipsis A B C D, & vnitati æqualis. totus igitur FG æqualis est & ipsis E HK L M,
& ipsis A B C D, & vnitati; omnesq; ipsum FG metiuntur. Dico FG nullum alium
metiri præter ipsos A B C D E HK L M, & vnitatem. si enim fieri potest, metiā
tur aliquis numerus ipsū FG, qui sit O: sitq; O nulli ipsorū A B C D E HK L M idē.
& quoties O ipsum FG metitur, tot vnitates sint in P. ergo P ipsum O multiplicans 9 cōis. not.
fecit FG. sed & E multiplicans D ipsum FG fecit. est igitur vt E ad P, ita O ad D. & 19. septimi.
quoniam ab vnitate deinceps proportionales sunt A B C D, et post vnitatem A pri
mus est, non metietur D aliquis alius numerus, præter ipsos A B C: & ponitur O 13. huius.
nulli ipsorum A B C idem. non igitur O ipsum D metietur. vt autem O ad D, ita E
ad P. ergo neque E metietur ipsum P. atque est E primus. omnis autem primus nu 31. septimi.
merus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est. quare E P primi inter
se sunt. sed primi & minimi, minimi vero eos, qui eandem, quam ipsi, proportio- 23 septimi.
nem habent, æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem, & consequens con- 21 septimi.
sequentē. atque est vt E ad P, ita O ad D. ergo E æqualiter metitur ipsum O, atque
P ipsum D. sed D nullus alius metitur præter ipsos A B C. quare P idē est, qui vnus
ipsorum A B C. sit idē, qui B. & quot sunt B C D multitudine, tot ab ipso E suman
tur E HK L: suntq; E HK L in eadem proportione, in qua B C D. ex æquali igitur
ut B ad D, ita est E ad L. ergo qui fit ex B L est æqualis ei, qui ex D E. sed qui fit ex 19 septimi.
D E est æqualis ei, qui ex P O. qui igitur fit ex P O ei, qui ex B L æqualis erit. quare 19. septimi.
vt P ad B, ita est L ad O. estq; P idem qui B. ergo & L idem erit, qui O. quod fieri
non potest. etenim O nulli ipsorum expositorum idem ponitur. non igitur ipsum
FG metitur aliquis numerus præter ipsos A B C D E HK L M, & vnitatē. atque
ostensus est FG æqualis ipsis A B C D E HK L M, et vnitati. perfectus autem nume
rus est, qui suis ipsius partibus est æqualis. ergo FG perfectus erit. quod oportebat
demonstrare.

NONI LIBRI FINIS.

SCHOLIVM.

Propositum est Euclidi in decimo libro tractare de commensurabilibus & incommensurabilibus magnitudinibus, & de irrationalibus, & irrationalibus. non enim eadem sunt incommensurabilia, & irrationalia: quoniam illa quidem natura sunt; irrationalia vero & rationalia positione. si enim quadrati diametrum natura incommansurabilem facit, vt eius latus, hoc non facit temere, sed ex illius rationibus, quæ in ipsa sunt. quare neque irrationale est eorum, quæ natura sunt incommẽsurabilia, sed incommensurabile. etenim natura ipsa hoc facit iuxta omnem mensuram, quæ cum aliquo nihil commune habet. Primum igitur de commensurabilibus, & incommensurabilibus tractat, eorum naturã exquirens: postea vero de rationalibus, & irrationalibus, non tamen omnibus: quidam enim, velut obsistentes ipsa reprehendunt: sed de maxime simplicibus speciebus, quibus compositis infinitæ irrationales gignũtur. Earum nonnullas etiam Apollonius litteris mandauit. Ad scientiam autem attinet, causas, principia, & simplicia considerare, non singularia, & infinita. Itaque exponit irrationalium simplices species tredecim, quæ tribus modis inuentę sunt, his enim aliæ simplices non inuenientur. Horum modorum vnus est iuxta analogiam, per quem Euclides inuenit vnam speciem eorũ. alius iuxta compositionẽ, per quẽ sex species; tertius iuxta diuisionẽ, per quem reliquas sex inuenit. Venerũt autem initio ad inquisitionem symmetriæ, hoc est commensurabilitatis Pythagoræi primi, ipsam ex numerorum cognitione inuenientes, cum vnitas, sit omnium numerorum communis mensura, & in magnitudinibus communis mensura inueniri non possit. Huius caussa est, quòd omnis numerus, iuxta quaslibet sectiones diuisus relinquit particulam aliquam minimã, & quę sectionem non admittit. Omnis autem magnitudo in infinitũ diuisa non relinquit particulam, quæ propterea quòd minima sit, secari non possit. sed & illa in infinitum secta infinitas efficit particulas, quarũ singulę in infinitum secabuntur. & simpliciter magnitudo quatenus quidem diuiditur particeps est principij infiniti, quatenus vero ad totum attinet, termini est particeps. At numerus contra quatenus diuiditur termini, quatenus vero ad totum attinet. particeps est infiniti. Itaque quoniam oportet mensuras minores esse ijs, quæ mensurantur; mensuratur autem omnis numerus, necesse est omnium minimam esse mensuram. quare & magnitudinum, si omnes mensura communi mensurantur, necesse est eam minimam esse. Sed in numeris quidem est communis mensura, terminatur enim, qaemadmodum dictum est: in magnitudinibus vero

non item, non igitur communis quædam mensura est omnium magnitudinum. Cum hoc intelligerent Pythagorei, vt fieri potuit, in magnitudinibus mensuram inuenerunt. omnes enim, quas eadem mensura metitur, commensurabiles appellarunt, eas uero, quas non metitur eadē mensura, incōmensurabiles. & harum rursus, quascumque alia quæpiam cōmunis mensura metitur inter se cōmensurabiles; quascumque vero non metitur illis incōmensurabiles. & ita sumptis mensuris, omnes possunt esse commensurabiles: rationales aūt omnes, & omnes irrationales esse possunt, vt ad aliquid; propterea quod commensurabile quidem & incommensurabile natura illis inest: rationale autem, & irrationale positione. Inueniuntur autē commensurabiles & incōmensurabiles tripliciter iuxta tres dimensiones, nimirum lineæ, superficies, & solida, vt Theon demonstrauit & alij non nulli. At vero magnitudinem in infinitum diuidi posse, hoc theoremate ostenderunt.

Sumentes enim triangulum æquilaterum, basim bifariam secant: & vni portioni æqualem abscindentes in altero latere, per pūctum diuisionis ad basis partes parallelam ducunt: & rursus æquilaterum constitutum est triangulum. cuius basim eodem modo secantes similiter faciunt, & nūquam desinunt ad trianguli uerticē. si enim desinerent, sequeretur æquilateri trianguli duo latera reliquo æqualia esse, quod est absurdum.



Quod autem horum vtilis, nec superuacanea sit cognitio, vel ex veteri pythagoreorū sermone colligi potest. fabulantur enim eū, qui primus hanc irrationalium contemplationem in apertum tamquam ex adyto proferre est ausus, naufragio perijsse. idq; ea factum de caussa, quòd omne irrationale, atque informe vbique occultari velit. Aiunt præterea, si quis forte alicui horum occurrerit, atque illud publicarit, fore statim, vt in generationis, hoc est profundi locum deferatur, perpetuisq; illic obruatur fluctibus, tanta veneratione hi viri irrationalium hanc cognitionem sunt prosecuti.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER DECIMVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.



DIFFINITIONES

I.



COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

II.

Incommensurabiles autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.

III.

Rectę lineæ potentia commensurabiles sunt, cum ea, quæ ab ipsis fiunt, quadrata idem spacium metitur.

F. C. COMMENTARIVS.

Rectas lineas longitudine commensurabiles seorsum non diffinivit, quòd in prima diffinitione magnitudinum commensurabilium comprehendantur; sunt enim rectę lineę longitudine commensurabiles, quas eadem mensura metitur.

IIII.

Incommensurabiles autem, cum quadratis, quę ab ipsis fiunt, nullum commune spacium esse contingit.

V.

His positis ostenditur, cuicumque rectę lineæ propositę rectas lineas multitudine infinitas, & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine & potentia; alias vero potentia solum. vocetur autem proposita recta linea, rationalis.

Et

VI.

Et huic commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia ſolum, rationales.

VII.

Incommenſurabiles vero irrationales vocentur.

VIII.

Et quadratũ, quod à recta linea propoſita fit, dicatur rationale.

IX.

Et huic commenſurabilia quidem, rationalia.

X.

Incommenſurabilia vero, irrationalia dicantur.

XI.

Et rectæ lineę, quæ incommenſurabilia poſſunt, vocentur irrationales: ſi quidem ea quadrata ſint, ipſorum latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, quę ipſis æqualia quadrata deſcribunt.

F. C. COMMENTARIVS.

Sunt etiam quędam communes notiones, quibus Euclides in hoc libro utitur, nempe hę.

COMMVNES NOTIONES.

1 *Quælibet magnitudo multiplicata poteſt omnem propoſitam magnitudinem eiuſdem generis ſuperare.*

2 *Quæcumque magnitudo metitur aliquam, metitur quoque eam, quã illa ipſa metitur.*

3 *Quæcumque magnitudo metitur totam, & ablatam; etiam reliquam metietur.*

4 *Quęcumque magnitudo metitur duas, vel plures magnitudines, metitur quoque eam, quę ex ipſis componitur.*

THEOREMA I. PROPOSITIO. I.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à maiori auferatur maius, quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt rurſus auferatur maius, quam dimidium; & hoc ſemper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minori magnitudine expoſita minor erit.

Sint

Sint duæ magnitudines inæquales AB C, quarum maior AB. Dico si ab ipsa AB auferatur maius, quàm dimidium, & ab eo, quod reliquum est, rursus auferatur maius, quàm dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit. etenim C multiplicata fiet aliquando maior magnitudine AB. multiplicetur, & sit DE ipsius quidem C multiplex, maior autem, quàm AB, diuidaturq; DE in partes ipsi C æquales DF FG GE. & ab ipsa AB auferatur maius, quàm dimidium BH; ab ipsa vero AH rursus maius, quàm dimidium auferatur HK, atque hoc semper fiat, quoad diuisiones, quæ sunt in AB, multitudine æquales fiant diuisionibus, quę in DE. sint igitur diuisiones AK KH HB diuisionibus DF FG GE multitudine æquales. & quoniam maior est DE, quàm AB, & ablatum est ab ipsa quidem DE minus, quàm dimidium EG; ab ipsa vero AB maius, quàm dimidium BH; erit reliquum GD reliquo HA maius. rursus quoniam maior est GD, quàm HA, & ablatum est ab ipsa quidem GD dimidium GF; ab ipsa vero HA maius, quàm dimidium HK; reliquum FD reliquo AK maius erit. estq; FD æqualis ipsi C. ergo C quàm AK est maior. minor igitur est AK, quàm C. Ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK exposita minori magnitudine C minor. quod demonstrare oportebat. similiter autem demonstrabitur etiam si dimidia ablata fuerint.

1. com. not.



ALITER. Exponātur duæ magnitudines inęquales AB C, sitq; C minor. & quoniam minor est C multiplicata erit aliquando magnitudine AB maior. fiat vt FM, diuidaturq; in partes ipsi C ęquales MH HG GF. & ab ipsa AB auferatur maius, quàm dimidium BE, & ab EA maius, quàm dimidium ED: atque hoc semper fiat, quoad diuisiones, quę sunt in FM, æquales fiant diuisionibus, quę in AB. fiant igitur vt BE ED DA. & ipsi DA vnaquæque ipsarum KL LN NX sit æqualis, atque hoc fiat, quoad diuisiones KX ęquales sint diuisionibus ipsius FM. & quoniam BE maior est, quàm dimidium ipsius AB, erit BE maior, quàm EA. multo igitur maior est BE, quàm DA. sed ipsi DA ęqualis est XN. ergo BE maior est, quàm XN. rursus quoniam ED maior est quàm dimidium EA, erit ED maior, quam DA. sed ipsi DA est æqualis NL. quare ED, quàm NL est maior. tota igitur DB maior est, quàm XL. ipsi vero DA æqualis est LK. quare tota AB, quàm tota XK maior erit. sed & MF maior est, quam BA. multo igitur MF, quam XK est maior. & quoniam XN NL LK inter se æquales sunt; sunt autem & MH HG GF inter se æquales. atque est multitudo earum, quæ sunt in MF æqualis multitudini ipsarum, quæ in XK. erit vt KL ad FG, ita KX ad FM. maior autem est FM, quàm XK. ergo & GF quàm LK est maior. atque est FG ipsi C æqualis; & KL ęqualis ipsi AD. ergo C quam AD maior erit. quod oportebat demonstrare.



.2. quinti
14. quinti.

SCHOLIVM.

In magnitudinibus asymetriam inesse.

Ex hoc theoremate perspicuum fit in magnitudinibus asymetriam, hoc est incommensurabilitatem inesse. si enim exposita magnitudine minorem assumere licet, & rursus hac minorem, & semper minorem,

magnitudines in infinitum secantur; & non in minimam mensuram determinatam, vt in numeris est vnitas. si igitur non est determinata magnitudo minima, erunt quędam magnitudines incommensurabiles, quas communis aliqua magnitudo, cum indeterminata sit, non metietur.

F. C. COMMENTARIVS.

Similiter autem demonstrabitur, etiam si dimidia ablata fuerint] *auferatur enim ab ipsa AB dimidium BH: & ab ipsa AH dimidium HK: idq; semper fiat. quo ad diuisiones AB ęquales sint diuisionibus ipsius DE: & quoniam DE maior est quàm AB, & ab ipsa quidem DE ablatum est minus quàm dimidium: ab ipsa vero AB ablatum est dimidium; erit reliquum GD maius reliquo HA. rursus quoniam GD maior est quàm HA: & ab ipsa GD ablatum est dimidium GF; ab ipsa vero HA dimidium HK, reliquum FD reliquo KA maius erit. quae deinceps sunt similiter demonstrabuntur.*

Sed in alia demonstratione. auferatur ab ipsa AB dimidium BE, & ab EA dimidium ED: atque hoc fiat, quoad diuisiones, quae sunt in FM aequales sint diuisionibus, quae in AB: sint autem BE ED DA. & ipsi DA aequalis sit vnaquęque ipsarum KL LN NX & quoniam BE est aequalis ipsi EA, & EA maior quàm AD, erit BE quàm DA maior. sed ipsi DA est aequalis XN. ergo BE maior est quàm XN. rursus quoniam ED DA sunt aequales ipsis NL LK, tota AB quã tota XK maior erit. reliqua vero similiter demonstrabuntur.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si duabus magnitudinibus inęqualibus expositis detracta semper minore de maiore, reliqua minime præcedentem metiatur magnitudines incommensurabiles erunt.

Duabus enim magnitudinibus inęqualibus expositis AB CD, quarum minor sit AB, & detracta semper minore de maiore, reliqua minime metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB CD incommensurabiles esse. si enim commensurabiles sint, eas magnitudo quædam metietur. metiatur, si fieri potest, sitq; E: & AB quidem metiens DF relinquat se ipsa minorem CF: CF vero metiens BG relinquat se ipsa minorem AG; & hoc semper fiat, quoad relinquatur quædam magnitudo, quæ sit minor ipsa E. itaque fiat, & relinquatur AG ipsa E minor. Quoniã igitur E metitur AB, AB vero metitur DF; & E ipsam DF metitur. sed & metitur tota CD. ergo & reliquam CF metietur. at CF metitur BG. quare & E ipsam BG metitur. metitur autem

& totam

& totam AB. & reliquam igitur AG metietur, maior minorem, quod fieri non põe, non igitur magnitudines AB CD aliqua magnitudo metietur. ergo incommensurabiles erunt AB CD magnitudines. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, detracta semper minore de maiore, reliqua minime præcedentem metiatur, incommensurabiles magnitudines erunt. quod oportebat demonstrare.

SCHOLIVM.

Magnitudines quasdam longitudine esse incommensurabiles ex hoc theoremate docemur. etenim aliquas commensurabiles esse perspicue apparet. magnitudinum autem commensurabilium maximam communem mensuram inuenire, non cuius vis est, sed hominis eruditi: cuius quidem maximæ communis mensuræ inuentionem in sequenti theoremate tradit.

ALIVD SCHOLIVM.

Cum in antecedenti theoremate caussam explicauerit incommensurabilitatis, in hoc signum incommensurabilium magnitudinum affert, quando scilicet incommensurabiles sint. in sextodecimo autem theoremate ipsarum proprium exponit, ita ut & caussa, & signum, & proprium habeatur. At in commensurabilibus magnitudinibus caussam veluti manifestam prætermisit; exponit autem & signum, & proprium.

F. C. COMMENTARIVS.

* Et hoc semper fiat, quoad relinquatur quædã magnitudo, quæ sit minor ipsa E.] *quoniam enim AB quidem metiens DF relinquit se ipsa minorem CF; CF vero metiens BG relinquit se ipsa minorem AC: erit AG minor, quàm BG. ergo ex AB ablatum est maius, quam dimidium ipsius, videlicet BG. & ita semper fiet. quòd cum ex AB semper auferatur maius, quàm dimidium, relinquetur tandem aliqua magnitudo, quae ipsa E minor erit.*

Ex antecedente.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. III.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.



Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles AB CD, quarum minor AB. oportet ipsarum AB CD maximam communem mensuram inuenire. vel igitur AB metitur CD, vel non metitur. & si quidem AB metitur CD, metitur autem & se ipsam; erit AB ipsarum AB CD communis mensura. & perspicuũ est maximam esse; magnitudo enim maior magnitudine AB ipsam AB non metietur. si vero AB non metitur CD, detracta semper minore de maiore, relinquetur tandẽ quædam magnitudo, quę præcedentem metietur; propterea quòd AB CD non sint incommensurabiles. & AB quidem metiens ED relinquat se ipsa minorem EC: EC vero metiens FB relinquat se ipsa minorem AF; & AF ipsam CE metiatur. Qm̃ igitur AF metitur CE, sed CE metitur FB: & AF ipsam FB metitur. metitur autem & se ipsam. & totam

3 com. not. igitur AB metietur. sed AB metitur DE. ergo AF ipsam DE metitur. metitur autem

4. com. 5 t.

tem & CE. & totã igitur CD metietur. ergo AF ipsas AB CD metitur; ac propterea ipsarum est communis mensura. Dico & maximam esse. nisi enim ita sit, erit aliqua magnitudo maior ipsa AF, quę ipsas AB CD metietur. Itaque metiatur, & sit G. & quoniam G metitur AB, AB vero metitur ED; & G ipsam ED metitur. metitur autem & totam CD. ergo & reliquam CE metietur. sed CE metitur FB. quare G ipsam FB metitur. metitur autem & totam AB. & reliquam igitur metietur AF, maior minorem, quod fieri non potest. non igitur magnitudo quædam maior ipsa AF magnitudines AB CD metietur. ergo AF ipsarum AB CD maxima erit communis mensura. Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis AB CD maxima ipsarum communis mensura inuenta est AF. quod facere oportebat.



g. com. not.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipsarum communem mensuram metiri.

SCHOLIVM.

Tamquam manifestum sit, esse magnitudines commensurabiles, aggreditur hoc theorema, & non illud prius ostendit, quemadmodum in ijs, quæ in commensurabiles sunt. constat enim magnitudines omnes alicuius multiplices, si comparentur cum ea, cuius sunt multiplices, commensurabiles esse.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc manifestum est si magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipsarum communem mensuram metiri] *sequitur illud ex vltima parte demonstrationis, vt ad secundam propositionem septimi libri in numeris explicauimus.*

PROBLEMA. II. PROPOSITIO IIII.

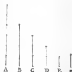
Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram inuenire.

Sint datæ tres magnitudines commensurabiles A B C. oportet ipsarum A B C maximam communẽ mensuram inuenire. sumatur enim duarum A B maxima cõis mensura, quę sit D. itaque D ipsam C vel metitur, vel nõ metitur. metiatur primũ. & qm̃ D ipsam C metitur, metitur autem & AB; & ipsas A B C metietur. Quare D ipsarum A B C communis est mensura: & manifestum est maximam esse. magnitudo enim maior magnitudine D ipsas A B C non metietur. nam si fieri potest, metiatur eas magnitu-



Ex antecedente.

do maior ipsa D, quæ sit E. Quoniã igitur E magnitudines A B C metitur,& ipsas A B metietur,& ipsarum A B maximam communẽ mensuram D, maior minorẽ, quod fieri nõ potest. sed non metiatur D ipsam C. Dico primũ C D commensurabiles esse. Quoniã enim commensurabiles sunt A B C, metitur eas aliqua magnitudo, quę scilicet & ipsas A B metitur. ergo & ipsarum A B maximã cõmunem mensurã D. metitur autem & ipsam C. quare dicta magnitudo ipsas C D metitur: ideoq; C D cõmensurabiles sunt. sumatur ipsarum maxima cõmunis mẽsura; & sit E. Quoniã igitur E metitur D, D vero metitur A B; & E ipsas A B metietur. metitur autem & C. ergo E ipsarum A B C communis est mensura. Dico & maximam esse. si enim fieri potest, sit aliqua magnitudo F maior ipsa E, quæ magnitudines A B C metiatur. & quoniam F metitur A B C, & ipsas A B metietur, & ipsarum A B maximam communem mensuram, quæ est D. ergo F metitur D. metitur autem & C. quare F ipsas C D metitur, & ipsarum C D maximam communem mensuram, hoc est E. ergo F ipsam E metietur, maior minorem. quod fieri non potest. non igitur magnitudo quædam maior ipsa E magnitudines A B C D metietur. ergo E ipsarum A B C maxima erit communis mensura, si D ipsam C non metiatur; si vero metiatur erit ipsa D. tribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis maxima ipsarum communis mensura inuẽta est. quod facere oportebat.



COROLLARIVM.

Ex hoc perspicue constat, si magnitudo tres metiatur magnitudines, & ipsarum maximam communem mensuram metiri. similiter & in pluribus magnitudinibus maxima communis mensura inuenietur, & corollarium procedet.

SCHOLIVM.

Quoniam incommensurabiles magnitudines consequitur proportionem non habere, quam numerus ad numerum, & eius conuersum: vult ostendere commensurabiles magnitudines consequi proportionem habere, quam numerus ad numerum, & contra. indiget autem ad hoc lemmate, quo'nam modo commensurabilium magnitudinum duarum, vel trium maxima communis mensura inueniatur. sic & in primo arithmeticorum libro fecit. postquam enim ostendit qui'nam sint incommensurabiles, quos primos appellat, propterea quòd non omnino incommensurabiles sunt, vt magnitudines; ostendere volens omnem numerum ad omnem numerum proportionem habere vel multiplicem, vel superparticularem, vel superpartientem, vel multiplicem superparticularem

particularem, vel multiplicem superpartientem, quos ipse breuitatis causa ex minori nominauit, vel partem, vel partes. per partem intelligens submultiplicem, vel subsuperparticularē, vel submultiplicem superparticularem. per partes vero subsuperpartientem, vel submultiplicem superpartientem. hoc igitur volens ostendere eo indigebat, quo modo commensurabilium maxima cōmunis mensura inueniatur. quod etiam hoc loco ob[...] .aut. Postea in quinto theoremate ostēdet cōmēsurabiles magnitudines inter se proportionem habere, quam numerus ad numerum. immo vero omnem commensurabilem magnitudinem omnis commensurabilis magnitudinis, minorem maioris, vel partem esse, vel partes: hoc enim est proportionem habere, quam numerus ad numerum; non tamen contra: latius enim patet numerus. quamobrem eo vsus est. Sciendum autem & ipsas demonstrationes, quæ ex arithmeticis petuntur, incommutabiles esse.

ALIVD.

Postquam docuit, quæ sint magnitudines incommensurabiles, deinceps quid ipsas consequatur ostendet; & insuper quid consequatur commensurabiles in quinto, & sexto theoremate: & quoniam indigebat cōmuni mensura earum, quæ sunt in symmetria, videlicet commensurabilium, hoc assumit in tertio, & quarto theoremate, quo pacto inueniendæ sint commensurabilium communes mensuræ. septimum autem theorema inquirit; quę consequantur incommensurabiles magnitudines non simpliciter, sed secundum speciem, vt incommensurabiles longitudine, vel potentia: nam de incommensurabilibus secundum priuationem nihil dixit; vt pote, quæ non sint ipsis vtiles ad tractationem de irrationalibus. In his tradit ortum earum, quę longitudine, & potentia commensurabiles sunt, & incommensurabiles: his enim indiget in nono theoremate, & sequentibus, in quibus iuxta analogiam, & iuxta compositionem, & diuisionem commensurabilitas, & incommensurabilitas inquiritur vsque ad tertium decimum theorema.

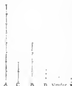
THEOREMA III. PROPOSITIO. V.

Commensurabiles magnitudines inter se proportionem habent, quam numerus ad numerum.

Sint commensurabiles magnitudines A B. Dico magnitudinem A ad B proportionem habere, quam numerus ad numerum. Quoniam enim A B commensurabiles sunt, metietur ipsas aliqua magnitudo. metiatur, & sit C & quoties C ipsam A metitur, tot vnitates sint in D: quoties autem C metitur B, tot vnitates sint in E.

Ii 2 quoniam

quoniam igitur C ipſam A metitur per vnitates, quę ſunt in D: metitur autem & vnitas D per vnitates, quæ in ipſo ſunt; vnitas æqualiter metietur numerum D, atque magnitudo C ipſam A. ergo vt C ad A, ita eſt vnitas ad D; & conuertendo vt A ad C, ita D ad vnitatem. Rurſus quoniam C ipſam B metitur per vnitates, quæ ſunt in E; metiturq; vnitas numerum E per vnitates, quę in ipſo ſunt: vnitas numerum E ęqualiter metietur, atque C ipſam B. eſt igitur vt C ad B, ita vnitas ad E. oſtenſum autem eſt & vt A ad C, ita D eſſe ad vnitatē. quare ex ęquali vt A ad B, ita numerus D ad E numerum. commēſurabiles igitur magnitudines A B inter ſe proportionem habent, quam D numerus ad numerū E. quod oportebat demonſtrare.



SCHOLIVM.

Hoc proprium eſt commenſurabilium magnitudinum, minor maioris vel pars eſt, vel partes. ſi quidem igitur pars, vel proportionem habebit, quam vnitas ad numerum, vel quam numerus ad numerum; ſi vero partes proportionem habebit, quam numerus ad numerum. pars enim ſubmultiplicem facit proportionem: partes vero vnam reliquarum ſubproportionalium. ſi igitur rectæ lineæ ſint, & plana, quæ ab ipſis ſiunt, & ſolida proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. ſi vero plana, & quæ ab ipſis ſolida, non item rectæ lineæ, niſi proportio numerorū ſit quadrati ad quadratum. & ſi ſolida nō omnino quę ipſa præcedunt, niſi proportio ſit cubi ad cubum. quòd ſi ſolida non habeant proportionem, quam numerus ad numerum, neque plana, neque rectæ lineæ habebunt: non enim ſunt commenſurabiles. In hoc autem theoremate & ſequenti de commenſurabilibus, & incommenſurabilibus ſimpliciter differit; at in ſeptimo de incommenſurabilibus longitudine, ex quo manifeſtum eſt & de potentia incommenſurabilibus. In octauo denique ortum tradit commenſurabilium, & incommenſurabilium longitudine & potentia.

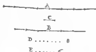
F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonſtratis poſſumus illud quoque problema abſoluere.

Propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus, quam inter ſe proportionem habeant in numeris inuenire.

Sint propoſitae magnitudines commenſurabiles A B. quarum oporteat proportionem in numeris inuenire. inueniatur ex 3 huius maxima earum communis menſura, quae ſit C. & quoties C metitur A, tot vnitates ſint in D: quoties autem metitur ipſum B, tot vnitates ſint in E. habebit igitur A ad B proportionē eā, quā habet numerus D ad E numerum. itaque ſi A B rectae lineae ſint, & earum quadrata erunt cōmenſurabilia, & inter ſe proportionem habebunt, quam numerus

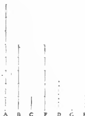
numerus quadratus ad quadratum numerum. si vero sint superficies, vel numeri D E sunt quadrati, vel non quadrati; & si non sunt quadrati, vel proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, vel non & si quidem sunt quadrati, vel proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, rectae lineae, quae ipsas superficies, vel superficies ipsis aequales possunt, erunt longitudine commensurabiles. si vero numeri non habent proportionem, quàm quadratus numerus ad quadratum numerum, erunt longitudine incommensurabiles, quamquam potentia commensurabiles sint. quae omnia in nona propositione huius libri demonstrabuntur.



THEOREMA IIII. PROPOSITIO. VI.

Si duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles magnitudines erunt.

Duæ enim magnitudines A B inter se proportionem habeant, quam D numerus ad numerum E. Dico A B magnitudines commẽsurabiles esse. quot enim vnitates sunt in D, in tot partes æquales diuidatur magnitudo A, & vni ipsarum æqualis sit C: quot autem vnitates sunt in E, ex tot magnitudinibus æqualibus ipsi C cõponatur magnitudo F. Quoniam igitur quot sunt in D vnitates, tot magnitudines sunt in A, ipsi C æquales; quæ pars est vnitas ipsius D, eadem pars erit & C ipsius A. vt igitur C ad A, ita est vnitas ad D. metitur autem vnitas ipsum D numerũ. ergo & C ipsam A metietur. & quoniam est vt C ad A, ita vnitas ad D numerum, erit conuertendo vt A ad C, ita D numerus ad vnitatem. rursus quoniam quot vnitates sunt in E, tot sunt & in F magnitudines ipsi C ęquales; vt C ad F, ita erit vnitas ad E numerum. ostensum autem est & vt A ad C, ita D esse ad vnitatem. ergo ex æquali ut A ad F, ita est D ad E. sed ut D ad E, ita A ad B. & ut igitur A ad B, ita A ad F. quòd cum A ad utramque ipsarum B F eandem habeat proportionem, erit B ipsi F ęqualis. metitur autem C ipsam F. ergo & ipsam B metietur. sed & metitur A. quare C ipsas A B metitur. commensurabilis igitur est A ipsi B. Quare si duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles magnitudines erunt. quod oportebat demonstrare. 9.quinti.



A L I T E R.

Duæ enim magnitudines A B inter se proportionem habeant, quam numerus C ad numerum D. Dico magnitudines commensurabiles esse. quot enim unitates sunt in C, in tot partes ęquales A diuidatur, & uni ipsarum ęqualis sit E. est igitur ut unitas ad C numerum, ita E ad A est autem & ut C ad D, ita A ad B. ergo ex æquali

æquali ut unitas ad D numerum, ita E ad B. sed unitas metitur D. ergo & E ipsam B metitur. metitur autem & E ipsam A, quoniam & unitas metitur C. quare E utramque ipsarum A B metietur; ideoque A B commensurabiles sunt; atque est E communis ipsarum mensura.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si sint duo numeri, vt D E, & recta linea vt A, fieri posse, vt D numerus ad numerum E, ita rectam lineam A ad aliam rectam lineam. si autem ipsarum A F media proportionalis sumatur, ut B, erit vt A ad
Cor. 20 sexti. F, ita quod fit ex A ad id, quod ex B, hoc est vt prima ad tertiam, ita figura, quæ fit à prima ad eam, quæ à secunda similem, & similiter descriptam. sed vt A ad F, ita D numerus ad numerum E. factum igitur est & vt D numerus ad numerum E, ita quod fit ex recta linea A ad id, quod ex recta linea B.



SCHOLIVM.

Si quadrata vel parallelogramma, vel quæcunque spacia proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines: quando autem proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & ipsæ commensurabiles sunt; & rectæ lineæ, quæ ipsas possunt, longitudine sunt commensurabiles. vel quando rectæ lineæ inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, & ipsæ commensurabiles sunt longitudine, & quæ ab ipsis fiunt quadrata, vel spacia quadratis ipsarum æqualia proportionem habere coguntur, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ad plura igitur se extendunt potentia commensurabiles, quàm commensurabiles longitudine; & continentiores sunt, vt ex sequentibus theorematibus fiet manifestum.

THEOREMA V. PROPOSITIO. VII.

Incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

Sint

Sint incommensurabiles magnitudines A B. Dico A ad B proportionem non habere, quam numerus ad numerum. si enim A ad B proportionem habet, quam numerus ad numerum, commẽsurabilis erit A ipsi B. atqui non est commensurabilis. nõ igitur A ad B proportionem habet, quam numerus ad numerum. quare incommensurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum. quod demonstrare oportebat.

A B

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VIII.

Si duæ magnitudines inter se proportionem non habeãt, quã numerus ad numerũ, incõmẽsurabiles erũt.

Duæ enim magnitudines A B inter se proportionem non habeãt quam numerus ad numerum. Dico magnitudines A B incommensurabiles esse. si enim commensurabilis est A ipsi B, proportionem habet, quam numerus ad numerum. atqui non habet. incommensurabiles igitur sunt A B magnitudines. ergo si duę magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt. quod oportebat demonstrare.

A B

THEOREMA VII. PROPOSITIO. IX.

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. & quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & latera habebunt longitudine commensurabilia. quadrata vero, quæ à longitudine incommensurabilibus rectis lineis fiunt, inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

A

B





A B

C..... D...





Sint rectæ lineæ A B longitudine cõmensurabiles. Dico quadratum quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, eam proportionem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quoniam enim A ipsi B longitudine est commensurabilis, habebit A ad B proportionem, quam numerus ad numerum. habeat eam, quam numerus C ad numerũ D. Quoniam igitur est vt A ad B, ita C numerus ad numerum D; & proportionis quidem, quam habet A ad B, dupla est proportio quadrati, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B; similes enim figuræ in dupla sunt proportione homologorum laterum: proportionis vero, quã habet numerus C ad numerum D dupla est proportio quadrati ipsius C ad ipsius D quadratum; etenim duorũ numerorũ quadratorum vnus medius proportionalis est numerus, & quadratus ad quadratum duplam proportionem habet eius, quam latus habet ad latus: erit vt quadratum, quod fit ex A ad quadratum, quod

5. huius

Corol. 20. sexti.

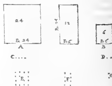
11. octaui.

quod ex B, ita quadratus numerus, qui fit ex C numero ad quadratum numerum qui ex D.

ALITER.

Quoniam enim cõmensurabilis est A ipsi B longitudine, proportionẽ hẽt quã numerus ad numerũ. habeat quã C ad D. & C se ipsum quidẽ multiplicans faciat E, multiplicans vero D faciat F: & D se ipsum multiplicans faciat G. itaque quoniã C se ipsum quidem multiplicans fecit E, multiplicãs vero D fecit F; erit vt C ad D, hoc est
1. sexti. vt A ad B, ita E ad F. sed vt A ad B, ita quadratum, quod fit ex A ad rectãgulum, quod fit ex A B. est igitur vt quadratum, quod ex A ad rectangulũ, quod ex A B, ita E ad F. rursus quoniam D se ipsum multiplicans fecit G, vt C ad D, hoc est vt A ad B, ita erit F
1. sexti. ad G. vt autem A ad B, ita rectangulũ, quod fit ex A B ad quadratũ, quod fit ex B. ergo vt rectangulum, quod ex A B ad quadratum, quod ex B, ita F ad G. sed vt quadratum, quod fit ex A ad rectangulum, quod ex A B, ita erat E ad F. ex æquali igitur ut quadratum ex A ad quadratum ex B, ita E ad G. est autem vterque ipsorum E G quadratus. & E quidem est à numero C; G uero ab ipso D. quadratum igitur, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Sed sit vt quadratum, quod fit ex A adquadratũ, quod ex B, ita quadratus numerus, qui est à numero C ad quadratum numerum, qui à numero D. Dico A ipsi B longitudine commensurabilem esse. Quoniam enim est vt quadratum, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, ita quadratus numerus, qui est à numero C ad quadtatum numerum, qui à numero D. sed proportio quidem quadrati, quod fit ex A ad quadratum, quod ex B, dupla est proportionis, quã
Coroll. 20. sexti et 11 octaui. hẽt A ad B. proportio vero quadrati numeri, qui est à numero C ad quadratũ numerũ, qui à numero D itidẽ dupla est proportionis, quã hẽt C numerus ad numerum D. est igitur vt A ad B, ita C ad D. ergo A ad B proportionem habet, quam nume-
6 huius. rus C ad D numerum: ac propterea A ipsi B longitudine est commensurabilis. quod oportebat demonstrare.

ALITER.



Sed quadratũ, quod fit ex A, ad quadratum, quod ex B proportionem habeat, quam quadratus numerus E ad quadratum numerum G. Dico A ipsi B longitudinem commẽsurabilem esse. sit enim ipsius quidem E latus C, ipsius vero G latus D; & C ipsum
17. septimi. D multiplicans faciat F. ergo E F G deinceps proportionales sũt in proportione, quæ est C ad D. & quoniam quadratorum, quæ
17. septimi. fiunt ex A B, medium proportionale est rectangulum, quod ex A B: numerorum vero quadratorum E G medium proportionale est F, erit vt quadratum

dratum, quod fit ex A, ad rectangulum, quod ex A B, ita E ad F. vt autem rectangulum ex A B ad quadratum ex B, ita F ad G: sed vt quadratum ex A ad rectangulũ ex A B, ita A ad B. ergo A B commensurabiles sunt; proportionem enim habent, quam numerus E ad numerum F, hoc est quam C ad D. vt enim C ad D, ita E ad F: 17.septimi.
nam C se ipsum quidem multiplicans fecit E, multiplicans autem D ipsum F fecit. est igitur vt C ad D, ita E ad F.

Sed incommensurabilis sit A ipsi B lõgitudine. Dico quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem nõ habere,

A 4 — B 32

quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ. si enim quadratũ ex A ad quadratũ ex B proportionẽ habeat, qua quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilis erit A ipsi B longitudine. non est autem. non igitur quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Rursus quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Dico A ipsi B longitudine incommensurabilem esse. si enim commensurabilis sit A ipsi B longitudine, habebit quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. atqui non habet. non igitur A ipsi B longitudine est commensurabilis. ergo quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & quę deinceps sunt. quod oportebat demonstrare.

COROLLARIVM.

Et manifestum est ex iam demonstratis rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. & quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

Quoniam enim quadrata, quæ fiunt à rectis lineis longitudine commensurabilibus proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; C
quę vero proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilia sunt: erunt rectę lineę commensurabiles longitudine, non 6.huius
solum longitudine, sed & potentia commensurabiles.

Rursus quoniam quæcunque quadrata inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, latera habent longitudine commensurabilia, vt ostensum est, quæ etiam potentia commensurabilia sunt, cum eorum quadrata proportionẽ habeãt, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ: quęcunque quadrata proportionẽ nõ habẽt, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ, sed simpliciter quã aliquis alius numerus ad aliũ numerũ, cõmẽsurabilia sunt, hoc est rectę lineæ à quibus ipsa describūtur, cõmẽsurabiles sunt potẽtia, nõ aũt & longitudine. ergo rectæ lineæ longitudine quidem commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. potentia vero commensurabiles, non omnino & longitudine, nisi earum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Dico & longitudine incommensurabiles non omnino & potentia incõmensurabiles esse, Quõ potentia cõmensurabiles possunt proportionem non habere, quam numerus ad numerum, ideoq; cum potentia commensurabiles sint, longitudine sunt in commensurabiles. ergo non quæ longitudine incommensurabiles sunt, omnino & potentia: sed longitudine incommensurabiles existentes pos-

D E F

 sunt

G sunt potentia & incōmmensurabiles, & commēsurabiles esse. potentia vero in commensurabiles omnino & longitudine incommensurabiles sunt. si enim longitudine sint commensurabiles, & potentia commensurabiles erunt. atqui ponuntur in cōmensurabiles. quod est absurdum. potentia igitur in commensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles erunt.

SCHOLIVM.

Hoc theorema Theateti est inuentum, cuius mentionem facit Plato in Theateto. sed illic quidem particulatim magis exponitur, hic autem vniuerse. namq; illic quadrata, quæ à quadratis numeris mensurantur, commensurabilia etiam latera habere dicit. particularis autem est hæc propositio: neque enim omnia commensurabilia spacia, quorum & latera commensurabilia sunt, comprehendit; si quidem quadratorum spaciorum commensurabilium, videlicet 18 & 8 latera, & si non secundum mensuram numerorum inueniantur, aliter tamen commensurabilia sunt. at ipsa spacia à quadratis numeris minime mensurantur, quamquam etiam mensurari possint. merito igitur hoc loco non horum modum diffiniuit, sed quæ (vt inquit) proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & non frustra quadrati numeri mentio facta est. si enim tantum dixisset, quam numerus ad numerum, redundans esset diffinitio, quoniam quadrata, quæ inter se duplam proportionem habent, commensurabilia habere latera oporteret. non habent autem, est enim maioris latus ad latus minoris, vt quadrati diameter ad eius latus. si igitur ita dixisset, quam numerus ad numerum, redundaret diffinitio, comprehendens etiam ea, quæ latera commensurabilia non habent. Si vero dixisset, quæ à quadratis numeris mensurantur, diffinitio diminuta esset, non comprehendens ea, quę cum latera commensurabilia habeant, à quadratis numeris non mensurantur: & proportionem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Quamobrem recte appositum est, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; comprehenduntur enim omnia spacia, quæ & si à quadratis numeris non mensurantur, tamen cum sint commensurabilia, latera quoque commensurabilia habent. nam 18 & 8 commensurabilibus existentibus, propterea quòd à lateribus commensurabilibus describuntur, inueniemus eorum latera, cum proportionem habeant, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. vt enim 9 ad 4, ita 18 ad 8. Itaque sumentes latera ipsorum 9 & 4, æqualiter secabimus propositorum quadratorum latera: & habebimus commensurabilitatē. namque vt quadrata ad quadrata, ita sunt latera ad latera.

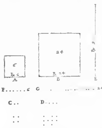
Quæ a rectis lineis longitude commensurabilibus fuerint quadrata] *intellige rectas lineas longitudine commensurabiles inter se se, non expositae rationali: hoc enim non solùm rationalibus contingit, sed & irrationalibus, vt deinceps apparebit.* A

Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & latera habebunt longitudine commensurabilia] *Per quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum non solum intelligenda sunt ea, quae totidem quadratas mensuras continent, quot vnitates sunt in numeris quadratis, sed et quae inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum. sint enim duo numeri plani similes F G, & recta linea A. sitq; F 6, & G, 24 & fiat ex corollario sextę propositionis huius, vt F ad G, ita A ad aliam lineam, quae sit E. & inter A E sumpta media proportionali B, erit vt prima ad tertiam, videlicet vt A ad E, ita quadratum, quod ex prima ad quadratum, quod ex secunda, hoc est ita quadratum, quod ex A ad quadratum, quod ex B. sed vt A ad E, ita erat numerus F ad numerum G. vt igitur numerus F ad G numerum, ita erit quadratum ex A ad quadratum ex B. ideoq; quadratum ex A continebit totidem mensuras quadratas, vt exempli gratia totidem pedes quadratos, quot vnitates sunt in F, videlicet sex, & quadratum ex B totidem pedes quadratos continebit, quot vnitates sunt in G, hoc est 24. & quoniam numeri plani similes F G inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad numerum quadratum, habebit etiam quadratum ex A ad quadratum ex B proportionem eam, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. habeat quam quadratus numerus, qui fit ex C ad quadratum numerum, qui fit ex D. similiter demonstrabitur eorum quadratorum latera A B, quamquam certo numero exprimi non possint, tamen inter se longitudine commensurabilia esse. & idcirco proportionem habere, quam numerus ad numerum. Iuniores eiusmodi latera radices quadratas, vel radices simpliciter appellãt; dicetur enim A radix 6, & B radix 24. atque est ℞ 6 ad ℞ 24, vt 1 ad 2. nam cum quadratum ex B quadruplum sit quadrati ex A, erit B ipsius A dupla. similes enim rectil neę figurae in dupla sunt proportione homologorum laterum.* B

Coroll. 20. sexti.

26 octaui.

Coroll. 20. sexti.



Quoniam enim quadrata, quæ fiunt à rectis lineis longitudine commensurabilibus] *Ostendit quomodo prima corollarij pars sequatur ex prima parte theorematis.* C

Rursus quoniam quæcunque quadrata inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum] *Rursus ostendit quomodo idem ex secunda parte theorematis sequatur.* D

Quęcunque quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed simpliciter quàm aliquis alius numerus ad alium numerum] *Hoc ad secundam partẽ Corollarij attinet, & sequitur ex vltima parte theorematis.* E

Dico & longitudine incommensurabiles] *Hoc pertinet ad tertiam partem corollarij, & ex tertia parte theorematis explicatur.* F

Potentia vero incommensurabiles omnino & longitudine incommensurabiles sunt] *Hęc est vltima corollarij pars, quae per deductionem ad id, quod fieri non potest ex prima parte theorematis demonstratur.* G

THEOREMA VIII. PROPOSITIO. X.

Si quattuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartę commensurabilis erit. & si prima secundę fuerit incommensurabilis, & tertia quartæ incommensurabilis erit.



Sint quattuor magnitudines proportionales. A B C D, sitq; vt A ad B, ita C ad D, & sit A ipsi B commensurabilis. D.co & C ipsi D commensurabilem esse. Quoniam
5. huius. enim A commensurabilis est ipsi B, habebit A ad B proportionem, quam numerus ad numerum: atque est vt A ad B, ita C ad D. ergo & C ad D proportionem habet, quam numerus ad numerum. commensu-
6. huius. rabilis igitur est C ipsi D. sed A ipsi B sit incommensurabilis. dico & C ipsi D incõ-
7. huius. mensurabilem esse. Quoniam enim incommensurabilis est A ipsi B, non habebit A ad B proportionẽ, quam numerus ad numerum. est aũt vt A ad B, ita C ad D. ergo neque C ad D proportionem habet, quam numerus ad numerum. si enim C ad D proportionem habeat, quã numerus ad numerum; & A ad B eam, quã numerus ad numerũ proportionẽ habebit; atq; erit A ipsi B cõmẽsurabilis. quod est absurdũ; in cõmẽsurabilis enim ponitur. ergo C ad D proportionẽ nõ hẽt, quã numerus ad nu-
8. huius. rum; ideoq; C ipsi D est incommensurabilis. Si igitur quattuor magnitudides proportionales fuerint; prima vero secundæ fuerit commensurabilis, & tertia quartæ commensurabilis erit. & si prima secundæ fuerit incommensurabilis, & tertia quartæ incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.

L E M M A. I.

26. octaui. *Ostensum est in arithmeticis numeros planos similes inter se proportionem habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. &*
A *si duo numeri inter se proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos similes planos esse. & manifestum est ex his, dissimiles planos numeros, hoc est non habentes latera inter se proportionalia proportionem non habere, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. si enim haberent; similes plani essent. quod non ponitur. ergo dissimiles plani inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.*

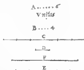
L E M M A. II.

Duobus datis numeris, & recta linea, facere vt numerus ad numerum, ita quadratum rectę lineæ ad alterius rectæ lineæ quadratum.

Sint dati quidem duo numeri A B; & data recta linea C. oportet inuenire alteram rectam lineam, ita vt quadratum, quod fit ex C ad quadratum ex altera recta linea eam proportionem habeat, quam numerus primus ad secundum numerum. quot enim vnitates sunt in A, in tot partes ęquales diuidatur C recta linea, &

uni

vni ipsarum æqualis sit D. quot autem vnitates sunt in B, ex tot partibus ipsi D æqualibus cōponatur recta linea E. est igitur vt vnitas ad A, ita D ad C: & conuertendo vt A ad vnitatem, ita C ad D. est autem & vt vnitas ad B, ita D ad E. ergo ex æquali vt A ad B, ita recta linea C ad ipsam E. sumatur rectarum linearū C E media proportionalis F. est igitur vt C ad E, ita quadratum, quod fit ex C ad id, quod ex F quadratum, nāque vt prima ad tertiam, ita quadratum, quod fit ex prima ad quadratum, quod ex secunda simile, & similiter descriptum. sed vt C ad E, ita est A ad B, & vt igitur A ad B, ita quadratum ex C ad quadratum ex F. quare C F sunt rectæ lineæ, quas quærebamus. etenim F inuenta est.

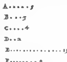


Coroll. 20. sexti.

LEMMA III.

Duos numeros planos dissimiles inuenire, hoc est vt inter se proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

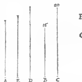
Exponantur quattuor numeri A B C D, ita vt non sit sicut A ad C, ita B ad D, & fiat ex A B numerus E, & C D numerus F. perspicuum est E F numeros planos esse, planos autem dissimiles, quoniam latera proportionalia non sunt. quod facere oportebat.



PROBLEMA III.
PROPOSITIO. XI.

Propositæ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

Sit proposita recta linea A. oportet ipsi A inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia. exponantur enim duo numeri B C inter se proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est dissimiles plani: & fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D: hoc enim ante traditum est. ergo quadratum ex A commensurabile est quadrato ex D. & quoniam B ad C proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratū numerum, neque quadratum ex A ad quadratū ex D proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratū numerum. incommensurabilis igitur est A ipsi D longitudine. sumatur ipsarum A D media proportionalis E. est igitur vt A ad D, ita quadratum ex A ad quadratum ex E. sed A ipsi D longitudine est in commensurabilis. ergo & quadratum ex A quadrato ex E incommensurabile erit, incommensurabilis



9 huius.
Coroll. 20. sexti.
D

rabilis igitur est A ipsi E potentia. ergo propositæ rectæ lineæ rationali, à qua dicebamus mensuras sumi, vt ipsi A potentia quidem commensurabilis inuenta est D, hoc est rationalis potentia tantum commensurabilis, irrationalis vero E. irrationales enim vniuersè appellantur, quæ rationali & longitudine, & potentia incommensurabiles sunt.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et si duo numeri inter se proportionem habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos similes planos esse] *Hoc ab Euclide non demonstratur in arithmeticis, sed nos ad vigesimam sextam octaui libri demonstrauimus.*

B Exponantur enim duo numeri B C inter se proportionem non habentes, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est dissimiles plani] *Hoc in promptu est, sed tamen quomodo fiat in tertio Scholio antecedentium explicatur.*

C Et fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D, hoc enim ante traditũ est] *In corollario scilicet sexti theorematis. & quamquam hoc ex illo perspicue appareat, tamen secundum lemma, quod in græcis codicibus inuenitur hoc loco apponere non inutile iudicauimus.*

D Ergo & quadratum ex A quadrato ex E incommensurabile erit] *ex antecedenti theoremate.*

THEOREMA IX. PROPOSITIO XII.

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt.

Vtraque enim ipsarum A B ipsi C sit commensurabilis. dico & A ipsi B commensurabilem esse. Quoniam enim A commensurabilis
5 huius. est ipsi C, habebit A ad C proportionem, quã numerus ad numerum. habeat quam numerus D ad ipsum E. Rursus quoniam commensurabilis est B ipsi C, habebit C ad B proportionem, quam numerus ad numerum. habeat quam F ad G. & proportionibus datis quibuscunque, videlicet quam habet D ad E, & quam habet F ad G, sumantur numeri deinceps pro-
4 octaui. portionales in datis proportionibus H K L; sitq; vt D ad E, ita H ad K: vt autem F ad G, ita K ad L. Quoniam igitur est vt A ad C, ita D ad
22. quinti. E; sed vt D ad E, ita H ad K: erit & vt A ad C, ita H ad K Rursus quoniam est vt B ad C, ita F ad G, & vt F ad G, ita K ad L, erit & vt B ad C, ita K ad L. est autem & vt A ad C, ita H ad K. ex æquali igitur vt A ad B, ita H ad L. ergo A ad B proportionem habet, quam nume-
6 huius. rus H ad L numerum. ac propterea A ipsi B est commensurabilis. Quæ igitur eidẽ magnitudini sunt commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt. quod oportebat demonstrare.

D ...4 F. 4
E. ..4 G 8
H.. 3
K 6
L....4
A C B

SCHOLIVM.

Hoc ab identitate non conuertitur. non enim quę inter se sunt commensurabiles, & eidem commensurabiles sunt; quemadmodum neque æquales inter se eidem sunt æquales, sed contra. nam contingit & incõ

n ensurabiles

mensurabiles esse eidem, & commensurabiles; quod sequens theorema, & eius conuersum ostendet.

THEOREMA X. PROPOSITIO. XIII.

Si sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis; magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

Sint enim duæ magnitudines A B, alia autem sit C: & A quidem ipsi C commensurabilis sit; B vero eidem C incommensurabilis. Dico & A ipsi B incommensurabilem esse. si enim commensurabilis est A ipsi B, est autem & C commensurabilis ipsi A; erit & C ipsi B cõmensurabilis. quod non ponitur.



Ex anteced.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XIIII.

Si duę magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis, & reliqua eidem incommensurabilis erit.

Sint duæ magnitudines commensurabiles A B; altera vero ipsarum A alicui magnitudini C sit incommensurabilis. Dico & reliquam B ipsi C incommensurabilem esse. si enim commensurabilis est B ipsi C, est autem & A commensurabilis ipsi B; & A ipsi C commensurabilis erit: sed & incommensurabilis. quod fieri non potest. non igitur commensurabilis est B ipsi C. ergo est incommensurabilis. si igitur duæ magnitudines cõmensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis, & reliqua eidem incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.



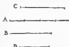
12. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iis, quæ proxime demonstrata sunt, licet illud etiam demonstrare.

Quæ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.

Sint duæ magnitudines incommensurabiles A B: sitque C ipsi A commensurabilis: & D commensurabilis ipsi B. Dico C D inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A C commensurabiles sunt, atque est A ipsi B incommensurabilis; & C ipsi B incommensurabilis erit. Rursus quoniam B D commensurabiles sunt, est autem B incommensurabilis ipsi C; & D ipsi C incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.



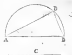
Ex anteced. dente.

LEMMA

Duabus datis rectis lineis inæqualibus inuenire id, quo maior plus potest, quàm minor.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B C, quarum maior sit AB. oportet inuenire id, quo AB plus potest, quam C. Describatur in recta linea AB semicirculus ADB, & in eo aptetur recta linea AD, ipsi C æqualis, & D B iungatur. perspicuum est angulum ADB rectum esse, & ipsam AB plus posse, quàm A D, hoc est quàm C, quantum est rectæ lineæ DB quadratum.

3. quarti. 31. tertij. 47 primi



Similiter autem & datis duabus rectis lineis, quæ ipsas potest, hoc modo inuenietur.

Sint duæ datæ rectę lineę AD DB; & oporteat inuenire rectam lineam, quæ ipsas possit. exponantur enim AD DB, ita vt rectum angulum contineant ADB. & AB iungatur. rursus perspicuum est rectam lineam AB ipsas AD DB posse.

47 primi.

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XV.

Si quattuor rectę lineę proportionales fuerint; prima vero tãto plus possit, quàm secunda, quãtum est quadratum rectæ lineæ sibi cõmensurabilis longitudine: & tertia tãto plus poterit, quàm quarta, quantum est quadratum rectę lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit, quàm secunda, quãtum est quadratum rectę lineæ sibi incommensurabilis longitudine; & tertia, quàm quarta tanto plus poterit, quantum est quadratum rectę lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Sint quattuor rectæ lineæ proportionales A B C D, sitq; ut A ad B, ita C ad D; & A quidẽ plus possit, quam B, quadrato, quod fit ex E: C vero plus possit, quàm D, quadrato ex F. Dico si A ipsi E sit commensurabilis, & C ipsi F cõmensurabilem esse. si uero A ipsi E sit incommensurabilis, & C ipsi F incommensurabilem esse. quoniam enim est vt A ad B, ita C ad D, erit vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratum ex C ad id, quod ex D quadratum. sed quadrato quidem, quod fit ex A ęqualia sũt quadrata, quæ ex ipsis E B; quadrato autem ex C æqualia sunt quadrata ex F D. vt igitur quadrata, quæ ex E B ad quadratum ex B, ita quadrata, quæ ex F D ad quadratum ex D: & diuidẽdo vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F ad quadratũ ex D. quare vt E ad B, ita est F ad D: & conuertendo vt B ad E, ita D ad F. est autem & vt A ad B, ita C ad D. ex æquali igitur vt A ad E, ita est C ad F. ergo si A est commensurabilis ipsi E, & C ipsi F erit commensurabilis; si vero incommensurabilis est A ipsi E, & C ipsi F incommensurabilis erit. Si igitur quattuor rectæ lineæ proportionales sint, & reliqua. quod oportebat demonstrare.

22 sexti. 22 sexti. 10. huius.



PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XVI.

Si duæ magnitudines commensurabiles componantur, & tota

magnitudo vtrique ipsarum cõmensurabilis erit. quòd si tota magnitudo uni ipsarum sit commensurabilis, & quę à principio magnitudines commensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines commensurabiles A B B C. Dico & totam magnitudinem A C vtrique ipsarum A B B C commensurabilem esse. Quoniam enim commensurabiles sunt A B B C, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, sitq; D. & quoniam D metitur ipsas A B B C, & totam A C metietur: metitur autem & A B B C. Ergo D magnitudines A B B C, & ipsam A C metitur. commensurabilis igitur est A C vtrique ipsarum A B B C. Sed A C vni ipsarum A B B C sit commensurabilis, videlicet ipsi A B. Dico & A B B C commensurabiles esse. Quoniam enim commensurabiles sunt C A A B, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, & sit D. Itaque quoniam D metitur ipsas C A AB, & reliquam B C metietur. metitur autem & A B. ergo D ipsas A B B C metitur: ac propterea A B B C commensurabiles sunt. Si igitur duæ magnitudines commensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit, & reliqua. quod oportebat demonstrare.

1 diff.
4 com. not.
3 com. not.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XVII.

Si duæ magnitudines incommensurabiles componãtur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. quòd si tota magnitudo uni ipsarum sit incõmẽsurabilis, et quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles A B B C. Dico & totam magnitudinem A C vtrique ipsarum AB BC incommensurabilem esse. si enim non sunt incommensurabiles CA AB, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, sitq; D, si fieri potest. Quoniam igitur D metitur ipsas CA AB, & reliquam B C metietur. metitur autem & B A. ergo D ipsas A B B C metitur; ac propterea commensurabiles sunt AB BC. ponuntur autem & incommensurabiles. quod fieri non potest. non igitur ipsas C A AB metietur aliqua magnitudo. quare C A AB incommensurabiles sunt. similiter & AC CB incõmensurabiles esse demõstrabimus. ergo AC vtrique ipsarum AB BC est incõmenurabilis. sed AC vni ipsarũ AB BC incõmensurabilis sit; & primũ ipsi A B. Dico & AB BC incõmẽsurabiles esse. si enim sunt cõmensurabiles, eas aliqua magnitudo metietur. metiatur, & sit D. qm̃ igitur D metitur ipsas AB BC, & totã AC metietur. metitur autem & AB. ergo D ipsas CA AB metitur: ideoq; C A A B commensurabiles sunt. ponuntur autem & incommensurabiles. quod fieri non potest. non igitur ipsas AB BC metietur aliqua magnitudo. quare AB BC incommẽsurabiles erũt. similiter demonstrabimus A C, & reliquæ B C esse incommensurabilem. Si igitur duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & reliqua. quod oportebat demonstrare.

4 com. not.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonstratis illud etiam constat.

Si tota magnitudo ex duabus magnitudinibus composita vni componentium sit incommensurabilis, & reliquæ incommensurabilis erit.

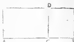


Sit enim tota magnitudo A C incommensurabilis magnitudini AB. Dico AC etiam reliquae BC incommensurabilem esse. Quoniā enim C A est incommensurabilis ipsi A B, erunt A B, B C incommensurabiles. & quoniam AB BC incommensurabites sunt, & A C vtrique ipsarum incommensurabilis erit. quod oportebat demonstrare.

Ex demonstratis.

L E M M A. I.

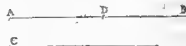
Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiēs figura quadrata, parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod partibus rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.



Ad aliquam enim rectam A B applicetur A D parallelogrammum, deficiēs figura quadrata DB. Dico parallelogrammum A D rectangulo A C B æquale esse; quod quidem per sese patet. quoniam enim quadratum est DB, erit DC ipsi CB æqualis, atque est parallelogrammum AD, quod AC CB continetur. si igitur ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, & reliqua. quod oportebat demonstrare.

L E M M A II.

Si duę rectæ lineæ inęquales sint, quarta autem pars quadrati, quod à minore fit, ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, quod applicatum est per bipartitam sectionem non transit.



Si enim fieri potest, sint duæ rectæ lineę inęquales AB C: quarta autem pars quadrati, quod fit à minori C ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; quæ scilicet, fit à DB ipsius AB dimidiæ, erit ex præcedenti lemmate id, quod applicatum est æquale ei, quod partibus AD DB continetur, hoc est æquale quadrato ex D B. etenim A B bifariā in puncto D secatur. quod igitur quater fit à DB ęquale est quadruplo eius, quod applicatum est. sed quod quater fit à D B est ipsius AB quadratum; nam longitudine duplæ potentia quadruplę sunt: quadruplum vero eius, quod applicatur est quadratum ipsius C. ergo quadratum, quod fit ex A B est æquale quadrato ex C, hoc est quadratum maioris æquale quadrato minoris. quod fieri non potest. non igitur quarta pars quadrati, quod fit à C applicata ad A B per bipartitam sectionē trāsit.

L E M M A. III.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati minoris ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

Sint datę duæ rectæ lineæ inæquales A B CD, sitq; maior A B. & oporteat facere quod propositum est. secetur C D bifariā in E. manifestum est quartam partem quadrati, quod fit à C D esse quadratum ex CE. & describatur in recta linea A B semicirculus, seceturq; A B bifariā in F: & à puncto F ipsi A B ad rectos angulos ducatur

ducatur F G. Quoniam igitur A B maior est, quam C D, erit & ipsius A B dimidia maior, quàm dimidia ipsius C D, hoc est maior quàm C E. ponatur F H æqualis C E, & per H ipsi A B parallela ducatur HK. atque à puncto K ad AB perpendicularis ducta K L, iungantur A K KB. rectangulum igitur est triangulum A K B, & ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est K L. ergo rectangulum A L B est æquale quadrato, quod fit ex K L. producatur K L, & ponatur ipsi LB æqualis LM, & figura compleatur. quadratum igitur, quod fit ex K L, hoc est quod ex F H est æquale parallelogrammo A M. sed quod fit ex F H est æquale quadrato ex C E, hoc est quartæ parti quadrati ex C D: estq; A M deficiens figura quadrata. quod ipsum facere oportebat. 8 & 17. sexti.

THEOREMA XV. PROPOSITIO. XVIII.

Si duæ rectæ lineæ inæquales sint, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; maior tanto plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si maior tanto plus posit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales A BC, quarum maior B C; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori A, hoc est ei, quod fit à dimidia ipsius A, æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficiens figura quadrata, & sit quod continetur BD DC, sitq; B D ipsi D C commensurabilis longitudine. Dico B C plus posse, quàm A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. secetur enim B C bifariam in puncto E, & ipsi D E æqualis ponatur E F. reliqua igitur D C est æqualis B F. & quoniam recta linea B C secatur in partes quidem æquales ad E punctum, in partes vero inæquales ad punctum D; erit B D C rectangulum vnà cum quadrato ex E D æquale ei, quod fit ex E C quadrato, & eorum quadrupla quod igitur quater BD DC continetur vnà cum quadrato, quod fit ex E D quater æquale est quadrato quod quater fit ex E C. Sed ei quidem, quod quater B D DC continetur æquale est quadratum ex A: ei vero, quod quater fit ex D E æquale est quadratum, quod ex D F, etenim D F ipsius D E est dupla: & ei quod quater fit ex EC æquale est quadratum quod ex B C; rursus enim B C dupla est ipsius E C. ergo quadrata, quæ fiunt ex A DF æqualia sunt ei, quod fit ex B C quadrato; ac propterea quadratum, quod fit ex B C maius est, quàm quadratum, quod ex A, quadrato, quod ex DF. recta igitur linea B C tanto plus potest, quàm A, quantum est ipsius D F quadratum ostendendum est & B C ipsi DF commensurabilem esse. Quoniam enim B D commensurabilis est ipsi D C longitudine, erit & BC ipsi CD longitudine commensurabilis. sed D C ipsis C D BF est commensurabilis longitudine, æqualis eium

Margin: A; 5. secundi.; 5 quinti.; B; C

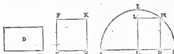
D lis enim est C D ipsi B F. quare & BG ipsis BF CD longitudine est commensurabi-
E lis, & reliquę igitur F D longitudine commensurabilis erit. ergo B C plus potest, quàm A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Sed BC plus possit quàm A, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A æquale parallelogrammũ ad B C applicetur, deficiens figura quadrata; & sit quod continetur BD DC. ostendendum est B D ipsi D C lõgitudine commẽsurabilem esse. Iisdem enim constructis similiter demonstrabimus B C plus posse, quam A, quadrato rectæ lineæ FD. sed B C plus potest, quàm A, qua-
F drato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. ergo B C commensurabilis est ipsi F D longitudine. & reliquę igitur, vtraque scilicet B F D C longitudine est commensurabilis, sed vtraque B F D C ipsi D C commẽsurabilis est longitudine;
G etenim B F est ęqualis D C. ergo & B C ipsi C D longitudine est commensurabilis.
H ex quibus constat B D ipsi D C longitudine commensurabilem esse. Si igitur duę rectæ lineę inęquales sint, & reliqua. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori A, hoc est ei, quod fit à dimidia ipsius A æquale parallelogrammum ad B C applicetur, deficies figura quadrata] *ex antecedente lemmate. Hoc autem nihil aliud est, nisi rectam lineam maiorem, ita secare, vt rectangulum ipsius portionibus contentum quartae parti quadrati minoris sit aequale. sed possumus illud idem vniuersalius explicare in hunc modum.*

Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulum, quod partibus cõtinetur, sit ęquale dato rectilineo. oportet autem datum rectilineũ minus esse quadrato, quod à dimidia describitur.

Sit data recta linea A B, diuisa bifariam in C; datumq́; rectilineum D. & oporteat facere quod propositum est. Describatur in A B semicirculus A E B, & à puncto C ipsi A B ad rectos angulos ducatur C E: deinde rectilineo D fiat aequale quadratum F G H K. erit eius latus F G minus 25. sexti.



ipsa A C, hoc est ipsa C E. quare à recta linea C E abscindatur C L, quae sit aequalis F G: & per L quidem ducatur L M parallela ipsi A B: per M vero ducatur M N parallela C E. Dico rectam lineam A B sectam esse in puncto N, vt oportebat, hoc est rectangulum A N B rectilineo D aequale esse. aequale etenim est quadrato ex M N. sed cum M N sit aequalis ipsi C L, hoc est ipsi FG, erit rectãgulũ ANB quadrato FGHK, hoc est rectilineo D ęquale. quod facere oportebat.

Similiter & datum numerum in duas partes ita diuidemus, vt qui ex ipsis producitur dato numero sit ęqualis. oportet autem datum numerum, cui ęqualis esse debet, quadrato dimidij minorem esse.

Sit datus numerus 20, quem oporteat ita diuidere, vt qui ex partibus producitur, sit aequalis dato numero 75. Accipiatur ipsius 20 medietas, quae est 10, & in se multiplicetur, faciet 100, à quo detrahemus datum numerum, videlicet 75, & relinquetur 25. huius igitur latus 5 additũ ipsi 10 constituit 15, & detractum ab eodem constituit 5. Dico 20 in has partes ita diuisum esse, vt oportebat, hoc est eum, qui ex ipsis producitur, aequalem esse dato numero 75. Quoniam enim 20 diuiditur in duas partes aequales, & in duas partes inęquales, numerus planus, qui fit ex partibus inequalibus vnà cum quadrato numeri inter ecti aequalis est ei, qui fit a dimidio quadrato, quod demonstratum est à Barlaam monacho in theoremate quinto eorum, quae nos ad 15 noni apposuimus

appofuimus. ergo qui fit ex 15, & 5 vnà cũ quadrato ipfius 5 eſt aequalis quadrato ipnidy, videlicet 100: & detracto communi quadrato 25, erit qui producitur ex 15, & 5 aequalis dato numero 75. quod facere oportebat.

Sed ei quidem, quod quater DB BC continetur ęquale eſt quadratum ex A]*Ponitur enim parallelogrammum rectãgulum D B C aequale quartae parti quadrati, quod fit ex A.* B

Erit & BC ipſi CD longitudine cõmẽſurabilis]*Ex prima parte ſextae decimae huius.* C

Quare BC ipſis BF CD longitudine eſt commenſurabilis]*Ex 12 huius.* D

Et reliqua igitur FD longitudine commenſurabilis erit]*Ex eo, quod nos ad 17. huius demonſtrauimus. ſumantur enim BF DC ſimul, ac ſi vna linea eſſet.* E

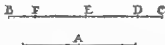
Et reliquę igitur, vtrique ſcilicet BF DC longitudine eſt commenſurabilis]*Ex eodem theoremate, quod ad 17 huius appoſuimus.* F

Ergo & BC ipſi DC longitudine eſt commenſurabilis.]*Ex 12 huius.* G

Ex quibus conſtat BD ipſi DC longitudine commenſurabilem eſſe]*Ex ſecunda parte ſextae decimae huius.* H

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XIX.

Si duæ rectę lineæ inæquales ſint, quartę autem parti quadrati, quòd fit à minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes incommenſurabiles longitudine ipſam diuidat; maior tanto plus poterit, quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quòd ſi maior tanto plus poſsit, quàm minor, quantum eſt quadratum rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartę autem parti quadrati, quod fit à minori ęquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet.



Sint duæ rectæ lineæ inæquales A BC, quarum maior B C: quartæ autem parti quadrati, quòd fit à minori A, æquale parallelogrammum ad ipſam BC applicetur, deficiẽs figura quadrata; & ſit quod continetur B D D C; ſitq; BD ipſi DC longitudine incommenſurabilis. Dico B C plus poſſe, quàm A quadrato rectæ lineę ſibi longitudine incommẽſurabilis. Iiſdem enim, quę ſupra, conſtructis, ſimiliter oſtendemus ipſam BC plus poſſe, quàm A, quadrato rectę lineæ DF. oſtendendum igitur eſt B C ipſi D F longitudine incommenſurabilem eſſe. Quoniam enim incommenſurabilis eſt B D ipſi D C, erit & BC ipſi C D longitudine incommenſurabilis. *17. huius.* ſed DC incommenſurabilis eſt vtriſque BF DC. ergo *14 huius.* & BC ipſis BF DC longitudine eſt incommenſurabilis. ac propterea reliquę F D incommenſurabilis eſt longitudine; *Ex demonſtratis ad 17. huius.* & BC plus poteſt, quam A. quadrato rectæ lineę ſibi longitudine incommẽſurabilis. Sed BC rurſus plus poſsit, quàm A, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. quartæ autem parti quadrati, quod fit ex A æquale parallelogrammum ad BC applicetur, deficiens figura quadrata; & ſit quod BD DC continetur. oſtendendum eſt BD ipſi DC longitudine incommenſurabilem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus BC plus poſſe quàm A, quadrato rectæ lineæ DF. ergo oſtendendum relinquitur BC plus poſſe, quam A, quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. incommenſurabilis igitur eſt BC ipſi DF longitudine. *Ex demonſtratis ad 17. huius* quare & reliquę, videlicet vtrique BF DC eſt incommenſurabilis. ſed vtraque BF DC commenſurabilis eſt longitudine ipſi *14 huius.* DC. ergo & BC ipſi CD eſt incommenſurabilis longitudine; ac propterea diuiden- *17. huius.*

do

do BD ipsi DC longitudine incommensurabilis erit. Si igitur duę rectæ lineę inæquales sint, & reliqua. quod oportebat demonstrare.

SCHOLIVM.

Hactenus tractauit de commensurabilibus, & incommensurabilibus, nunc ad rationales & medias transit.

LEMMA. I.

Quoniam demonstratum est longitudine commensurabiles omnino & potentia commensurabiles esse. potentia vero commensurabiles non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles: manifestum est, si expositæ rationali aliqua commensurabilis fuerit longitudine, illam rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia, longitudine enim commensurabiles omnino & potentia commensurabiles sunt. Sive ro expositę rationali aliqua fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si expositæ rationali rursus aliqua commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic rationalis potentia tantum commensurabilis.

Coroll. 9. huius.

PROCLI LEMMA. II.

Rationales vocat eas, quæ expositæ rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solum. sunt autem & aliæ rectæ lineæ, quæ longitudine quidem expositę rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur rationales, & commensurabiles inter se, quatenus rationales, sed commensurabiles inter se vel longitudine, & potentia, vel potentia solum. & si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ rationales longitudine commensurabiles, vt intelligatur etiam potentia commensurabiles esse: si vero potentia solum, inter se sint commensurabiles, dicuntur ipsæ quoque rationales potentia solum commensurabiles.

At vero rationales commensurabiles esse ex his constat.

Rationales commensurabiles sunt. 12. huius.

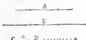
Quoniam enim rationales sunt, quæ expositę rationali sunt commensurabiles, quæ vero eidem commensurabiles etiam inter se commensurabiles sunt; sequitur rationales commensurabiles esse. quod demonstrare oportebat.

LEMMA III.

Inuenire duas rationales longitudine commensurabiles.

Exponatur

Exponatur rationalis A, & duo numeri C D vel quadrati, vel simpliciter proportionem habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & fiat vt C ad D, ita quadratum ex A ad quadratum ex E: erunt per ea, quae demonstrata sunt A E longitudine commensurabiles.



Ex corol. 8. huius.
In 9. huius.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO. XX.

Quod rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis secundum aliquem praedictorum modorum continetur rectangulum rationale est. A

Rationalibus enim longitudine commensurabilibus rectis lineis A B B C contineatur rectangulum A C. Dico A C rationale esse. describatur ex A B quadratum A D. ergo A D est rationale. Et quoniam A B commensurabilis est ipsi B C longitudine, atque est A B aequalis BD; erit DB ipsi BC longitudine commensurabilis. est autem & vt DB ad BC, ita DA ad AC: & commensurabilis est DB ipsi BC. ergo & DA ipsi AC commensurabile erit, estq; rationale DA. quare & AC est rationale. quod igitur rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis cõtinetur rectangulum rationale est. quod demonstrare oportebat.



B

1 sexti.
C
D

F. C. COMMENTARIVS.

Secundum aliquem praedictorum modorum] *Rectarum enim linearum A B BC vel vtreque sint expositae rationali longitudine commensurabiles, vel vtreque eidem commensurabiles potentia solum, sed inter se commensurabiles longitudine. quocunque autem modo se habeãt, quod ex ipsis fit rectangulum rationale est, & eadem demonstratio in omnibus congruit.* A

Ergo AD est rationale] *Ex diffinitione 9 siue enim longitudine sint commensurabiles expositae rationali, siue potentia solum, earum quadrata rationalia sunt, quippe quae quadrato exposito sitae rationalis sint commensurabilia.* B

Ergo & DA ipsi AC commensurabilis erit] *Ex decima huius.* C

Estq; rationale DA. quare & AC est rationale] *rationali namque commensurabile & ipsum rationale est. quod ita demonstrabitur.* D

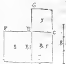
Sit expositae rationalis quadratum A, & ipsi commensurabile sit spacium B. erit B rationale ex 9 diffinitione. sit rursus aliud spacium C ipsi B commensurabile. Dico & C rationale esse. Quoniam enim spacia A C eidem spacio B sunt commensurabilia, & inter se commensurabilia sunt ex 12 huius. Quòd cum C ipsi A sit commensurabile, etiam rationale erit ex 9 diffinitione. quod demonstrare oportebat.



Vt autem ea, quae hoc loco de rationalibus dicuntur, manifestiora sint, & quasi ante oculos ponantur, libuit nonnulla theoremata adiungere, quae ad ea etiam, quae sequuntur, vtilia erunt.

THEOREMA I.

Quod duabus datis rectis lineis rationalibus continetur rectangulum datũ erit.
Duabus enim datis rectis lineis rationalibus AB AD contineatur rectangulum A C. Dico A C datum



datum esse. Exposita enim rationali E, vel vtraque AB AD ipsi E longitudine est commensurabilis, vel vtraque commensurabilis est potentia solum, vel altera quidem longitudine, altera potentia solum commensurabilis. & si quidem vtraque est commensurabilis longitudine, rectangulum, quod ipsis continetur datum erit ex ijs, quae Ioannes Regiomontanus in primo libro de triangulis propositione 16 demonstrauit; & ex ijs, quae nos demonstrauimus in commentarijs in 3 propositionē libri Archimedis de circuli dimensione. si vero vtraque expositae rationali potentia solum est commensurabilis, nihilominus rectangulum datum erit. fiant enim ex AB AD quadrata AF CG. & quoniam AB AD potentia sunt commen- 5.huius. *surabiles, earum quadrata commensurabilia erunt. ideoq; inter se proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. sit autem quadratum AF ad quadratum CG, vt numerus H ad numerum K; & H ipsum K multiplicans faciat M, cuius* 17.sexti. *radix sit N. erunt igitur tres magnitudines H N K deinceps proportionales; rectangulum enim contentum H K est aequale quadrato ex N, hoc est ipsi M. & quoniam quadratum FA ad rectangulum AC est vt FB ad* 1.sexti. *BC, hoc est vt AB ad BC; vt autem AB ad BC, hoc est ad BC, ita rectangulum AC ad CG quadra-* 11 quinti. *tum: erunt & tres hę magnitudines deinceps proportionales. quādo autem tres magnitudines dein-* 10 diffi. quinti. *ceps proportionales fuerint, prima ad tertiam duplam habebit proportionem eius, quam habet ad secundam. quadratum igitur AF ad quadratum CG duplam proportionem habet eius, quam habet ad rectangulum AC. sed quadratum AF ad quadratum CG est, vt numerus H ad ipsum K. & cum H ad K similiter duplam proportionem habeat eius, quam habet ad N, erit quadratum FA* 1 datorum Euclid. *ad rectangulum AC, vt H ad N. sunt autem magnitudines H N datae; ideoq; data ipsarum pro-* 2. Datorum Euclid. *portio. & datum est quadratum FA. quare & rectangulum AC datum erit. Eadem ratione demonstrabimus rectangulum datum esse, si altera datarum linearum sit longitudine commensurabilis, altera vero potentia solum. quod demonstrare oportebat.*

O P E R A T I O.

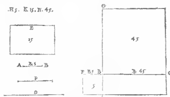
Si datae magnitudines numerorum radices fuerint, numeros ipsos inter se multiplicabimus; si vero earum altera numerus fuerit, altera numeri radix, quadratum numeri multiplicabimus per numerum, cuius altera est radix, & eius, qui producitur radicem dicemus esse rectangulum, quod duabus datis rectis lineis continetur. atque hęc nihil aliud est, nisi multiplicatio, quam dicunt, radicum quadratarū inter se se. vt si AB sit radix 5, AD radix 3, multiplicabimus 5 per 3 fiet 15, cuius radix erit id, quod producitur ex ℞ 5, & ℞ 3 inter se ductis. si vero AB sit 2, AD ℞ 5, multiplicabimus quadratum ipsius 2 videlicet 4 per 5, & fiet 20, cuius radix erit productum, quod quęritur.

T H E O R E M A II.

Si ad datam rectam lineam rationalem applicetur spacium datum, & latitudo, quam facit, data erit.

Sit data recta linea rationalis AB, & spacium datum E. Dico si ad rectam lineam AB spacium E applicetur, latitudinem, quam facit, datam esse. vel igitur recta linea AB expositae rationali commensurabilis est longitudine, vel potentia solum; vel spacium E rationale est, vel irrationale, quod medium appellatur. & si quidem recta linea AB longitudine est commensurabilis, & spacium E rationale, illud manifestum erit ex ijs, quae Regiomontanus demonstrauit in primo libro de triangulis propositione 17. & ex ijs, quae nos eodem in loco, de quo proxime dictum est, demonstrauimus. si vero AB est commensurabilis potentia solum, & spacium E siue rationale, siue irrationale, vel AB est longitudine commensurabilis, & spacium E irrationale, latitudo, quā facit, data erit. Sit primum recta linea AB potentia solum commensurabilis, & spacium E rationale. Quoniam igitur AB rationalis est, & spacium E rationale, erit quadratum ipsius AB spacio

E commensu-



E commensurabile; ac propterea ad ipsum proportionem habebit, quam numerus ad numerum. habeat quam numerus H ad numerum K; fiatq; ex corollario sextae propositionis huius libri vt H ad K, ita recta linea AB ad aliam rectam lineam O: & inter AB & O sumpta media proportionali P, erit vt numerus H ad numerum K, ita quadratum rectae lineae AB ad rectę lineae P quadratum. sed & quadratũ rectae lineae AB ad spaciũ E erat, vt numerus H ad numerũ K. Cum igitur quadratum ex AB ad spacium E eãdem proportionem habeat, quam ad quadratum ex ipsa P, erit quadratũ ex P spacio E aequale. Itaque ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammum rectangulum AC aequale quadrato ex P, hoc est aequale spacio E; latitudinem faciens BC. 9 quinti.
& ex AB BC describãtur quadrata AF CG. numerus autem K se ipsum multiplicans faciat M, & M per K diuiso exeat N. erunt tres magnitudines HKN deinceps proportionales; rectangulũ enim ipsis KN contentum est aequale quadrato ex K. Quoniam igitur quadratum FA ad rectangulum AC est vt rectangulum AC ad CG quadratum, quod superius ostensum est. quadratum autem FA ad rectangulum AC est, vt numerus H ad numerum K; erit & rectangulum AC ad quadratum CG, vt K ad N. sed datum est quadratum FA, & rectangulum AC; quòd numeri K N sint dati. ergo & quadratum CG datum erit, & data ipsius radix BC, videlicet latitudo, quam facit spacium E ad rectam lineam AB applicatum. 2. datorum Euclid.

Sit rursus recta linea AB potentia solum commensurabilis, & spacium E irrationale. ergo quadratum rectae lineae AB incommensurabile est spacio E. sit autem quadratum rectae lineae AB ad spaciũ E, vt H ad K, hoc est ad radicẽ numeri M: & H se ipsum multiplicans faciat L. cum igitur LM quadrati sint, & eorum latera HK, habebit L ad M duplam proportionem eius, quam habet H ad K. itaque fiat vt L ad M, ita recta linea AB ad rectam lineam Q: & inter AB & Q sumatur media proportionalis O. habebit igitur AB ad Q duplam proportionem eius, quam habet ad O. atque est vt L ad M, ita AB ad Q. ergo vt H ad K, ita AB ad O. Rursus inter AB & O inueniatur media proportionalis P; erit vt AB ad O, ita quadratum ex AB ad



quadratum ex P. vt igitur H ad K, ita est quadratum ex AB ad quadratum ex P. sed erat vt H ad K, ita quadratum ex AB ad spacium E. Ergo quadratum ex AB ad quadratum ex P eandem habet proportionem, quam ad spacium E. ideoq; quadratum ex P spacio E aequale erit. Applicetur ad rectam lineam AB parallelogrammum rectangulum AC, aequale quadrato ex P, hoc est spacio E aequale, quod faciat latitudinem BC: deinde ex AB BC fiant AF CG quadrata; & rursus ipsarum H K magnitudinum inueniatur tertia proportionalis, nempe ducta K inter se se; & quod producitur diuiso per B, vt proxime dictum est. sit autem tertia proportionalis N. Eadem ra- 9 quinti.

t.one demonstrabitur vt quadratum ex AB ad rectangulum AC, ita esse rectangulum AC ad CG quadratum. Quoniam igitur H K N deinceps proportionales sunt, quadratum autem FA ad rectangulum AC est vt H ad K; erit & rectangulum AC ad CG quadratum, vt K ad N. sed datum est quadratum AF, & rectangulum AC, cum dentur HK. ergo & quadratum CG dabitur, & eius radix BC, hoc est latitudo, quae fit spacio E ad rectam lineam AB applicato. Non aliter demonstrabitur si recta linea AB sit longitudine commensurabilis, et spacium E irrationale.

OPERATIO.

Si datae magnitudines radices numerorũ fuerint, numerus, qui spacium notum reddit, diuidatur per alterum numerum; si vero altera fuerit numeri radix, numerus, cuius ea est radix, diuidatur per quadratum alterius numeri; vel contra quadratum numeri, per numerum cuius est radix, diuidatur; & eius, quod exibit, radix erit latitudo, quam facit spacium ad rectã lineam applicatum. est autem hęc diuisio radicum inter se se, quam dicunt. vt si ℞ 15 diuidenda sit per ℞ 5, diuidemus 15 per 5, & exibit 3, cuius radix est quod fit ℞ 15 per ℞ 5 diuisa. si vero ℞ 20 diuidere velimus per 2, diuidemus 20 per quadratum ipsius 2, videlicet per 4, & exibit 5, cuius radix est id, quod quęritur.

THEOREMA III.

Quæ ex duabus rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis componitur recta linea data erit.



Ex duabus enim datis rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis AB BC componatur recta linea AC. Dico AC datam esse. vel igitur datae rectae lineae expositae rationali longitudine commensurabiles sunt, vel commensurabiles potentia solum, sed inter se lõgitudine commensurabiles. Et si quidem expositae rationali sint commensurabiles longitudine, quae ex ipsis componitur recta linea data erit, ex demonstratis à Ioanne Regiomontano in primo libro de triangulis, propositione tertia, & ex iis, quae nos eodem in loco demonstrauimus. si uero expositae rationali sint commensurabilis potentia solum, sed inter se longitudine commensurabiles, earum quadrata proportionem habebunt; quam quadra-

9. huius

tus numerus ad quadratum numerum. Itaque habeat rectae lineae AB quadratum ad quadratum rectae lineae BC proportionem eam, quam numerus L ad numerum M. erũt numeri L M similes plani. si enim quadrati sint, rectae lineae AB AC

18. octaui.

longitudine erunt commensurabiles. quod non ponitur. ergo inter L & M cadet vnus medius proportionalis. cadat, & sit N. describaturq́; ex recta linea AC quadratum ACDE; et iuncta AD ducatur per B quidem alterutri ipsarum AE CD parallela BGF: per G vero ducatur HGK alterutri ipsarum AC ED parallela. similiter vt supra demonstrabitur quadratum AG ad rectangulum GC ita esse, vt rectangulum GC ad GD quadratum. sed quadratum AG ad quadratum GD est vt numerus L ad numerum M. ergo quadratum AG ad rectangulum GC est vt numerus L ad ipsum N; & rectangulum GC ad quadratum GD, vt N ad M. est autem rectangulum EG, quod est alterum supplementorum, aequale reliquo GC. Quadratum igitur AG ad gnomonem EKB est vt L ad M vnà cum duplo ipsius N: & conuertendo gnomon EKB ad quadratum AG, vt M vnà cum duplo ipsius N ad ipsum L. ergo componendo, rursusq́; conuertendo quadratum AG ad totum AD quadratum, vt L ad compositum ex L & M vnà cum duplo ipsius N. sed compositum hoc est datum, quippe cum dati sint numeri ipsum componentes. ergo et totum quadratum AD datum erit, et data eius radix, quae ex duabus datis rectis lineis constat. atque illud est, quod demonstrandum proponebatur.

OPERATIO.

Numeros respondentes quadratis datarum linearum simul coacervabimus vnà cum duplo lateris

meris quadrat. eius, qui ex eorum inter se multiplicatione producitur, hoc est vnà cum duplo numeri proportionalis, qui inter ipsos medius interijcitur; et huius compositi radix erit recta linea, quę ex duabus datis rectis lineis constat. atque hęc est radicum inter se additio, quam dicunt: vt si radix 3 addenda sit radici 12, primum iungemus 3 cum 12, deinde multiplicantes 12 per 3, eius, qui producitur, videlicet 36 latus, quod est 6 duplabimus: et omnibus simul coaceruatis fient 27, cuius radix est recta linea, quam quęrimus: Quemadmodum autem ex duabus rationalibus longitudine commensurabilibus, si inter se componantur, vna recta linea fit, sic ex duobus spacijs medijs commensurabilibus, si itidem inter se componantur vnum fiet medium. Quòd si duae rationales lõgitudine incommensurabiles inter se addendae sint, vt R 3. R 5, dicemus R 3 vnà cum R 5, vel R 3 addita R 5, vel vtemur hac voce plus, quod est in communi vsu, hoc modo R 3 plus R 5; et 3 plus R 8, et ita fiet etiam si plures sint, quàm duae, vt 2 plus R 3 plus R 5. Quòd si duae sint, dicentur ex binis nominibus, seu binomia, vt Campanus, et recentiores. si vero tres dicentur ex tribus nominibus vel trinomia. et eodem modo in alijs.

THEOREMA IIII.

Duarum datarum rationalium, quæ inæquales sint, & longitudine commensurabiles differentia data erit.

Sint duae datae rationales inaequales, & longitudine commensurabiles rectae lineae AB AC, quarum differentia sit BC. Dico BC datam esse. si enim AB AC sint expositae rationali longitudine commensurabiles, earum differentia data erit ex demonstratis à Ioanne Regiomontano in libro primo de triangulis propositione 4, & ex ijs, quae à nobis eodem in loco demonstrata sunt. si vero expositae rationali commensurabiles sint potentia solum, sed inter se longitudine commensurabiles, earum quadrata inter se proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. 9. huius *habeat igitur rectae lineae AB quadratum ad quadratum rectae lineae AC proportionem eam, quam numerus L ad numerum M. erunt numeri LM similes plani; ideoque inter eos cadet vnus medius proportionalis.* 18. octaui *cadat, sitque N: & ex recta linea AC describatur quadratum ACDE, & figura compleatur, quemadmodum superius. producta vero CA vsque ad O, ita vt AO, sit aequalis AB, quadratum OH describatur, quod quidem quadrato rectae lineae AB, hoc est ipsi AG aequale erit. atque est quadratum quidem OH ad rectangulum HC, vt OA ad AC: rectangulum vero HC ad quadratũ CE, vt CK ad CD, hoc est vt OA ad AC. vt igitur quadratum OH ad rectangulum HC, ita est rectangulum HC ad CE quadratum. sed & numeri LNM deinceps proportionales sunt, & quadratum OH ad quadratum CE est vt L numerus ad numerum M. ergo quadratum OH ad rectangulum HC erit vt L ad N, & rectangulum HC ad quadratum CE, vt N ad M. quòd cum rectangulum EG sit aequale rectangulo GC, supplementa etenim sunt, addito vtrique aequali quadrato, erit rectangulum HC aequale rectangulo FH vnà cum quadrato HO. si igitur à duobus quadratis OH, AD auferatur duplum rectanguli HC, quod quidem rectis lineis CA AB continetur, reliquum erit quadratum FK; cuius latus GK rectae lineae BC est aequale. quod etiam in septima propositione secundi libri demonstratum est. & quoniam numeri LNM sunt dati, & quadrata OH CE data erunt, & rectangulum HC, atque eius duplum. ergo & quadratum FK, & eius latus BC dabitur. quod demonstrare oportebat.*

OPERATIO.

Numeros respondentes quadratis datarum linearum simul iungemus, & ab eo, qui factus est, auferemus duplum numeri, qui inter ipsos medius proportionalis interijcitur. relinquetur enim

quadratum, cuius radix erit recta linea, quam quęrimus. atque hęc est radicum quadratarum subtractio, quam dicunt. Vt si à radice 27 auferenda sit radix 3; iungemus 27 cum 3 fient 30, à quo auferemus duplum numeri medij proportionalis inter 3, et 27 qui est 9, uidelice 18, & relinquentur 12, cuius radix est ea, quam quęrimus. eodem modo & spaciorum mediorum inęqualium, quae commensurabilia sint, differentia inuenietur. si uero ab aliqua rationali auferenda sit alia minor, quae ipsi longitudine sit incommensurabilis. vt si à ℞ 5 auferre velimus ℞ 3, dicemus ℞ 5 dēpta ℞ 3, vel vtemur hac voce minus, vt nunc solent, hoc modo ℞. 5 minus ℞ 3, & ℞ 6 minus ℞ 4, quas Euclides appellat apotomas, Campanus et recentiores residua, seu recisa.

Si igitur recta linea AB sit ℞ 3, & recta BC ℞ 12, erit ex ante demonstratis in primo antecedentium theorematum, rectangulum AC ℞ 36, hoc est 6. & rursus si AB sit ℞ 8, & BC ℞ 18, erit AC rectangulum ℞ 144, hoc est 12.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXI.

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem efficit rationalem, & ei, ad quam applicatum est, lōgitudine cōmensurabilē.



Rationale enim AC ad rationalem secūdum aliquem rursus dictorum modorū applicetur, latitudinem faciens BC. Dico BC rationalem esse, & ipsi AB longitudine commensurabilē. Describatur enim ex AB quadratum AD. ergo AD rationale est: sed & rationale est AC. ergo AD ipsi AC est commensurabile. atque est vt DA ad AC, ita DB ad BC. commensurabilis igitur est DB ipsi BC. est autem DB æqualis BA. quare AB ipsi BC commensurabilis est. sed AB est rationalis. rationalis igitur est & BC, & ipsi BA longitudine commensurabilis. si igitur rationale ad rationalem applicetur; & reliqua. quod oportebat demonstrare.

45 primi.
Ex lēma. 2 ad 10 huius
10. huius.
6. diff.



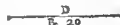
F. C. COMMENTARIVS.

Sit spacium AC 6. & recta linea AB ℞ 3. erit ex 2 theoremate premissorum CB ℞ 12, quae ipsi ℞ 3 longitudine est commensurabilis. est enim ipsius dupla. rursus sit AC 12, & recta linea AB ℞ 8, erit CB ℞ 18. atque est ℞ 18 ad ℞ 8, ut 3 ad 2. nam si ℞ 18 diuidatur per ℞ 8 prouenet ℞ 2 $\frac{1}{4}$, videlicet ℞ $\frac{9}{4}$, quae est $\frac{3}{2}$

L E M M A. I.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles.





B....4 C.....5

Exponatur rationalis A, & duo numeri B C non habētes proportionem, quam quadratus ad quadratum: & fiat vt B ad C, ita quadratum ex A ad quadratum ex D. erunt igitur ex ijs, quę ostensa sunt A D potentia solū cōmensurabiles.

Coroll. 6. huius.

L E M M A II.

Recta linea, quę potest irrationale spacium, irrationalis est.

Possit

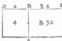
Posset enim recta linea A spacium irrationale, hoc est quadratum, quod fit ab A irrationali spacio sit æquale. Dico A irrationalem esse. si enim sit rationalis, erit quod ab ipsa fit quadratum rationale; sic enim in diffinitionibus ponitur. atqui rationale non est. ergo A irrationalis sit necesse est. quod demonstrare oportebat. Diff. 8.



THEOREMA XIX. PROPOSITIO. XXII.

Quod rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale est: & recta linea ipsum potens est irrationalis. vocetur autem media.

Rationalibus enim potentia solum commensurabilibus rectis lineis AB BC contineatur rectangulum AC. Dico rectam lineam, quæ ipsum potest, irrationalem esse. vocetur autem media, seu media lis. describatur enim ex AB quadratum AD. ergo AD rationale est. Et quoniam AB incommensurabilis est ipsi BC longitudine, potentia enim solum ponuntur commensurabiles. atque est AB æqualis BD. incommensurabilis igitur est DB ipsi BC longitudine. est autem vt DB ad BC, ita DA ad AC. ergo DA ipsi A C est incommensurabile. sed DA rationale est. irrationale igitur est AC. Quare & recta linea, quæ ipsum AC potest, videlicet quæ potest quadratum ipsi æquale est irrationalis. vocetur autem media; propterea quòd ipsius quadratum est æquale rectangulo, quod AB BC continetur, & ipsarum AB BC media sit proportionalis. quod demonstrare oportebat. Diff. 10. Diff. 11.



SCHOLIVM. I.

Media est irrationalis, quæ potest spacium contentum rationalibus potentia solum commensurabilibus.

Rationalibus enim potentia solum commensurabilibus rectis lineis AB spacium contineatur. ostendendum est huiusmodi spacium irrationale esse. sumatur enim ipsarum A B media proportionalis C. ergo quod fit ex AB est æquale quadrato ex C; ac propterea C potest rectangulum, quod ipsis AB continetur. est igitur vt A ad B, ita quadratum ex A ad id, quod ex C quadratum. nam vt prima ad tertiam, ita quadratum, quod fit ex prima ad quadratum ex secunda, quod demonstratum est in corollario 20 sexti elementorum. incommensurabilis autem est A ipsi B longitudine. ergo & quadratum ex A quadrato ex C est incommensurabile. sed quadratum ex A rationale est. irrationale igitur est quadratum ex C, hoc est rectangulum, quod rectis lineis A B continetur. ergo C est irrationalis. media autem idcirco vocatur, quòd irrationalis existens ipsarum A B media est proportionalis. Diff. 11.



SCHOLIVM. II.

Ex hoc theoremate colligitur mediam, quæ vna est irrationalium, in geometrica analogia considerari: media enim est proportionalis iuxta geometricam analogiam inter rationales potentia solum commensurabiles.

&

& recta linea ipsũ potẽs est media. si enim quod extremis cõtinetur ęquale est quadrato, quod fit à media, tres rectę lineæ proportionales sunt. 17. sexti.

F. C. COMMENTARIVS.

Sciendum est spacium illud irrationale, quod potest media linea, medium appellari.

Sit recta linea AB 2, & recta BC ℞ 8. erit rectangulum AC ℞ 32, quod irrationale est, & medium dicitur. recta autem linea ipsum potens est ℞ ℞ 32, quę media appellatur.

LEMMA.

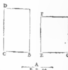
Si sint duæ rectę lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima ad rectangulum, quod duabus rectis lineis continetur.



Sint duæ rectæ lineę FE EG. Dico vt FE ad EG, ita esse quadratum ex FE ad FEG rectangulum. describatur ex FE quadratum DF, & GF compleatur. Quoniam igitur est vt FE ad EG, ita DF ad FG, atque est DF quidem quadratum ex FE; FG vero, quod DE EG continetur, hoc est rectangulum FEG: erit vt FE ad EG, ita quadratum ex FE ad FEG rectangulum. similiter autem & vt rectangulum GEF ad quadratum ex EF, hoc est vt GF ad FD, ita est GE ad EF. (1. sexti.)

THEOREMA XX. PROPOSITIO. XXIII.

Quod fit à media ad rationalem applicatum, latitudinem efficit rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.



Sit media quidem A, rationalis autem CB, & ad CB ei, quod fit ex A æquale spacium applicetur BD, latitudinem faciens CD. Dico CD rationalem esse, & ipsi BC longitudine incommensurabilem. Quoniam enim media est A, potest spacium contentum rationalibus potentia solum commensurabilibus. possit GF: sed potest & BD. æquale igitur est BD ipsi GF. atque est ęquiangulum. ęqualium autem, & æquiangulorum parallelogrãmorũ latera, quæ sunt circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. ergo vt BC ad EG, ita est EF ad CD. est igitur & vt quadratum ex BC ad quadratum ex EG, ita quadratum ex EF ad id, quod ex CD quadratum. sed quadratum ex BC commensurabile est quadrato ex EG, vtraque enim ipsarum est rationalis. commensurabile igitur est & quadratum ex EF quadrato ex CD. est autem quadratum ex FF rationale. ergo & rationale est quadratum ex CD; ac propterea recta linea CD est rationalis. itaq; quoniam FE incommensurabilis est ipsi EG longitudine; potentia enim solum commensurabiles sunt, vt autem FE ad EG, ita quadratum ex EF ad FEG rectangulũ: erit quadratum ex EF incommensurabile rectangulo FEG. sed quadrato quidem ex EF commensurabile est quadratum ex CD; rationales enim sunt potentia, vt ostensum est. ergo quadratum ex CD rectangulo FEG est incommensurabile. rectangulo autem FEG commensurabile est, quod DC CB continetur; sunt enim quadrato

(Margin notes: 45 primi. — Ex antecedenti. — 14. sexti — 22. sexti. — 1 pars 10 huius. — Ex antecedente lemmate — ✱)

ex A

ex A æqualia.incommensurabile igitur est,& quadratum ex CD rectangulo DCB. 13.huius.
sed vt quadratum ex CD ad DCB rectangulum,ita est DC ad CB.ergo DC ipsi CB
incommensurabilis est longitudine. & ob id DC est rationalis,& ipsi C B longitudi
ne incommensurabilis.quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Rationales enim sunt potentia] *hoc est potentia commensurabiles: rationales enim commensurabiles sunt, vt in Scholio ante vigesimam huius demonstratur. & quamquam hę voces longitudine, & potentia magna ex parte referantur ad commensurabilitatem, & incommensurabilitatem, tamen aliquando etiam ad rationalitatem referri ex hoc loco perspicuum est. quod nonnulli negarunt.* *

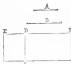
Sit quadratum ex A ℞ 40, *CB vero sit* 2. *si igitur ad CB applicetur* ℞ 40, *latitudinem faciet* ℞ 10. *rursus si CB sit* ℞ 5. *& ad ipsam applicetur* ℞ 40, *erit latitudo, quam facit* ℞ 8 *ex* 2. *theoremate præmissorum.*

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIIII.

Mediæ commensurabilis,media est.

Sit media A, & ipsi A commensurabilis sit B. Dico & B mediam esse. Exponatur enim rationalis CD, & quadrato quidem ex A æquale ad CD applicetur spacium rectangulum CE, latitudinem efficiens ED. rationalis igitur est ED, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. quadrato autem ex B æquale ad CD applicetur spaci m rectangulum CF, latitudinem efficiens DF. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato quidem ex A æquale est rectangulum EC; quadrato autem ex B æquale CF. commensurabile igitur est rectangulum EC rectangulo CF. atque est vt EC ad CF, ita ED ad DF. ergo ED ipsi DF longitudine est commensurabilis. est autem ED rationalis, & incommensurabilis ipsi DC longitudine. Ergo & DF rationalis est, & ipsi DC longitudine incommensurabilis. rationales igitur sunt CD DF potentia solum commensurabiles. quod autem rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale est; & recta linea ipsum potens est irrationalis: vocetur autem media. ergo recta linea, quę potest rectangulum CDF est media. sed B potest rectangulum CDF. quare B media erit.

45.primi. Ex antecedente. cor.9. huius 13.huius. 22.huius.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est spacium medio spacio commensurabile, medium esse. possunt enim ipsa rectæ lineæ, quæ sunt potentia commensurabiles, quarum altera media est. ergo & reliqua media erit. quemadmodum autem & in rationalibus dictum est, ita & in medijs dicemus, rectam lineam mediæ longitudine commensurabilem dici mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia; vniuersè enim quę longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. si vero mediæ commensurabilis quædam recta linea fuerit potentia, si- *

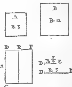
quidem

quidem etiam longitudine, dicuntur & sic medię & longitudine, & potentia commensurabiles. si autem potentia solum, dicuntur mediæ potentia solum commensurabiles.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc manifestum est spacium medio spacio commensurabile medium esse.

Sit spacium medium A, & ipsi commensurabile sit alterum spacium B. Dico B medium esse. Exponatur enim rationalis CD, & ad ipsam applicetur spacium rectangulum CE spacio A aequale, quod latitudinem 23 huius. *faciat ED. erit ED rationalis, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. Rursus ad eãdem CD applicetur aliud spacium rectangulum CF, aequale spacio B, latitudinemq; faciens DF. Quoniam igitur spacium A est cõmensurabile spacio B; estq; spacio quidem A aequale rectangulum CE; spacio autem B aequale rectangulũ CF: rectangulum CE rectangulo CF commensurabile erit. Vt autem EC ad CF, ita est ED ad DF. ergo & ED ipsi DF longitudine est commensurabilis. sed ED rationalis est, & ipsi CD incommensurabilis longitudine. ergo & DF rationalis, & ipsi CD longitudine est incõmensurabilis. sunt igitur CD DF rationales, & poten-* 22. huius. *tia solum commensurabiles. ergo rectangulum CF, quod ipsis continetur, irrationale est, & medium: ac propterea spacium B ipsi aequale, medium sit necesse est. quod oportebat demonstrare.*



SCHOLIVM.

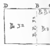
Media duplex est, videlicet potens quod rationalibus potentia solum commensurabilibus continetur, & quę media est commensurabilis. postquam autem ostendisset mediam esse, quę potest id quod rationalibus potentia solum commensurabilibus continetur, indigebat hoc theoremate ad ea, quę sequuntur. oportet enim primum ostendere aliquas esse commensurabiles medias, deinde inquirere quale spacium illud sit, quod ipsis comprehenditur.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXV.



Quod medijs longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulũ medium est.

Medijs enim longitudine commensurabilibus rectis lineis AB BC contineatur rectangulum AC. Dico AC medium esse. describatur enim ex AB quadratum AD. ergo AD medium est. & quoniam commensurabilis est AB ipsi BC longitudine, æqualis autem AB ipsi BD; erit DB ipsi BC longitudine commensurabilis. quare & DA commensurabile est ipsi AC. sed AD est me- Ex antecedẽte corol. dium. ergo & AC medium erit. quod demonstrare oportebat.

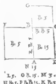


Quae de rationalibus supra demonstrata sunt, eadem & de medijs demonstrabuntur.

THEOREMA I.

Quod datis duabus medijs, vel media & rationali cõtinetur rectãgulũ datũ erit.

Datis enim duabus medijs, vel data media, & rationali AB AD contineatur rectangulum AC. Dico AC datum esse. Sint primum AB AD mediae, & fiant ex ipsis quadrata AF CG. erunt ea irrationalia, quae media appellantur. habeant autem inter se proportionem, quam H ad K. & H quidem se ipsum multiplicans faciat L, K vero se ipsum multiplicans faciat M, & L multiplicans M ipsum N faciat, cuius N radix sit O; & rursus ipsius O sit radix P. Quoniam igitur tres magnitudines LOM deinceps sunt proportionales, suntq; earum radices HPK, & HPK deinceps proportionales erũt. Sed quadratum FA ad rectangulum AC est vt rectãgulum AC ad CG quadratum. quod superius demonstratum est. quadratum autem FA ad quadratum CG est, vt H ad K. ergo & quadratum FA ad rectangulum AC erit, vt H ad P. et sunt HP datae, et datum FA quadratum. rectangulum igitur AC datum sit necesse est. sed sit AB media, et AD rationalis, vel contra AB rationalis, & AD media; et ex ipsis rursus fiant quadrata AF CG, quorum alterum medium erit, alterum rationale. et ijsdem constructis similiter demonstrabitur rectangulum AC datum esse. quod demonstrare oportebat. 2 Datorum Euclid.



OPERATIO.

Numeros ad quadratos quadratorum reductos inter se multiplicabimus, & eius qui producitur radix radicis erit rectãgulum, quod datis rectis lineis continetur: atque hec est multiplicatio radicum radicum inter se, quam dicunt. Vt si AB sit ℞ ℞ 5 AD ℞ ℞ 3, multiplicabimus 5 per 3 fient 15, & ℞ ℞ 15 erit id, quod ex datis rectis lineis inter se ductis producitur. si vero AB sit ℞ ℞ 5, AD 2, quadratũ quadrati ipsius 2, videlicet 16 per 5 multiplicabimus. fient 80, & ℞ ℞ 80 erit ea, quae ex eorũ multiplicatione oritur. deniq; si AB sit ℞ 2, & AD ℞ ℞ 5, multiplicabimus quadratum ipsius 2, hoc est 4 per 5, & producti accipiemus radicẽ radicis, erit ℞ ℞ 20 ea, quam inquirimus.





THEOREMA II.

Si ad datum mediam applicetur spacium datum, latitudo, quam facit, data erit.



Sit data media AB, et spacium datum E, quod ad ipsam AB applicatum latitudinem faciat BC. Dico BC datam esse. vel igitur spacium E rationale est, vel irrationale, quod

medium appellatur. sit primum irrationale, ac medium, habeatq; quadratum ipsius AB ad spacium E proportionem eam, quã habet H ad K; et H quidem se ipsum multiplicans faciat L: K vero se ipsum multiplicans faciat M, habebit L ad M duplam proportionem eius, quam habet latus ad latus, hoc est H ad K. Itaque fiat vt L ad M, ita recta linea AB ad aliam rectam P: et inter AB, et P sumpta media proportionali, Q, habebit AB ad P duplam proportionem eius, quam habet ad Q. ergo AB ad Q ita erit, vt H ad K. rursus inter AB et Q sumatur media proportionalis R. quare vt AB ad Q, ita erit quadratum ex AB ad quadratum ex R. quadratum igitur ex AB ad quadratum ex R est vt H ad K. sed vt H ad K, ita erat quadratum ex AB ad
9.quinti. *spacium E. ergo quadratum ex R spacio E est aequale. applicetur ad rectam lineam AB parallelogrammum rectãgulum AC, aequale quadrato ex R, quod et spacio E aequale erit. et ex AB AD fiant AF, CG quadrata; numerorum autem LM inueniatur tertius proportionalis N, cuius radix sit O. Quoniam igitur numeri LMN deinceps sunt proportionales, et H K O deinceps proportionales erũt. atque est vt quadratum FA ad rectangulum AC, ita rectangulum AC ad CG quadratum. quare similiter ut superius demonstrabitur rectangulum AC ad quadratum CG ita esse, vt K ad O. ergo et quadratũ CG, et eius radix BC data erit, videlicet latitudo, quam quęrimus. non alia ratione demonstrabimus, si spacium E rationale fuerit, latitudinem BC datam esse. quod oportebat demonstrare.*

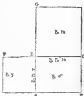
A ℞℞3 B





L 3 H 6 K 12.

M ℞3. K ℞6. O ℞12



O P E R A T I O.

Numeris ad quadratos quadratorum redactis, numerum à quo spacium denominatur, diuidemus per alterum numerum; et eius, qui exibit, radix radicis erit latitudo, quam facit spacium ad rectam lineam applicatum; et hęc est radicum inter se diuisio, quam dicunt, vt si diuidenda sit ℞ 6 per ℞ ℞ 3, multiplicabimus 6 in se ipsum, fient 36, et diuidemus 36 per 3, exibunt 12, et ℞ ℞ 12 erit, quae ex earum diuisione oritur. si vero diuidere oporteat 3 per ℞ ℞ 3, reducemus 3 ad quadratum quadrati, et fient 81, diuisisq; 81 per 3 exibunt 27, cuius radicis radix est ea, quam quęrimus.

T H E O R E M A III.

Quæ ex duabus datis medijs lõgitudine cõmẽsurabilibus cõponitur recta linea, data erit.



Ex duabus enim datis medijs longitudine commensurabilibus AB BC componatur recta linea AC. Dico AC datam esse. sit quadratum rectae lineae AB ad quadratũ ipsius BC, vt L ad M, et L quidem se ipsum multiplicans faciat N; M vero se ipsum multiplicans faciat O. et quoniam AB BC longitudine commensurabiles

siũt,

sint, earum quadrata L M, & rursus quadratorum quadrata N O inter se proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo inter ipsos N O cadet vnus medius proportionalis numerus. cadat, sitque P, cuius radix Q. & ex AC descripto quadrato A C D E, & reliqua figura completa, quemadmodum superius, similiter demonstrabitur quadratum AG ad rectangulum GC esse, vt L ad Q, & rectangulum GE ad quadratum GD, vt Q ad M; & denique quadratum AG ad totum AD quadratum, vt L ad compositum ex L, & M vnà cum duplo ipsius Q quòd cum datae sint L Q M, & compositum ex ipsis dabitur. ergo & AD quadratum, & eius radix AC data erit. quod oportebat demonstrare. 9 huius 8

OPERATIO.

Magnitudines respondentes quadratis rectarum linearum simul coaceruabimus vnà cum duplo mediae proportionalis, & huius cõpositi radix erit recta linea, quę ex duabus datis constat; atque hęc est ℞ ℞ inter se additio, quam vocant, vt si ℞ ℞ 5 addenda sit ℞ ℞ 80, iungemus ex ante demonstratis ℞ 5 cum ℞ 80, & cum duplo ℞ 20, quae faciunt ℞ 405, cuius radix, videlicet ℞ ℞ 405 est recta linea, quae ex earum additione producitur. Quòd si duae, vel plures mediae longitudine incommensurabiles sibi ipsis addendae sint, vel etiam rationales, & mediae vtemur eadem voce plus, vt in rationalibus dictum est, hoc modo ℞ ℞ 5 plus ℞ ℞ 3, vel ℞ ℞ 2 plus ℞ ℞ 3, plus ℞ ℞ 5, vel ℞ 2 plus ℞ ℞ 6, vel 3 plus ℞ 5 plus ℞ ℞ 6. & sic in alijs.

THEOREMA IIII.

Duarum datarum mediarum, quæ inæquales sint, & longitudine commensurabiles, differentia data erit.

Sint duae datae mediae inęquales, & longitudine commensurabiles AB AC, quarum differentia sit BC. Dico BC datam esse. sit quadratum rectae lineae AB ad quadratum ipsius A C, vt L ad M. & sit rursus ipsius L quadratum N, & ipsius M quadratum sit O. habebunt N O inter se proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quare inter eos cadet vnus medius proportionalis. cadat, & sit P, cuius radix Q. & ex AB AC descriptis quadratis RH AD, & figura completa, quemadmodum superius, similiter demonstrabimus quadratum RH ad rectangulum HC esse, vt L ad Q; & rectangulum HC ad quadratum CE, vt Q ad M. & pręterea duo quadrata RH AD aequalia esse duplo rectanguli HC & quadrato FK. ergo si ab ipsis LN auferatur duplum ipsius Q, reliquum erit id, quod quadrato FK respondet. datae autem sunt L Q M magnitudines. ergo & quadratum FK, atque eius radix BC dabitur. quod demonstrare oportebat.



OPERATIO.

Magnitudines respondentes quadratis rectarum linearum simul iungemus, et ab ea, quae facta est, auferemus duplam mediae proportionalis, quae inter ipsas interijcitur: relinquetur enim quadratum, cuius radix erit differentia, quam quęrimus, atque hęc est ℞ ℞ subtractio, quam appellant vt si à ℞ ℞ 405 auferenda sit ℞ ℞ 5, iungemus ex ante demonstratis ℞ 5 cum ℞ 405, fient ℞ 500, à qua auferemus duplum ℞ 45, hoc est ℞ 180, relinquetur ℞ 80. ergo BC erit ℞ ℞ 80. At si ab aliqua media auferenda sit alia minor, quae longitudine sit ipsi incommensurabilis; vel à media rationalis, vel contra à rationali media, vtemur eadem voce minus, vt in rationa-

libus dictũ est hoc modo ℞ ℞ 5 minus ℞ ℞ 3, vel ℞ ℞ 12 minus ℞ 3, vel ℞ ℞ 20 minus 2, vel ℞ 6 minus ℞ ℞ 30, vel 3 minus ℞ ℞ 40. et ita in reliquis.

Itaque si mediae lõgitudine cõmẽsurabiles sint AB BC videlicet ℞ ℞ 32, et ℞ ℞ 2. erit ex primo antecedentium rectangulum quod ipsis continetur ℞ ℞ 64, hoc est ℞ 8; sunt enim ℞ ℞ 32 et ℞ ℞ 2 longitudine commensurabiles, videlicet vt 2 ad 1. nam si ℞ ℞ 32 diuidatur per ℞ ℞ 2 prouenit ℞ ℞ 16, hoc est 2.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO. XXVI.

Quod medijs potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale est, vel medium.



Medijs enim potentia solum commensurabilibus
rectis lineis A B BC contineatur rectangulũ A C.
Dico AC vel rationale esse, vel medium. describan-
tur enim ex AB BC quadrata AD BE. vtrumque
22 huius. igitur ipsorum A D BE medium est. exponatur ra
45. primi. tionalis FG, & ipsi quidem AD ęquale ad FG appli
cetur parallelogrammum rectangulum GH, latitu-
dinem faciens FH; ipsi vero AC æquale ad HM ap-
plicetur rectangulum M K, latitudinem faciens HK;
& insuper ipsi BE ęquale similiter ad KN applicetur
14 primi. NL, latitudinẽ faciens KL. In recta igitur linea sunt
FH HK KL. Quoniam igitur medium est vtrũque
ipsorum AD BE; atquè est AD quidem æquale ipsi
GH, BE vero ipsi NL, erit & vtrumque ipsorum G
H NL medium, & ad rationalẽ FG applicata sunt.
23 huius. ergo & vtraque ipsarũ FH KL est rationalis, & ipsi
FG longitudine incommensurabilis. & quoniam cõ
mensurabile est AD ipsi BE, erit & GH ipsi NL com
1 sexti. mensurabile. est igitur & vt GH ad NL, ita FH ad K
10. huius. L. ergo FH ipsi KL est commensurabilis longitudi-
ne; ac propterea FH KL rationales sunt longitudi
ne commensurabiles. rationale igitur est rectangulum, quod FH KL continetur. et
quoniam BD quidem ipsi BA est æqualis, XB uero ipsi B C, erit vt DB ad BC, ita A
1 sexti. B ad BX: sed vt DB ad BC, ita DA quadratum ad rectangulum A C: vt autem A B
Conuertendo. ad BX, ita AC rectãgulum ad quadratum CX. est igitur vt XC ad CA, ita CA ad A
D: æquale autem est AD ipsi GH, & AC ipsi MK, & CX ipsi NL. quare vt GH ad M
K, ita MK ad NL. & vt igitur FH ad HK, ita HK ad KL: ideoq; quod FH KL conti-
17. sexti. netur est æquale quadrato, quod fit ex HK. est antem quod continetur FH KL ra-
tionale. ergo & rationale est quadratum ex HK; ac propterea recta linea HK ratio-
nalis. & si quidem HK commensurabilis est ipsi HM, hoc est ipsi FG longitudine,
20 huius. erit rectangulũ NH rationale; si vero HK est incõmensurabilis ipsi FG lõgitudine,
22 huius. KH HM rationales erunt potentia solum commensurabiles: & ob id rectangulum
HN medium erit. ergo HN vel rationale est, vel medium. sed HN est æquale ipsi A
C. quare AC vel rationale, vel medium est. quod igitur medijs potentia solum com
mensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum vel rationale est, vel mediũ.
quod oportebat demonstrare.

SCHOLIVM.

Admiratione dignum est triadis vel ternarij vim, ac facultatem ita potentem esse, vt etiam irrationalium potestatem definiat, & ad illorum vsque extrema permeet. pręterea & illud mirum est vnamquãque

irrationalitatis speciem ab aliqua medietate omnino determinari vel Geometrica, vel Arithmetica, vel Musica. porrò anima ipsa proximè accedens ad magnitudinum contemplationem pro ea, quam in se habet, rationis facultate videtur & omnia determinare, quæ in magnitudinibus determinata non sunt, & ipsam analogiæ infinitatem his tribus vinculis cohercere. Sciendum & illud est, nomen commune mediæ in ea, quæ magis est particularis, natura positum esse. nam & quæ potest spacium contentum rationalibus longitudine commensurabilibus, media omnino est rationalium illarum; & quæ potest spacium rationali, & irrationali contentum. attamen neutram harum appellat mediam, sed quę potest ante dictum spacium. Illud quoque animaduertendum est, Euclidem vbique potentias denominatiue à potentibus appellare; rationales quidem à rationali, medium autem à media, & contemplationem, quæ circa medias versatur, similem facere rationalibus. etenim has vel longitudine, vel potentia solum commensurabiles, quemadmodum illas esse dicit. & spacium quidem, quod medijs longitudine commensurabilibus continetur, medium esse, quemadmodum illic spacium rationalibus contentum rationale. spacium vero contentum medijs potentia solum cōmensurabilibus quandoque rationale, quandoque medium; & quod rationalibus potentia solum commensurabilibus continetur, medium esse. quare medium quidem tripliciter, rationale vero dupliciter contingit. & videtur ea, quę inter medias longitudine commensurabiles proportionalis interijcitur, & quæ inter rationales potentia solum commensurabiles omnino media esse; quæ vero inter medias potentia solum commensurabiles interdum quidem rationalis, interdum vero media. ideoq; & incommensurabilis potentia interdum rationalis, interdum media est. duæ enim mediæ potentia commensurabiles esse possunt, quemadmodum & duę rationales potentia commensurabiles. existimandum igitur est analogiam caussam esse ortus contentorum spaciorum: vt potè quæ inter extrema; hoc est vel inter duas rationales mediam, vel inter duas medias rationalem constituit; & totum nexum quandoque similem facit extremis, quandoque ipsis dissimilem interijcit.

Media.

Potentias denominatiue a potētibus appellat Euclides.

Contēplatio quæ circa medias simĩlis est ei, quæ circa rōnales versatur.

Medium tripliciter, rationale vero dupliciter contingit.

F. C. COMMENTARIVS.

Sint mediae potentia solum commensurabiles AB BC, & sit AB ℞℞ 54, & BC ℞℞ 24, erit rectangulum ipsis contentum ℞℞ 1296, videlicet 6, quod est rationale. Rursus sint mediae potentia solum commensurabiles ℞℞ 128, & ℞℞ 72, rectangulum, quod ipsis continetur, erit ℞℞ 9216, videlicet ℞ 96, quod est medium. At vero ℞℞ 54, & ℞℞ 24: itemq; ℞℞ 128, & ℞℞ 72 esse potentia solum commēsurabiles patet tum ex 28, & 29, huius, tum ex eo, quòd si ℞℞ 54 per ℞℞ 24 diuidatur, proueniet ℞℞ $\frac{9}{4}$, hoc est ℞ $\frac{3}{2}$. erit igitur ℞℞ 54 ad ℞℞ 24; vt

24, vt ℞ 3 ad ℞ 2. Rursus si ℞℞ 128 diuidatur per ℞℞ 72, prouenit ℞℞ $\frac{4}{3}$. quare ℞℞ 128 ad ℞℞ 72 erit vt ℞ 4 ad ℞ 3.

THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXVII.

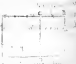
Medium non ſuperat medium rationali.



Si enim fieri poteſt, medium A B ſuperet medium A C rationali D B. & exponatur rationalis EF, atque ipſi quidem AB æquale ad E F applicetur parallelogrammum rectangulum F H, latitudinem faciens EH: ipſi vero AC æquale auferatur FG. reliquum igitur BD reliquo KH eſt æquale. rationale autẽ eſt BD. ergo & KH rationale. quoniam igitur medium eſt vtrumque ipſorum A B, AC; eſtq; AB æquale FH, & AC æquale F G: erit & vtrumque ipſorum F H FG medium: & ad ra-
23 huius. tionalem E F applicata ſunt. rationalis igitur eſt vtraque earum HE EG, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis. & quoniam rationale eſt D B, et ipſi KH æquale; & KH rationale erit. eſt autem
21. huius. ad EF applicatum. rationalis igitur eſt GH, & ipſi EF commenſurabilis longitudine. ſed & EG eſt rationalis, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis. ergo EG incommenſurabilis eſt ipſi GH longi-
Coro 13 huius. tudine. atque eſt vt EG ad GH, ita quadratum ex E G ad rectangulum, quod E G,
10. huius. GH continetur. incommenſurabile igitur eſt quadratum ex EG rectangulo EGH:
ſed quadrato quidem ex EG commenſurabilia ſunt ex EG, GH quadrata. vtraque
6. huius. enim ſunt rationalia. rectangulo autem E G H commenſurabile eſt quod bis EG
14. huius. GH continetur; eſt enim ipſius duplum. ergo quadrata ex EG, G H incommenſurabilia ſunt ei, quod bis EG, GH continetur. & vtraque igitur, videlicet quadra-
4. secundi. ta ex EG, GH, & quod bis continetur EG GH, hoc eſt quadratum ex EH, incom-
17. huius. menſurabilia ſunt quadratis ex EG GH. ſunt autẽ rationalia, quę ex EG GH quadrata. irrationale igitur eſt quadratum ex E H: ac propterea E H eſt irrationalis: ſed & rationalis. quod fieri non poteſt. non igitur medium ſuperat medium rationali. quod oportebat demonſtrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Rationale autem non ſuperare rationale niſi rationali, hoc modo demonſtrabitur.



Sint parallelogramma rectangula AB AC rationalia. Dico DB, quo parallelogrammum AB ipſum AC ſuperat, rationale eſſe. quoniam enim AB AC ſint rationalia, & inter ſe commenſurabilia ſunt. atque eſt tota magnitudo A B ex magnitudinibus A C DB compoſita vni ipſarum
16 huius. *A C commenſurabilis. ergo & reliquae D B commenſurabilis erit. ſed A B eſt rationale. quare & D B rationale ſit neceſſe eſt. quod nos ad 25 huius demonſtrauimus.*

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO. XXVIII.

Medias inuenire potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale contineant.

Exponantur



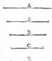
Exponatur duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles A B; & ſumatur ipſarum A B media proportionalis C: fiatq; vt A ad B, ita C ad D. quonia igitur A B 11. sexti. rationales ſunt, potentia ſolum commenſurabiles, erit * quod ipſis A B continetur rectãgulum, hoc eſt quadra- 22. huius. tum ex C medium. ergo recta linea C media eſt. & quoniam ut A ad B, ita eſt C ad D; ſuntq; A B potentia ſolũ commenſurabiles: & C D potentia ſolum commenſurabiles erunt. 10. huius. eſt autem recta linea C media. media igitur 24. huius. eſt & D. quare C D mediæ ſunt potentia ſolum cõmenſurabiles. Dico etiam ipſas rationale continere. quoniam enim eſt vt A ad B, ita C ad D, erit permutando vt A ad C, ita B ad D. ſed vt A ad C, ita C ad B. ergo & vt C ad B, ita B ad D. quod 17. sexti. igitur ipſis C D continetur quadrato ex B eſt ęquale. rationale autem eſt quadratum ex B. ergo & quod continetur C D rationale erit. Inuentæ igitur ſunt mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent. atque illud eſt. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Fiatq; ut A ad B, ita C ad D] *Sit A 3, & B ℞ 6, erit rectangulum, quod ipſis contine-* * *tur ℞ 54, & recta linea C inter ipſas A B media proportionalis, quae ipſum poteſt ℞ ℞ 54. itaque fiat ut A ad B, hoc eſt ut ℞ ℞ 81 ad ℞ ℞ 36, ita C videlicet ℞ ℞ 54 ad aliam, quae ſit D, hoc modo. multiplicetur 54 per 36, fiet 1944. ergo ℞ ℞ 1944 eſt rectangulum, quod continetur ℞ ℞ 36, & ℞ ℞ 54 ex primo antecedentium, quod quidem application ad ℞ ℞ 81 latitudinem faciet ℞ ℞ 24 ex ſecundo eorumdem. quare rectangulum contentũ ℞ ℞ 81, & ℞ ℞ 24 eſt aequale ei, quod continetur ℞ ℞ 36, & ℞ ℞ 54 eſt igitur ut ℞ ℞ 81 ad ℞ ℞ 36, ita* 16. sexti. *℞ ℞ 54 ad ℞ ℞ 24.*

PROBLEMA V. PROPOSITIO. XXIX.

Medias inuenire potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant.



Exponantur tres rationales potentia ſolum cõmenſurabiles A B C, ſumaturq; ipſarum A B media proportionalis D: & fiat vt B ad C, ita D ad E. Quoniam igitur A B rationales ſunt, potẽ- * tia ſolum commenſurabiles, erit quod A B continetur rectãgulum, hoc eſt quadratum ex D medium. ergo D media eſt. & quoniam B C ſunt ra- 22. huius. tionales potentia ſolum commenſurabiles, atque eſt vt B ad C, ita D ad E, rectę linea D E potẽtia 10. huius. ſolum commenſurabiles erunt. eſt autem D media. ergo & E media eſt; ac propterea D E medię 24 huius. ſunt potẽtia ſolum commenſurabiles. Dico ipſas etiam medium continere. Quoniam enim eſt vt B ad C, ita D ad E, erit permutando vt B ad D, ita C ad E. vt autem B ad D, ita eſt D ad A. ergo & vt D ad A, ita C ad E. quod igitur A C continetur rectangulum eſt æquale contento D E. eſt autem 16 sexti. quod continetur A C medium. ergo & quod continetur D E medium erit. Inuen- 22. huius. tę igitur ſunt mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium continent, vt facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Et fiat vt B ad C, ita D ad E] *Sit A 4, B ℞ 8, et C ℞ 6, erit rectangulum, quod A B continetur* *

tinetur ℞ 128, & recta linea D inter ipsas A B media proportionalis ℞ ℞ 128. fiat igitur vt B ad C, hoc est vt ℞℞ 64 ad ℞℞ 36, ita D videlicet ℞℞ 128 ad aliam, quae sit E. eodem modo, quo supra, multiplicetur 128 per 36, fit 4608, & 4608 diuidatur per 64, exeunt 72. ergo ℞℞ 72 erit quarta proportionalis A, quam quaerebamus.

L E M M A. I.

Inuenire duos numeros quadratos, ita vt qui ex ipsis cõponitur etiã quadratus sit.



Exponantur duo numeri AB BC, qui vel
A pares sint, vel impares. & quoniam siue à par par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; erit AC numerus par. secetur AC bifariam in D. sint autem AB BC uel similes pla-
B ni, vel quadrati, qui & ipsi similes plani sunt. ergo qui fit ex AB BC vnà cum quadrato ex CD est ęqualis ei, qui fit ex BD quadrato. atque est quadratus, qui fit ex
C AB BC; ostensum enim est si duo similes plani se se multiplicantes aliquem faciãt, factum quadratum esse. Inuenti igitur sunt duo quadrati numeri, videlicet qui fit ex AB BC, & qui fit ex CD, qui quidem inter se compositi quadratum numerum faciunt, nempe eum, qui fit ex BD. quod ipsum facere oportebat.

COROLLARIUM.

Et manifestum est rursus inuentos esse duos numeros quadratos, & qui fit ex BD, & qui ex CD ita vt ipsorum excessus, videlicet qui
D *fit ex AB BC, sit quadratus; quando AB BC similes plani sint. Quãdo autem non sint similes plani, inuenti sunt duo quadrati & qui fit ex BD, & qui ex CD, quorũ excessus, qui ex AB BC nõ est quadratus.*

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam siue à pari par auferatur, siue ab impari impar reliquus par est] *ex 24, & 26 noni libri.*

B Ergo qui fit ex AB BC vnà cũ quadrato ex CD est æqualis ei, qui fit ex BD quadrato] *Hoc demonstratur à Barlaam Monacho in theoremate 6 eorum, quae nos ad 15 noni libri apposuimus.*

C Ostensum est enim si duo similes plani se se multiplicantes aliquem faciant, factum planum esse] *in prima propositione noni libri.*



D Quando autem non sint similes plani, inuenti sunt] *Sint enim duo numeri AB BC, qui non sint similes plani, & AC bifariam secetur in D. rursus qui fit ex AB BC vnà cum quadrato ex CD est aequalis ei, qui ex BD ex 6 Barlaam Monachi iam dicto. sed qui fit ex AB BB non est quadratus. si enim quadratus fit, erunt numeri AB BD similes plani. quod non ponitur. quadrati igitur numeri sunt, qui fiunt ex BD, & DC, quorum excessus, qui fit ex AB BC non est quadratus.*

L E M M A II.

Inuenire duos quadratos numeros, ita vt qui ex ipsis componitur non sit quadratus.

Sit

Sit enim qui ex A B BC quadratus, vt dictum est, & par numerus C A; seceturq; CA bifariam in D. perspicuũ est quadratum ex AB BC vnà cum quadrato A
ex CD ęqualem esse ei, qui fit ex BD quadrato. auferatur vnitas DE. ergo quadratus ex AB BC vnà cum quadrato ex CE minor est quadrato ex BD. Dico igitur quadratum ex AB BC vnà cum quadrato ex CF, quadratum non esse. si enim est quadratus vel æqualis est quadrato ex BE, vel eo minor, nõ autem maior, vt ne vni- B
tas secetur, neuè qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CD, qui est ęqualis quadrato ex BD ęqualis sit quadrato ex AB BC vnà cum quadrato ex CE. sit primum, si fieri potest, qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis quadrato ex BE; & sit GA duplus ipsius DE vnitatis. Quoniam igitur totus AC totius CD est duplus, quorum AG est duplus DE, erit & reliquus CG ipsius GE duplus. ergo GC in pũ- C
cto E bifariam secatur; ac propterea qui ex GB BC vnà cum quadrato ex CE ęqualis est ei, qui fit ex BE quadrato. sed & qui ex AB BC vnà cum quadrato ex CE æqualis ponitur quadrato ex BE. ergo qui ex GB BC vnà cum quadrato ex CE est æqualis ei, qui ex AB BC unà cum quadrato ex CE, & communi detracto quadra- D
to ex CE concludetur AB ipsi GB æqualis. quod est absurdum. non igitur qui ex A B BC vnà cum quadrato ex CE æqualis est quadrato ex BE. Dico neque quadrato ex BE minorẽ esse si enim fieri potest, sit quadrato ex BF æqualis, & ipsius DF duplus ponatur HA. concludetur rursus HC duplus CF, ita ut & HC in F bifariam di- E
uidatur, ac propterea qui ex HB BC unà cum quadrato ex CF æqualis sit quadrato ex BF. ponitur autem & qui ex AB BC unà cum quadrato ex CE æqualis quadrato ex FB. ergo sequitur qui ex AB BC unà cum quadrato ex CE æqualem esse F
ei, qui ex HB BC unà cum quadrato ex CF. quod est absurdum. non igitur qui ex AB BC unà cum quadrato ex C E est æqualis minori, quàm sit quadratus ex BE. ostensum est autem neque ipsi quadrato ex BE, neque maiori eo æqualem esse. ergo qui fit ex AB BC una cum quadrato ex CE non est quadratus. & cum fieri possit, ut idem pluribus modis ostendatur, unus qui proxime dictus est nobis sufficiat, ne longam tractationem longius producamus.

A G H D E F C B
2 2 1 1 1 ... 8

F. C. COMMENTARIVS.

Perspicuum est quadratum ex A B B C unà cum quadrato ex C D æqualem esse A
ei, qui fit ex BD quadrato] *Ex 6. Barlaam Monachi.*

Non autem maior ut ne unitas secetur] *si enim fieri potest sit maior, vel igitur eius la-* B
tus est BD, vel minus quàm BD. & si quidem BD, erit totum parti aequale. quod fieri non potest. si vero minus quàm BD, cum sit maius quàm BE, vnitas secabitur. quod itidem fieri non potest.

Erit & reliquus CG ipsius GE duplus] *Ex 7 vel 11 septimi libri.* C

Et communi detracto quadrato ex CE concludetur AB ipsi G B ęqualis] *Relin-* D
quetur enim qui ex AB BC aequalis ei, qui ex GB BC. sed qui ex AB BC ad eum, qui ex GB BC est vt AB ad BG, ex 17 septimi. ergo AB ipsi BG est aequalis. quod est absurdum.

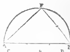
Concludetur rursus HC duplus CF.] *Quoniam enim AC ipsius CD est duplus, quorum* E
AH ponitur duplus ipsius DF, erit & reliquus HC reliqui CF duplus.

Quod est absurdum] *Est enim qui ex AB BC maior eo, qui ex HB BC, quòd AB sit ma-* F
ior quam BH. & similiter quadratus ex CE maior quadrato ex CF; quoniam AC quam CF est maior.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXX.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita vt maior plus possit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponatur enim quædam rationalis AB, & duo quadrati numeri CD DE, ita vt ipsorum excessus CE non sit quadratus. Describatur autē in recta linea AB semicirculus AF B: fiatq́; vt DC ad CE, ita ex AB quadratum ad quadratum ex AF; & FB iungatur. Quoniam igitur est, vt quadratum ex BA ad quadratum ex AF, ita DC ad CE; habebit quadratum ex BA ad quadratum ex AF proportionem eam, quā numerus DC ad CE numerum. ergo quadratum ex BA quadrato ex AF est commensurabile. sed rationale est quadratum ex AB. ergo & quadratum ex AF rationale erit; ac propterea recta linea AF est rationalis. & quoniam DC ad CE proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BA ad quadratum ex AF proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est recta linea BA ipsi AF longitudine. ergo AB AF rationales sunt potentia solum commensurabiles. Quòd cum sit vt DC ad CE, ita quadratum ex BA ad quadratum ex AF, erit per conuersionem rationis vt CD ad DE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF. sed CD ad DE proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo & quadratum ex AB ad quadratū ex BF proportionē habebit, quā quadratus numerus ad quadratūnumerū; & ob id recta linea AB ipsi BF longitudine est commensurabilis. atque est quadratum ex AB æquale quadratis ex AF FB. ergo AB plus potest, quàm AF quadrato rectæ lineę BF sibi commensurabilis longitudine. Inuentæ igitur sunt duæ rationales potentia solum commensurabiles BA AF, ita vt maior BA plus possit, quàm minor AF, quadrato ipsius FB, sibi longitudine commensurabilis. quod facere oportebat.



Ex corolla. primi lem. antecedentium
Per Corol. 6 huius.
6 huius.
diffi 9. huius
9 huius.
Ex 47. primi, uel ex corol. ante 15. huius.
9. huius
47. primi.

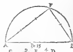
SCHOLIVM.

Ex hoc loco inuentionem aggreditur reliquarum irrationalium, ac primum earum, quę per compositionem fiunt; præmittit autem theoremata hęc, vtpote ex quibus eiusmodi irrationalium natura appareat.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XXXI.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita ut maior plus possit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Exponatur rationalis AB, & duo numeri quadrati CE ED, ita vt qui ex ipsis componitur nō sit quadratus. atque in recta linea AB semicirculus AFB describatur: & fiat vt DC ad CE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex AF: & iuncta FB, similiter ostendemus, vt in antecedente, BA AF rationales esse potentia solum commensurabiles. Et quoniam est vt DC ad CE, ita quadratum ex BA ad id quod ex AF quadratum; erit per conuersionem rationis vt CD ad DE, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF. sed CD ad DE proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. nō igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BF proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum



merum. ergo A B ipsi B F longitudine est incommensurabilis. & B A plus potest, quàm AF quadrato rectæ lineæ BF sibi incommensarabilis longitudine. quare AB BF rationales sunt potentia solum commensurabiles, & AB plus potest, quàm AF quadrato rectæ lineæ FB sibi longitudine incommensurabilis.

L E M M A.

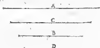
Si sint duę rectę lineæ in proportione aliqua, erit vt recta linea ad rectam lineam, ita rectangulum duabus rectis lineis contentum ad quadratum minoris.



Sint duæ rectæ lineæ AB BC in proportione aliqua. Dico vt AB ad B C, ita esse rectangulum ex AB BC ad quadratũ ex B C. describatur enim ex BC quadratum BDEC, & compleatur AD parallelogrammũ. manifestum est ut AB ad BC, ita esse AD parallelogrammum ad parallelogrammum BE. atque est AD quidem, quod AB B C continetur; est enim B C ipsi B D æqualis. B E vero est quadratum ex B C. vt igitur A B ad B C, ita rectangulum ex AB BC ad id, quod ex BC quadratum, quod demonstrare oportebat. 1.sexti.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO. XXXII.

Inuenire duas medias potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineant, ita ut maior plus posit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.



Exponantur enim duæ rationales potentia solum commensurabiles A B, ita vt A maior plus posit, quàm B minor, quadrato rectę lineę sibi lõgitudine commensurabilis. & fit rectangulo ex AB æquale quadratum, quod fit à recta linea C. medium autem est quòd ex AB. ergo & quadratum ex C medium erit, & ipsa C media. at quadrato quod fit ex B ęquale sit rectãgulum ex CD. rationale autem quod ex B. ergo & rectangulum ex CD est rationale. & quoniam est vt A ad B, ita rectangulum ex AB ad id, quod ex B quadratum, sed rectangulo quidem ex A B æquale est quadratum ex C, quadrato autem ex B ęquale rectangulum ex CD: erit vt A ad B, ita quadratum ex C ad id, quod ex CD rectangulum. Sed vt quadratum ex C ad rectangulum ex CD, ita recta linea C ad ipsam D. vt igitur A ad B, ita C ad D. commensurabilis autem est A ipsi B potentia solum. ergo & C ipsi D potentia solũ est commensurabilis. atque est C media. media igitur & D. & quoniam est vt A ad B, ita C ad D, & A plus potest, quàm B quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis lõgitudine; & C plus poterit, quàm D quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Inuentę igitur sunt duæ medię potentia solum cõmensurabiles C D, quæ rationalę continent, & C plus potest quàm D quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. similiter autem ostendetur inueniri posse duas medias potentia solum commensurabiles, & continentes rationale, ita ut maior plus posit, quàm minor quadrato rectę lineę sibi incommensurabilis longitudine, quãdo A plus posit, quàm B quadrato rectæ lineę sibi longitudine incommensurabilis.

Marginal notes: 30 huius. · 22. huius. · Ex antecedẽti lemmate. · 1 sexti. · 10. huius. · 24. huius. · 15 huius. · *

Similiter autem ostendetur inueniri posse duas medias potentia solum commẽsurabiles] *Maneant eadem quae supra, & A plus possit, quàm B quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. similiter vt ante demonstrabitur, rectam lineam D mediam esse. Et quoniam vt A ad B, ita C ad D, & A plus potest, quàm B quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine, & C plus poterit, quàm D quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine. ergo rursus inuentae sunt duae mediae potentia solum commensurabiles C D, rationale continentes, & C plus potest quàm D quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis.*

Sit A 8, B ℞ 28. erit rectangulũ, quod ipsis cõtinetur ℞ 1792, & recta linea C ℞℞ 1792, quae media est. fiat vt 8 ad ℞ 28, ita ℞℞ 1792 ad aliam, quae sit D. erit ea ℞ ℞ 343. ergo ℞℞ 1792 & ℞℞ 343 duae mediae sunt, potentia solum commensurabiles, quae rationale continent, videlicet 28. & maior plus potest, quàm minor quadrato rectae lineae sibi longitudine cõmensurabilis nam si à quadrato maioris auferatur quadratum minoris, hoc est si à ℞ 1792 auferatur ℞ 343, relinquetur ℞ 567. & sunt duae mediae ℞℞ 1792 ℞℞ 567 inter se longitudine commensurabiles, videlicet vt 4 ad 3. si enim ℞℞ 1792 diuidatur per ℞ ℞ 567, prouenit ℞℞ 3 $\frac{13}{81}$, quae est 1 $\frac{1}{3}$, hoc est $\frac{4}{3}$. Rursus sit A 8. B ℞ 20, erit rectangulum ipsis contentum ℞ 1280, & recta linea C ℞℞ 1280. fiat ut 8 ad ℞ 20, ita ℞℞ 1280 ad aliam, quae sit D. erit ea ℞℞ 125. sunt igitur R R 1280, & R R 125 duae mediae, quae rationale continent, videlicet 20, & maior plus potest, quàm minor quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. sed sit A 3 B ℞ 6, rectangulum ipsis contentum erit R 54, & recta linea C ℞℞ 54. Rursus fiat ut 3 ad ℞ 6, ita R R 54 ad aliã, erit ea R R 24. quare R R 54, & R R 24 sunt duae mediae potentia solum commensurabiles, quae rationale continent, videlicet 6; & maior plus potest, quàm minor quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis.

L E M M A

Si fuerint tres rectæ lineę in proportione aliqua, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum contentum prima, & media ad id, quod media, & tertia continetur.

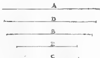


Sint tres rectę lineæ in proportione aliqua AB BC CD. Dico vt A B ad C D, ita esse rectangulum contentũ AB BC ad id quod B C CD continetur. Ducatur enim à pũcto A ipsi AB ad rectos angulos AE; ponaturq; AE ipsi BC æqualis; & per E quidem ipsi AD parallela ducatur EG; per BCD vero ducantur BF CH DG parallelæ ipsi A E. quoniam igitur est vt AB ad BC, ita AF parallelogrammum ad parallelogrammum BH; ut autem BC ad CD, ita parallelogrammum BH ad ipsum CG: erit ex ęquali vt AB ad CD, ita AF parallelogrammum ad parallelogrammum C G. & est parallelogrãmum quidem A F, quod AB BC continetur; namque AE est ęqualis BC; parallelogrammum vero CG est, quod continetur BC CD; etenim BC ipsi CH est ęqualis. Si igitur fuerint tres rectæ lineæ in proportione aliqua, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum, quod continetur prima & media ad rectangulum media & tertia cõtentum quod oportebat demonstrare.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO. XXXIII.

Inuenire duas medias potentia solum commensurabiles, quæ medium contineant, ita ut maior plus posit, quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponantur



Exponantur tres rationales A B C, potentia solum commensurabiles, ita vt A plus possit, quàm C quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine: & sit rectangulo ex ipsis A B ęquale quadratum, quod fit ex D. medium autem est rectangulum ex AB. ergo & quadratũ ex D medium erit; & recta linea D media. rectangulo autem ex B C æquale sit rectangulum ex DE. Quoniam igitur est vt rectangulum ex AB ad rectangulum ex BC, ita recta linea A ad ipsam C; sed rectangulo quidem ex A B æquale est quod fit ex D quadratum; rectangulo autem ex B C ęquale rectangulum ex DE: erit vt A ad C, ita quadratum ex D ad id, quod ex D E rectangulum. sed ut quadratum ex D ad rectangulum ex DE, ita D ad E. & ut igitur A ad C, ita D ad E. commensurabilis autem est A ipsi C potentia solum. ergo & D ipsi E potentia solum est cõmensurabilis. atque est D media. media igitur & E. itaque qm est vt A ad C, ita D ad E; & A plus potest, quàm C quadrato rectę lineę sibi lõgitudine commensurabilis: & D plus poterit, quàm E quadrato rectę lineę sibi cõmensurabilis longitudine. Dico præterea rectangulum ex DE medium esse. Quoniam enim rectangulo ex B C ęquale est, quod ex D E rectangulum, medium aũt est quod ex B C. ergo & quod ex D E medium erit. Inuentę igitur sunt duę medię potentia solum commensurabiles DE, quæ medium continẽt, ita vt maior plus possit, quàm minor quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis. Rursus similiter inuenientur duæ mediæ potentia solum commensurabiles. & medium continentes, ita vt maior plus possit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; quando scilicet A plus possit, quàm C quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. quod facere oportebat.

Ex anteced. lemate.

22. huius.

Lem. 23. huius.

24. huius.

25. huius.

22. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 8 B ℞ 48, C ℞ 28, rectangulũ. quod ipsis AB cõtinetur, erit ℞, 3072. & recta linea D ℞℞ 3072, quae est media. fiat vt A ad C, ita D ad aliã, quae sit E. erit E ℞℞ 588. ergo ℞℞ 3072, & ℞℞ 588 duae mediae sunt potentia solũ commensurabiles, quae medium continent, & maior plus potest, quàm minor quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis. si enim à quadrato maioris auferatur quadratum minoris, hoc est si à ℞ 3072 auferatur ℞ 588, reliqua erit ℞ 972. suntq; ℞℞ 3072, & ℞℞ 972 duae mediae longitudine inter se commensurabiles, vt 4 ad 3. nã si ℞℞ 3072 diuidatur per ℞℞ 972, exibit ℞℞ 3, $\frac{13}{81}$ quae est 1. $\frac{1}{3}$ hoc est $\frac{4}{3}$. rursus sit A 8, B ℞ 48, C ℞ 20, erit D cadẽ, quę supra, videlicet ℞℞ 3072. fiat vt A ad C, ita D ad aliam, quae sit E erit E ℞℞ 300. sunt igitur ℞℞ 3072, & ℞℞ 300 duae mediae potentia solum commensurabiles, quae medium continent, & maior plus potest, quàm minor quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. sed sit A ℞ 6, B ℞ 3, C ℞ 2, erit D ℞℞ 18. fiatq; vt A ad C, ita ℞℞ 18 ad aliã, quae sit E, erit E ℞℞ 2. ergo ℞℞ 18, & ℞℞ 2 sunt duae mediae potentia solum commensurabiles, & medium continentes, quarum maior plus potest, quã minor, quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine.

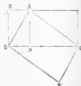
LEMMA I.

Sit triangulum orthogonium ABC, rectum habens angulum B A C, & ducatur AD perpendicularis. Dico rectangulum quidem contentum CB BD ęquale esse quadrato, quod fit ex BA; cõtentum vero BC CD æquale quadrato ex CA; & contentum B D D C æquale quadrato ex

DA

DA: & denique contentum BC AD rectangulo, quod BA, AC continetur, æquale esse.

Quoniam enim in triangulo orthogonio ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est AD, triãgula ABD ADC similia sunt, & toti
8 sexti. triangulo ABC, & inter se. et quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit vt C
4 sexti. B ad BA, ita AB ad BD. ergo rectangulũ, quod
17. sexti. CB BD continetur quadrato ex AB est æquale. Eadem ratione et rectangulum contentum BC CD æquale est quadrato ex AC. rursus quoniã in triangulo orthogonio ab angulo recto ad basim perpendicularis ducitur, ducta basis partiũ
8 sexti. media proportionalis est. quare ut BD ad DA, ita AD ad DC; ac propterea rectãgulum, quod BD DC continetur est æquale quadrato ex AD. Dico & rectangulum contentum BC AD ei, quod BA AC continetur, æquale esse. Quoniam enim, vt diximus, triangulum ABC triangulo ACD est simile, vt BC ad CA, ita erit BA ad AD. si autem
4. sexti. quattuor rectę lineę proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum est
16. sexti. ęquale ei, quod medijs continetur. ergo rectangulum contentum BC AD contento BA AC æquale erit. Dico præterea si describamus parallelogrammum rectangulum EC, & ipsum AF compleamus, rectangulum EC ipsi AF æquale esse. vtrique enim ipsorum duplum est triãgulũ ABC. atque est rectangulũ quidem EC id, quod BC AD continetur; rectangulum vero AF quod continetur BA AC. At rectangulum, quod cõtinetur BC AD rectangulo BA AC contento est æquale.



LEMMA II.

Si recta linea in partes inæquales secetur, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum contentum tota, et maiori parte ad rectangulũ, quod tota, & minori continetur.

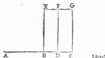
Recta enim quædam linea AB secetur in partes inæquales ad E. Dico vt AE ad EB, ita esse rectangulum contentum BA AC ad id, quod AB BE continetur. describatur enim ex AB quadratum ACDB; & per E quidem alterutri ipsarum AC DB parallela ducatur EF. perspicuum est vt AE ad EB, ita esse AF parallelogrammum ad parallelogrammum FB. atque est AF quidẽ parallelogrammum quod BA AE continetur; etenim CA ipsi AB est æqualis: parallelogrammum vero FB est quod continetur AB BE; æqualis enim est DB ipsi BA. vt igitur AE ad EB, ita rectangulum contentum BA AE ad id, quod AB BE cõtinetur. quod oportebat demonstrare.



LEMMA III.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ipsarum in partes æquales secetur, rectangulum contentum duabus rectis lineis duplum est eius, quod maiori, & dimidia minoris continetur.

Sint duæ rectæ lineæ inęquales AB BC, quarum maior AB: & secetur BC bifariam in puncto D. Dico rectangulum contentum AB BC duplum esse eius, quod AB BD continetur. ducatur enim à puncto B ipsi BC ad rectos angulos BE; ponaturq; BE ipsi BA æqualis, & figura describatur. Quoniam igitur est vt BD ad DC, ita parallelogrammum BF ad DC parallelogrāmum; erit componendo vt BC ad CD, ita parallelogrammum BG ad ipsum GD. est autem BC dupla ipsius CD. ergo & parallelogrammum BG parallelogrammi GD est duplum. atque est BG quidem, quod AB BC continetur, etenim AB est ęqualis BE: DG vero est quod continetur AB BD: nam BD ipsi DC, & AB ipsi DF est ęqualis. quod oportebat demonstrare.



1. sexti.

PROBLEMA X. PROPOSITIO. XXXIIII.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; rectangulum vero, quod ipsis continetur, medium.

31. huius.

Exponantur duæ rationales potentia solum commensurabiles AB BC, ita vt maior AB plus possit, quā minor BC quadrato rectę lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & secta BC, bifariam in D, quadrato, quod fit ab alterutra ipsarum BD DC æquale parallelogrammum ad rectam lineā AB applicetur, deficiens figura quadrata: & sit quod continetur AE EB. describatur in recta linea AB semicirculus AFB, ducaturq; ipsi AB ad rectos angulos EF, & AF FB iungantur. Quoniam igitur duę rectæ lineę AB BC inæquales sunt, & AB plus potest, quàm BC quadrato rectę lineæ sibi longitudine incommensurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori BC, hoc est quadrato dimidiæ ipsius æquale parallelogrammum applicatum est ad AB, deficiens figura quadrata, quod quidem AE EB continetur: erit AE ipsi EB incommensurabilis. atque est vt AE ad EB, ita BAE rectangulum ad rectangulum ABE. rectangulum autem BAE quadrato ex AF est æquale; & rectangulum ABE ęquale quadrato ex BF. quadratū igitur ex AF incommensurabile est quadrato ex FB: ideoq; rectæ lineæ AF FB potentia sunt incommensurabiles. & quoniam AB rationalis est, & quadratum, quod fit ex AB erit rationale. ergo & rationale compositum ex quadratis ipsarum AF FB. rursus quoniam rectangulum AEB est ęquale quadrato ex EF: ponitur autem rectangulum AEB quadraro etiam ex BD æquale. ergo FE est ęqualis BD, ac propterea BC ipsius EF est dupla. rectangulū igitur ABC duplum est rectāguli, quod AB EF continetur. sed rectangulum ABC est medium. ergo & medium quod continetur AB EF. est autem quod AB EF continetur æquale contento AF FB. contentum igitur AF FB medium est. sed & ostensum est rationale, quod componitur ex ipsarum AF FB quadratis. Inuentę igitur sunt duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles AF FB, quę faciunt compositū quidem ex ipsarum quadratis rationale; rectangulum vero, quod ipsis continetur, medium. quod facere oportebat.



Per lemma ante 19. huius uel per 28. sexti.

19 huius.

Per 2. lemma ex antecedentibus.

Per 1. lemma

Per 9. diffi.

Per 3 lemma

22 huius.

Cor. 24 huius.

Per 1. lemma

SCHOLIUM.

At vero ex duobus spacijs irrationalibus inter se compositis totum fieri rationale, ex hoc cognoscemus.

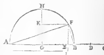
Exponatur

Exponatur rationalis AB, & duo numeri CD non habentes proportionem, quam quadratus numerus ad
Corol.10.huius quadratum numerum: fiatq; vt C ad D, ita quadratum ex AB ad id quod ex BE quadratum: & descripto quadrato ex AB per E ducatur alterutri laterum parallela EF. Quoniam igitur est vt C ad D, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BE; & C ad D proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum:
9 huius. erit AB ipsi BE longitudine incommensurabilis.
Ex demonstratis ad 17 huius. ergo & BA reliquae AE incommensurabilis est longitudine.
1.sexti. vt autẽ AB est ad vtramque ipsarum AE EB, ita quadratum ex AB ad vtrumque parallelogrammorũ. quadratum igitur ipsis parallelogrammis incommensurabile erit. sed quadratum est rationale. irrationalia igitur sunt parallelogramma, quae rationalis sunt partes, & ipsum rationale cõplẽt.



F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB 8, BC ℞ 20. erit BD, vel DC ℞ 5: & quadrato ipsius BD, quod est 5 aequale parallelogrammum ad AB applicetur, deficiens figura quadrata. illud autem facile assequimur, si quae tradita sunt in lemmate ante 18. huius repetantur. Itaque in recta linea AB descripto semicirculo AFB; & secta AB bifariam in G, ipsi ad rectos angulos ducatur GH; ponaturq; GK aequalis BD. est enim GH maior, quàm BD. nam cum AB sit maior, quàm BC, erit etiam ipsius AB dimidia maior, quàm dimidia BC. deinde per K ipsi AB parallela ducatur KF: atque à puncto F agatur FE ad AB perpendicularis, quae protendatur in L, ita vt EL sit aequalis EB; & parallelogrammum AL compleatur. erit igitur parallelogrammum AL illud, quod AE EB continetur, & aequale quadrato ipsius FE, hoc est quadrato BD. quare ad rectam lineam AB applicatum est parallelogrammum AL quadrato ipsius BD aequale, & deficiens figura quadrata. & quoniam recta
5.secundi. *linea AB secatur in partes aequales ad G, & in partes inequales ad E, erit rectangulum contentum AE EB vnà cum quadrato ipsius GE aequale quadrato dimidiae AB, hoc est ipsius AG: quadratum autem AG est 16, & rectangulum AEB 5; est enim FE ℞ 5, & eius quadratum 5, quod quidem rectangulo AEB est aequale. reliquum igitur quadratum ipsius GE est 11, & recta linea GE ℞ 11. ergo AE constans ex AG GE est 4 vnà cum ℞ 11, vel 4 plus ℞ 11. & EB 4 dempta ℞ 11, vel 4 minus ℞ 11. vt autẽ sciamus, quae sint AF FB, necesse erit prius inuenire quadrata ipsarum AE EB. quare non inutile visum est theoremata nonnulla hic apponere, attinentia ad eas, quae ex binis, vel pluribus nominibus constant, & ad apotomas.*



THEOREMA I.

Data recta linea, quae fit ex binis, vel pluribus nominibus, & quadratum eius datum erit.

Sit AB ex binis nominibus AC CB: sitq; AC 4, CB ℞ 11. Dico quadratum eius datum esse. Quoniam enim AB vtcunque secatur in puncto C, erit ex quarta propositione secundi libri, quadratum totius aequale quadratis partium, & rectangulo, quod his dictis partibus continetur. itaque quadratum AC est 16, & quadratum CB 11. rectangulum vero contentum AC CB est ℞ 176, cuius duplum ℞ 704. ergo quadratum AB est 27 plus ℞ 704.

A 4 C ℞ 11 B

Sit AD ex tribus nominibus AB BC CD: sitq́; AB 6, BC R 10, & CD R 3. Dico et quadratum ipsius dari. nā cum AD secetur in duobus punctis B C, erit quadratum totius aequale rectangulis, quae singulis partibus ad singulas applicatis cōtinentur, ex ijs, quae à nobis demōstrata sunt ad secundā propositionē secūdi libri. quadratum igitur AB est 36, & rectangulū contentū AB BC est R 360; contentum vero AB CD est R 108. & rursus contentum AB BC est R 360, & quadratum BC est 10. preterea rectangulum, quod continetur BC CD est R 30, & quod rursus continetur AB CD R 108; & quod continetur BC CD R 30. & denique quadratū CD est 3. sed duplum R 360 est R 1440, & duplum R 108 est R 432; duplum vero R 30 est R 120. quare summa totius erit 49 plus R 1440 plus R 432 plus R 120, quod est ipsius AD quadratum. Et eodem modo in alijs faciemus quotcumque nomina habeant.

A B C D

THEOREMA II.

Datis duabus rectis lineis, quæ ex binis, vel pluribus nominibus constent, & rectangulum ipsis contentum datum erit.

Sint rectae lineæ AB CD; constetq́; AB ex binis nominibus AE EB; & sit AE 5, EB R 12; CD vero constet ex CF FD, & sit CF 4 FD R 7. Dico rectangulum, quod ipsis continetur, datum esse. Quoniam enim duae rectae lineae AB CD vtcumque secantur in punctis E F, rectangulum ipsis cōtētū est aequale rectāgulis, quae vnaquaq; parte vnius ad vnāquāq; partē alterius applicata, continentur, ex ijs quae nos demōstrauimus ad primā propositionē secūdi libri theoremate primo. rectāgulū igitur contentū 4 & 5 est 20, & contētū 4, & R 12 est R 192. quod autē cōtinetur R 7, & 5 est R 175, & quod continetur R 7, & R 12 est R 84. totius ergo summa est 20 plus R 292 plus R 175 plus R 84. quod est rectangulum ipsis AB CD contentum. non aliter inuenietur rectangulum contentum duabus rectis lineis, quae ex pluribus nominibus constent.

A 5 E R 12 B

C 4 F R 7 D

THEOREMA III.

Datę apotomes quadratum datum erit.

Sit apotome AC. & recta linea ipsi congruens sit CB; sitq́; tota AB 4, BC R 11. erit AC 4 minus R 11. Dico & quadratum ipsius datum esse. vt autem hoc inueniamus, non vtemur quarta propositione secundi libri, vt ante, sed septima eiusdem. non enim 4, & R 11 sunt partes dictae lineae, sed 4 est tota linea, et R 11; est pars, quae ab ea aufertur. Itaque quoniam AB secatur vtcumque in puncto C, erit quadratum totius AB vnà cum quadrato vnius partis BC aequale ei, quod bis continetur tota AB, et BC vnà cum alterius partis AC quadrato. est igitur quadratum ipsius AB 16, et quadratum BC 11; rectangulum autem, quod tota AB, et BC continetur est R 176, cuius duplum R 704. ergo R 704 vnà cum quadrato ex AC est aequale 27; ac propterea quadratum ex AC est 27 minus R 704. qui vero ex quarta propositione secundi id quadratum sibi inueniendum proponunt, coguntur dicere si minus per minus multiplicetur produci plus. quod verum non esse primus animaduertit Hieronymus Cardanus non solum mathematicus, sed et Philosophus, ac medicus prestantissimus, vt apparet in libro de regula aliza, quem nuper edidit. Verū quoniam ex eorum operatione error non sequitur, hoc ipsis condonandum est.

A C B

THEOREMA IIII.

Datis duabus rectis lineis earum, quas apotomas appellamus, & rectangulum, quod ipsis continetur, datum erit.

Sint duae apotomae datae AC DF. et ipsi quidem AC cōgruat CB; ipsi vero DF congruat FE: sitq́; tota AB 8, BC R 12: et sit DE 4, EF R 3. erit AC 8 minus R 12, et DF 4 minus R 3. Dico

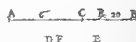
et rectãgulum, quod ipsis continetur, datum esse. Quoniam enim duę rectae lineae AB DE vtcumque secantur in punctis C F, erit rectangulũ, quod continetur totis AB DE vnà cum rectãgulo contento partibus CB FE aequale rectangulo contento tota AB, et parte FE vnà cum contento tota DE, et parte CB, et eo, quod reliquis partibus AC DF continetur, ex iis, quae demonstrata sunt à nobis ad primã propositionem secundi libri theoremate secundo. itaque rectangulum contentum AB DE est 32, & contentum CB FE est ℞ 36, hoc est 6; rectangulum vero, quod continetur AB FE est ℞ 192, et quod continetur DE CB est ℞ 192, quae duae radices inter se iunctae faciunt ℞ 768. quare 38 est aequalis ℞ 768 vnà cum eo, quod AC DF continetur. ex quibus sequitur rectangulum contentum AC DF esse 38 minus ℞ 768. at recentiores ad hoc inueniendum vtuntur 1 theoremate; et ob id asserunt si minus per minus multiplicetur produci plus, sed non recte, cum vtendum sit theoremate secundo; neque enim 8, et ℞ 12 sunt partes vnius rectae lineae; immo vero 8 est tota linea, et eius pars ℞ 12, et similiter dicendũ de 4 minus ℞ 3. ex ipsorum tamen operatione nullus sequitur error.



THEOREMA V.

Data recta linea, quæ sit ex binis, vel pluribus nominibus, & data apotoma, rectãgulum, quod ipsis continetur, datum erit.

Sit data quidem recta linea AB, quae constet ex binis nominibus AC CB, vt sit AC 6, CB ℞ 20. data autem apotome sit DF, et ipsi congruens FE, vt tota DE sit 4, et EF ℞ 12. erit DF 4 minus ℞ 12. Dico rectãgulũ, quod ipsis AB DF cõtinetur datum esse. Quoniam enim duae rectae lineae AB DE vtcumque secantur in punctis CF, erit ex secundo theoremate iam dicto rectangulum, quod ipsis AB DE continetur, aequale rectangulis, quae fiunt vnaquaque parte vnius ad vnamquamque partem alterius applicata; videlicet rectangulo contento DF AC, et contento DF CB: et preterea rectangulo, quod continetur FE AC, et quod continetur FE CB. rectangulum autem contentum DE AC vnà cum contento DE CB est aequale rectangulo quod totis AB DE continetur, ex prima secundi libri. Itaque rectangulum contentum DE AC est 24, et contentum DE CB est ℞ 320. rectangulũ vero, quod cõtinetur FE AC est ℞ 432, et quod continetur FE CB ℞ 240. ergo rectangula, quae continētur DF AC, et DF CB, hoc est rectangulum contentum DF AB est 24 plus ℞ 320, minus ℞ 432, et minus ℞ 240. Eodem modo procedemus, si rectae lineae AB DE ex pluribus nominibus constent.



Ex quibus apparet si plus per minus, vel minus per plus multiplicetur, produci minus.

His ita demonstratis constat, quadratum ipsius AE esse 27 plus ℞ 704, et quadratum EB esse 27 minus ℞ 704. quare addito vtrique communi quadrato ex EF, quod est 5, erit quadratum ex AF 32 plus ℞ 704, et quadratum ex FB 32 minus ℞ 704, rectaq; linea AF radix huius summae 32 plus ℞ 704, quam radicem vniuersalem appellant, et ita notant, videlicet ℞ V. 32 plus ℞ 704: et similiter BF ℞ V. 32 minus ℞ 704, quarum quidem quadrata inter se iuncta videlicet 32 plus ℞ 704, et 32 minus ℞ 704 faciunt 64, quod est ipsius AB quadratum. preterea quoniam rectangulum, quod continetur rectis lineis AF FB est aequale contẽto ipsis AB EF, vt demonstratum iam fuit in primo lemmate; contentum autem AB EF est ℞ 320: erit etiam rectangulum, quod his lineis ℞ V. 32 plus ℞ 704, et ℞ V. 32 minus ℞ 704 continetur ℞ 320. Hoc autem ita esse ex earum quoque inter se multiplicatione manifesto apparere potest. dispositis enim his radicibus videlicet ℞ V. 32 plus ℞ 704, et ℞ V. 32 minus ℞ 704, ut quid ex earum multiplicatione proueniat cognoscamus, operandum est, quemadmodum in simplicibus radicibus; nimirũ multiplicãdo earũ quadrata inter se, et eius, quod producitur radix erit id, quod queritur. cũ aũt quadrata utriusq; cõstẽt ex duabus partibus, erit rectãgulũ, quod totis cõtinetur, ac si lineę essent, equale rectãgulis, quę fiũt singulis partibus vnius ad singulas alterius applicatis, ut demonstratũ est. si igitur 32 in se multiplicentur fiunt 1024, rursus si 32, hoc est ℞ 1024 multiplicet ℞ 704 fit ℞ 720896. et ita si 32 multiplicet minus R 704 fit minus R 720896. postremo si multiplicetur ℞ 704 per minus ℞ 704 fiunt minus 704. totũ igitur ex his compositũ est 1024 plus R 720896

℞ 720896 minus ℞ 720896 minus ℞ 704, hoc est 1024 minus 704. itaq; detractis 704 de 1024 relinquētur 320, & eius radix erit id quod queritur. ergo si multiplicemus ℞V. 32 plus ℞ 704 per ℞V. 32 minus ℞ 704 producetur ℞ 320. Quatenus vero ad scholiū pertinet, sit AB 10 & numeri CD 5. 3. & fiat vt 5 ad 3. ita quadratū ex AB, hoc est 100 ad quadratū ex BE, erit ad 60 ergo ipsa BE est ℞ 60, & AE 10 minus ℞ 60 rectāgulum autem BF est ℞ 6000, & rectangulum AF 100 minus ℞ 6000.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO. XXXV.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, rectāgulum vero quod ipsis continetur rationale.

Exponantur duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quæ rationale contineant, ita vt AB plus possit quàm BC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incōmensurabilis. & in ipsa AB describatur semicirculus DB: sectaq; BC bifariam in E, applicetur ad AB parallelogrammum æquale quadrato ipsius BE, deficiens figura quadrata; & sit quod continetur AF FB. incommensurabilis igitur est AF ipsi FB longitudine. à puncto autem F ipsi AB ad rectos angulos ducatur FD, & AD DB iungantur. itaque quoniam AF est incommensurabilis FB; erit & BAF rectangulum rectangulo ABF incommensurabile. est autem rectangulū quidem BAF quadrato ipsius AD æquale; rectangulum vero ABF æquale quadrato ipsius DB incommensurabile igitur est quadratum AD ipsius DB quadrato; ac propterea rectæ lineæ ad AD DB potentia sunt incommensurabiles. & quoniam medium est quadratum ipsius AB, erit & compositum ex quadratis ipsarum AD DB medium. quòd cum dupla sit BC ipsius DF, & rectangulum ABC rectanguli ex AB DF duplum erit. quare & commensurabile. rationale autem est rectangulum ABC, ita enim ponitur. ergo & rectangulum ex AB FD est rationale. sed rectangulo ex AB FD æquale est rectangulum ADB quare & ipsum ADB rectangulum rationale erit. Inuentæ igitur sunt duę rectę lineæ potentia incommēsurabiles AD DB, quæ faciunt compositū quidem ex ipsarum quadratis medium, rectangulum uero, quod ipsis continetur rationale.

Margin notes (right margin, beside the lines of the demonstration, from top to bottom): 2. huius. — Lemma ad 19 huius. — 19. huius. — Lemma 2. — Lemma. 1. — Lemma. 3. — Lemma 1. ante 34. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB ℞℞ 54, BC ℞℞ 24. & diuisa ℞℞ 24 bifariam, erit eius dimidia BE ℞℞ 1 $\frac{1}{2}$. applicetur ad AB parallelogrammum aequale quadrato ipsius BE, hoc est aequale ℞ 1 $\frac{1}{2}$, deficiens figura quadrata. quod similiter, atque supra fiet. diuisa enim rursus AB. hoc est ℞℞ 54 bifariam, erit eius dimidia ℞℞ 3 $\frac{3}{8}$. & si ab ipsius quadrato, videlicet a ℞ 3 $\frac{3}{8}$ auferatur ℞ 1 $\frac{1}{2}$, reliqua erit ℞ $\frac{3}{8}$. ergo recta linea AF est RR 3 $\frac{3}{8}$ plus RR $\frac{3}{8}$, & FB RR 3 $\frac{3}{8}$ minus RR $\frac{3}{8}$. quadratū aūt ipsius AF eodē modo inuenietur esse R 6 plus R 4 $\frac{1}{2}$. & quadratū ex FB R 6 minus R 4 $\frac{1}{2}$, quibus addito cōi quadrato ipsius FD, videlicet R 1 $\frac{1}{2}$, erit quadratum ex AD ℞ 13 $\frac{1}{2}$ plus R 4 $\frac{1}{2}$, & quadratum ex DB R 13 $\frac{1}{2}$ minus R 4 $\frac{1}{2}$. ideoq; recta linea AD ℞V R 13 $\frac{1}{2}$ plus R 4 $\frac{1}{2}$, & DB RV. R 13 $\frac{1}{2}$ minus R 4 $\frac{1}{2}$, quarū quadrata simul iuncta faciunt R 54, videlicet rectae lineae AB quadratum. quod est medium. At rectangulum, quod AD DB continetur est aequale contento AB DF. contentum vero AB DF, hoc est RR 54, & RR 1 $\frac{1}{2}$ est RR 81, hoc est 3. ergo quod continetur AD DB est 3. sed et idem aliter constat multiplicando RV. R 13 $\frac{1}{2}$ plus R 4 $\frac{1}{2}$ plus RV R 13 $\frac{1}{2}$ minus R 4 $\frac{1}{2}$; fit enim R 9,

quae est 3. sunt igitur hę rectae lineae potentia incommensurabiles, & faciunt compositum ex earum quadratis medium; rectangulum vero, quod ipsis continetur, rationale, vt oportebat.

PROBLEMA XII. PROPOSITIO. XXXVI.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis medium, & rectãgulum, quod ipsis continetũr, medium, incommensurabileq́ue composito ex ipsarum quadratis.



35 huius. Exponantur duæ medię potentia solũ commensurabiles AB BC, quæ medium contineant, ita vt AB plus possit, quàm BC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis. & in AB semicirculus ADB describatur, & reliqua fiant, quęadmodũ in ijs, quæ superius dicta sunt. Quoniam igitur AF incommensurabilis est ipsi FB longitudine, erit & AD ipsi DB potentia incommensurabilis. & quoniam medium est quod fit ex A B, & compositum ex quadratis AD DB est medium. Quòd cum rectangulũ AFB ęquale sit quadrato alterutrius ipsarũ BE DF, erit DF ęqualis BE; ac propterea BC ipsius FD dupla. rectangulum igitur ABC duplũ est eius, quod AB FD continetur. medium autem est rectangulum ABC. ergo & quod continetur AB FD est mediũ, atque est ęquale contento AD DB. quare & ipsum medium erit. & quoniam incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine; commensurabilis autem CB ipsi BE: erit & AB ipsi BE lõgitudine incommensurabilis. ergo & quadratum ex AB incommensurabile est rectangulo ABE. sed quadrato quidem ex AB ęqualia sunt quę ex AD DB quadrata: rectangulo autem ABE est æquale rectangulum contentum AB FD, hoc est rectangulum ADB. compositum igitur ex quadratis ipsarum AD DB rectangulo ADB est incommensurabile. ergo inuentæ sunt duę rectæ lineæ potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium: & rectangulum, quod ipsis continetur, medium, & adhuc composito ex ipsarum quadratis incommensurabile.

Corol. 14 huius.
1. lemma ad 34 huius.
33 huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit recta linea AB ℞℞ 18, & BC ℞℞ 2. diuidaturq; BC bifariam in E, erit BE ℞℞ $\frac{1}{8}$. et si ad AB applicetur parallelogrammum aequale quadrato ipsius BE, hoc est ℞ $\frac{1}{8}$, deficiens figura quadrata, erit recta linea AF ℞℞ 1 $\frac{1}{8}$ plus ℞℞ $\frac{1}{?}$ & FB ℞℞ 1 $\frac{1}{8}$ minus ℞℞ — quadratum autem ipsius AF ℞ 3 $\frac{1}{8}$ plus ℞ 3, & quadratum FB ℞ 3 $\frac{1}{8}$ minus ℞ 3. & addito vtrique quadrato ipsius BE, erit quadratum ex AD ℞ 4 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 3. & quadratum ex DB ℞ 4 $\frac{1}{2}$ minus ℞ 3, ergo recta linea AD est ℞ V. ℞ 4 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 3, & DB ℞ V ℞ 4 — minus ℞ 3, quarũ quadrata simul iuncta faciunt ℞ 18, quantum est quadratum ex AB. rectangulum vero ipsis contentum est ℞ 1 $\frac{1}{2}$. quod est medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXVII.

Si duæ rationales potentia solum commensurabiles componantur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis nominibus,



Componantur enim duæ rationales potentia solum commensurabiles A B BC. Dico AC irrationalem esse. Quoniam enim incommensurabilis est A B ipsi BC longitudine, potẽtia enim solũ

commensu-

commensurabiles sunt; & vt AB ad BC, ita rectãgulum ABC ad id, quod fit ex BC quadratum: erit rectangulum ABC quadrato ex BC incommensurabile. Sed recta- 1. sexti. 10 huius.
gulo quidem ABC commensurabile est id, quod bis AB BC continetur: quadrato 6. huius.
autem ex BC commensurabilia sunt quadrata ex AB BC. quod igitur bis AB BC 13. huius.
continetur incommensurabile est quadratis ex AB BC. & componendo quod bis AB BC continetur vnà cum quadratis ex AB BC, hoc est quadratum ex AC incõ- 4 secundi.
mensurabile est composito ex ipsarum AB BC quadratis. rationale autem est compositum ex quadratis AB BC. ergo quadratum ex AC irrationale est: & ob id re- 20 diffi.
cta linea AC est irrationalis, vocetur autem ex binis nominibus. 21. diffi.

SCHOLIUM.

Quæ inter has rationales media est proportionalis, ea media est, neutra autem harum, neque vtraque est media, sed quæ ex ipsis constat ex binis nominibus appellatur. vtrarumque igitur irrationalium sunt procreatrices, iuxta tamen differentes procreationis modos.

F. C. COMMENTARIUS.

Sit recta linea AB 2, & BC ℞ 3. *erit AC 2 plus* ℞ 3. *& eius quadratum 7 plus* ℞ 48. *est enim quadratum ipsius AC 4, & quadratum BC 3. rectangulum vero, quod AB BC continetur* ℞ 12, *cuius duplum est* ℞ 48.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXXVIII.

Si duæ mediç potentia solum commensurabiles componantur quæ rationale contineant, tota irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs prima.

A ℞℞ 54 B ℞℞ 24 C

Componantur enim duç mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quç rationale contineãt. dico totam AC irrationalem esse Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi BC longitudine, & quadrata ex AB BC incommensurabilia erunt rectangulo, quod bis AB BC continetur. ergo componendo quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod est ipsius AC quadratum incommensurabile est rectangulo ABC. sed ABC rectangulum rationale ponitur. ergo quadratum ex AC irrationale est, & recta linea AC irrationalis. vocetur autem ex binis medijs prima.

A
B
C

F. C. COMMENTARIUS.

Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB BC, quæ rationale contineant] *Quomodo hę inueniantur docuit in 28 huius. sit autem AB* ℞℞ 54, *BC* ℞℞ 24, *erit tota AC* ℞℞ 54 *plus* ℞℞ 24. A

Et quadrata ex AB BC incommensurabilia erunt rectangulo, quod bis AB BC continetur] *Hoc eodem modo, quo supra, sequitur ex 13 huius bis repetita.* B

Quod est ipsius AC quadratum] *Ex 4 secundi.* C

Ergo quadratum ex AC irrationale est, & recta linea AC irrationalis] *Ex 10 & 11 diffinitione huius.* D

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXIX.

Si duç mediç potentia solum commensurabiles componantur.

quæ medium

quæ medium contineant, tota irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs secunda.



A Componantur enim duæ mediæ potentia so
lum commensurabiles, AB BC, quæ medium
B contineant. Dico AC irrationalem esse. exponatur rationalis DE. & quadrato ex AC æquale parallelogrammum rectangulum D F ad ipsam DE applicetur, quod latitudiné faciat DG.
C itaque quoniam quadratum ex AC æquale est
4. secundi quadratis ex AB BC, & rectangulo, quod bis
D AB BC continetur. applicetur ad ipsam DE quadratis ex AB BC æquale parallelogrammũ
E rectangulum EH. reliquum igitur FH æquale est ei, quod bis AB BC continetur. & quoniam media est utraque ipsarum AB BC, erũt & qua
F drata ex AB BC media. medium autem ponitur & quod bis continetur AB BC. atque est quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum EH. rectangulo autem bis AB BC contento ęquale est ipsum HF. me
G dium igitur est vtrumque ipsorum EH HF: & ad rationalẽ applicantur. ergo vtraque recta linea DH HG est rationalis, & ipsi DE longitudine incommensurabilis.
H & quoniam incommensurabilis est AB ipsi BC lõgitudine; atque est vt AB ad BC,
K ita quadratum ex AB ad ABC rectangulum: erit quadrato ex AB rectangulum
L ABC incommensurabile. sed quadrato quidem ex AB commensurabile est compositum ex quadratis ipsarum AB BC: rectangulo autem ABC est commensurabile,
M quòd bis AB BC continetur. ergo compositum ex quadratis AB BC incommensurabile erit ei, quod bis continetur AB BC. sed quadratis ex AB BC æquale est parallelogrammum EH: & rectangulo, quod bis AB BC continetur æquale HF pa
N rallelogrammum. quare EH ipsi HF est incommensurabile, & ob id recta linea DH ipsi HG incommensurabilis longitudine. ostensæ autem sunt rationales. ergo DH
O HG rationales sunt potentia solum commensurabiles: ac propterea DG est irratio
P nalis; rationalis autem DE; & quod rationali, & irrationali continetur rectangulũ
Q irrationale est. spacium igitur DF est irrationale, & quę ipsum potest irrationalis. potest autem ipsum DF recta linea AC. ergo AC irrationalis erit. vocetur autem ex binis medijs secunda.

SCHOLIVM.

Vocauit illam ex binis medijs secundam, quoniam medium est non rationale, quod ipsis AB BC continetur; medium enim rationali posterius est. At vero quod rationali, & irrationali continetur irrationale esse perspicue constat.

21 huius. Nam si rationale sit, & ad rationalem applicetur, erit latitudo, quam facit, rationalis; sed & irrationalis. quod est absurdum. illud igitur quod rationali, & irrationali continetur est irrationale. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

A Componantur enim duæ medię potentia solum commensurabiles AB BC, quę medium contineant] *Quomodo autem hę inueniantur docet in 29 huius. sit AB* RR 18, *et BC* RR 8, *erit AC* RR 18 *plus* RR 8, *cuius quadratum* R 50 *plus* R 48.

B Exponatur rationalis DE, & quadrato ex AC æquale parallelogrammum rectangulum

gulum DF ad ipsam DE applicetur, quod latitudinem faciat DG] *Sit rationalis DE 4, ad quam si applicetur illud medium* R 50, *latitudinem faciet* R 3 $\frac{1}{8}$, *quae sit DH: et si ad eādem applicetur* R 48, *faciet latitudinem* R 3, *quae sit HG. ergo tota latitudo DG erit* R 3 $\frac{1}{8}$ *plus* R 3.

Itaque quoniam quadratum ex AC æquale est quadratis] *Ex quarta secundi, vel 4. Barlaam monachi.* C

Applicetur ad ipsum DE quadratis ex AB BC æquale parallelogrammum rectangulum EH] *Quadratum ipsius AB est* R 18, *et quadratum BC* R 8, *quae inter se iunctę faciunt* R 50. *ergo parallelogrammum EH est* R 50, *et recta linea DH* R 3 $\frac{1}{8}$. D

Reliquum igitur FH est æquale ei, quod bis AB BC continetur] *Hoc est* R 48, *et recta linea HG* R 3, *vt dictum est.* E

Medium autem ponitur & quod bis AB BC continetur] *Medium ponitur, quod AB BC continetur. et quoniam illud, quod bis AB BC continetur est ei commensurabile, videlicet duplum ex 6. huius, et ipsum medium erit, ex corollario 24. huius.* F

Ergo vtraque recta linea DH HG est rationalis, & ipsi DE longitudine incommensurabilis] *Ex 23. huius.* G

Atque est vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad ABC rectangulum] *Ex lemmate ad 23 huius apposito, vel ex 1. sexti.* H

Erit quadrato ex AB rectangulum ABC incommensurabile] *Ex 10. huius.* K

Sed quadrato quidem ex AB commensurabile est compositum ex quadratis ipsarum AB BC] *Ponuntur enim AB BC potentia commensurabiles. ergo & earum quadrata commensurabilia erunt, et compositum ex ipsis commensurabile vtrique quadrato ex 16. huius.* L

Ergo compositum ex quadratis AB BC incommensurabile erit ei, quod bis continetur AB BC] *Ex 14. huius.* M

Et ob id recta linea DH ipsi HG incommensurabilis longitudine] *Ex 1. sexti, et 10. huius.* N

Ac propterea DG est irrationalis] *Ex 37. huius.* O

Et quod rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale est] *Quomodo hoc sequatur in antecedenti scholio dictum fuit.* P

Et quę ipsum potest irrationalis] *Ex 11. diffinitione.* Q

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO. XL.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componãtur, quæ faciãt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem ipsis continetur medium: tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem maior.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles AB BC, facientes ea, quæ proposita sunt. Dico AC irrationalem esse. Quoniam enim id, quod AB A



BC continetur, medium est; & quod bis continetur AB BC medium erit. compositum autem ex ipsarum AB BC quadratis est rationale. ergo quod bis AB BC continetur incommensurabile est composito ex quadratis ipsarum AB BC. & ob id quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod est quadratum ex AC, incommensurabile est quadratis ex AB BC. rationale autem est compositum ex quadratis AB BC. ergo & quadratum ex AC irrationale erit; ac propterea recta linea AC est irrationalis. vocetur autem maior. B C

SCHOLIUM.

Vocauit autem ipsam maiorem, propterea quod rationalia ex AB BC maiora

BC maiora sint medio, quod bis AB BC continetur: oporteatque à rationalium proprietate nomen imponere. At vero quæ fiunt ex AB BC maiora esse eo, quod bis AB BC continetur, sic ostendemus.

Manifestum igitur est AB BC inter se inæquales esse. si enim sint æquales, & quæ fiunt ex AB BC æqualia erunt ei, quod bis AB BC continetur, & rectangulum ABC rationale erit, quod nō ponitur. Inæquales igitur sunt AB BC. ponatur maior AB, & ipsi BC

A D B C

7.secundi æqualis BD. ergo quadrata ex AB BD æqualia sunt ei, quod bis AB BD cōtinetur vnà cum quadrato ex DA. æqualis autem est DB ipsi BC. quadrata igitur ex AB BC æqualia sunt ei, quod bis AB BC continetur, vnà cum quadrato ex AD. ideoq; quadrata ex AB BC maiora sunt, quàm id, quod bis AB BC continetur, quadrato ipsius DA.

F. C. COMMENTARIVS.

A Componantur enim duę rectę lineæ potentia incommensurabiles AB BC, facientes ea, quæ proposita sunt] *Inueniuntur autē hae ex 34 huius. sit AB* R *V.34 plus* R *704, et*
B *BC* R *V.32 minus* R *704. erit tota AC* R *V.32 plus* R *704 plus* R *V.32 minus* R *704.*
C Et quod bis AB BC continetur medium erit] *Ex corollario 24 huius.*

Et ob id quadrata ex AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, quod est quadratum ex AC incommensurabile est quadratis ex AB BC] *Ex 17. huius.*

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XLI.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis continetur, rationale; tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem rationale, ac medium potens.

A Componantur enim duę rectæ lineę potentia incommēsurabiles AB BC, facientes ea, quæ proposita sunt. Dico A

A B C

B C irrationalem esse. Quoniam enim cōpositum ex ipsarum AB BC quadratis medium est; quod autem bis AB BC cōtinetur rationale: erit compositum ex ipsarum AB BC quadratis incommensurabile ei, quod bis AB BC continetur. quare componēdo quadratum ex AC est incommensurabile ei, quod bis continetur ABBC. est autem rationale, quod bis AB BC continetur. quadratum igitur ex AC irrationale est; ideoq; recta lineā AC est irrationalis. vocetur autem rationale, ac medium potens.

SCHOLIVM.

Rationale autem, ac medium potentem ipsam idcirco appellauit, quòd possit bina spacia, vnum quidem rationale, alterum vero medium. & quoniam rationale pręcedit irrationale, ipsius rationalis prius mentionem fecit.

F. C. COMMENTARIVS.

Componātur enim duæ rectę lineæ potentia incommensurabiles AB BC, facientes ea quæ proposita sunt] *Hae autem inueniuntur ex 35. huius sit AB* R *V.* R 13 ÷ plus

℞ 4 $\frac{1}{2}$, BC ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ minus ℞ 4 $\frac{1}{2}$, vt tota AC sit ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 4 $\frac{1}{2}$ plus ℞ V. ℞. 13 $\frac{1}{2}$ minus ℞ 4 $\frac{1}{2}$.

Quod autem bis AB BC continetur rationale] *Sequitur hoc ex corollario 24 huius. ponitur enim eius dimidium rationale, videlicet quod AB BC continetur.* B

Quare componendo quadratum ex AC est incommensurabile ei, quod bis continetur AB BC] *Quoniam enim compositum ex ipsarum AB BC quadratis incommensurabile est ei, quod bis AB BC continetur, erit ex 17. huius compositum ex quadratis AB BC vnà cum eo, quod bis AB BC continetur, hoc est quadratum ex AC incommensurabile ei, quod bis continetur AB BC.* C 4. secundi.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO. XLII.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis medium, & quod ipsis cõtinetur medium, incommensurabileq́; composito ex quadratis ipsarum, tota recta linea irrationalis erit. vocetur autem bina media potens. A



Componantur enim duæ rectæ lineæ potẽtia incõmensurabiles AB BC, quę faciant compositum quidẽ ex ipsarum AB BC quadratis medium; quod autem ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. Dico AC irrationalẽ esse. Exponatur enim rationalis DE, & ad ipsam applicetur parallelogrammum rectangulum DF, æquale quadratis ipsarum AB BC: & parallelogrammum GH æquale ei, quod bis AB BC continetur. totum igitur DH quadrato ipsius AC est ęquale. & quoniam medium est compositum ex quadratis ipsarum AB BC, & æquale parallelogrammo DF, erit ipsum quoque DF medium; & ad rationalem DE applicatũ est. rationalis igitur est DG, & ipsi DE lõgitudine incommensurabilis. ob eandem causam & GK est rationalis, & incommensurabilis longitudine ipsi FG, hoc est ipsi DE. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum AB BC incommensurabile est ei, quod bis AB BC continetur; erit & parallelogrammum DF ipsi GH incommensurabile. ergo & recta linea DG incommensurabilis est ipsi GK, & sunt rationales. quare DG GK rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DK est irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatur. rationalis autem DE. ergo parallelogrammum DH irrationale est, & ipsum potens irrationalis. sed ipsum DH potest recta linea AC. quare AC irrationalis est. vocetur autem bina media potens.

(margin letters: B C D E F G)

SCHOLIUM.

Vocauit ipsam bina media potẽtem, propterea quod potest bina spacia media, videlicet compositum ex ipsarum AB BC quadratis; & illud, quod bis AB BC continetur.

F. C. COMMENTARIUS.

Componantur.n. duæ rectę lineę potentia incõmensurabiles AB BC, quæ faciãt compo- A

compositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis medium, quod antem ipsis cõtinetur medium] *Qua vero ratione hae inueniri possint, tradit in 36. huius. Sit AB ℞ V. ℞ $4\frac{1}{2}$ plus ℞ 3, & BC ℞ V. ℞ $4\frac{1}{2}$ minus ℞ 3. erunt earum quadrata simul iuncta* R 18, & *rectangulum ipsis contentum* R $1\frac{1}{2}$, *cuius duplum est* R 6.

B Exponatur enim rationalis DE, & ad ipsam applicetur parallelogrammum rectangulum DF ęquale quadratis ipsarum AB BC: & parallelogrammum GH aequale ei, quod bis AB BC continetur] *Sit rationalis DE 3, ad quam si applicetur parallelogrã mum DF, aequale composito ex ipsarum AB BC quadratis, videlicet* R 18, *latitudinem faciet* R 2, *quae sit DG: & si ad eandem applicetur parallelogrammum GH aequale ei, quod bis AB BC continetur, videlicet* R 6, *latitudinẽ faciet* R $\frac{2}{3}$, *quae sit GK. tota igitur latitudo DK erit* R 2 *plus* R $\frac{2}{3}$, *quae est irrationalis ex binis nominibus appellata: & totum parallelogrammum DH erit aequale quadrato ipsius AC, ex 4 secundi.*

C Rationalis igitur est DG ipsi DE longitudine incommensurabilis] *Ex 23 huius.*

D Ergo & recta linea DG incommensurabilis est ipsi GK] *Ex 10 huius, est enim vt DF ad GH, ita DG ad GK, ex 1. sexti.*

E Ac propterea DK est irrationalis, quæ ex binis nominibus appellatnr.] *Ex 37 huius.*

F Ergo parallelogrammum DH irrationale est] *Nam quod rationali, & irrationali continetur est irrationale, vt in scholio 39. huius demonstratum fuit.*

G Et ipsum potens irrationalis] *Ex 11. diffinitione.*

SCHOLIVM.

At vero dictas irrationales vno tantum modo diuidi in rectas lineas, ex quibus componuntur, & quę propositas species constituunt, mox demonstrabimus, si prius lemma quoddam exposuerimus, quod huiusmodi est.

LEMMA.

Exponatur recta linea AB, & secetur tota in partes inaequales ad vtrumque punctorum CD: ponatur autem AC quàm DB maior. Dico quadrata ipsarum AC CB quadratis AD DB maiora esse.

A D E C B

Secetur enim AB bifariam in E. & quoniam maior est AC, quàm DB, communis auferatur DC. reliqua igitur AD maior erit, quàm reliqua CB est autem AE ipsi EB ęqualis. ergo DE. quàm EC est minor: & puncta CD non ęqualiter distant à bipartita sectione.
5. secundi. & quoniam rectangulum ACB vnà cum quadrato rectę lineæ CE est ęquale quadrato ipsius EB; sed & rectangulum ADB vnà cum quadrato rectæ lineę DE est æquale ipsius EB quadrato: erit rectangulum ACB vnà cum quadrato ipsius EC æquale rectangulo ADB vnà cum quadrato ipsius DE. Quorum quadratum ipsius DE est minus quadrato EC. & reliquum igitur rectangulum ACB minus est rectangulo ADB. quare & quod bis AC CB continetur minus est eo, quod bis continetur AD DB. sed compositum ex quadratis rectarum linearum AC CB vnà cum eo, quod bis AC CB continetur, est ęquale composito ex quadratis ipsarum AD DB vna cum eo, quod bis continetur AD DB. est enim vtrumque eorum
4 secundi quadrato ipsius AB ęquale. & reliquum igitur compositum ex quadratis AC CB maius erit composito ex quadratis AD DB. quod demonstrare oportebat.

ALITER

ALITER.

Exponatur quædam recta linea AB, diuisa in partes quidem æquales ad punctum D, in partes vero inæquales ad C. Dico quadrata ex AC CB maiora esse quadratis ex AB DB.

Quoniam enim quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC, quod demonstratum est in nono theoremate secundi libri elementorum; & sunt quadrata quidem ex AD DB dupla quadrati ex AD, propterea quòd AB in D bifariam secatur; quod autem bis fit ex DC duplum est quadrati ex DC: erunt quadrata ex AC CB æqualia quadratis ex AD DB vnà cum eo, quod bis fit ex DC. quadrata igitur ex AC CB maiora sunt quàm quadrata ex AD DB, eo, quod bis fit ex DC. Nõ secetur autem AB bifariam, sed vtcunque in punctis CD, ita vt AD sit maior, quàm CB. similiter demonstrabitur quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB maiora esse. Quoniam enim recta linea AB vtcunque secatur in C, quadratum ex AB est æquale quadratis ex AC CB vnà cum eo, quod bis continetur AC CB. Eadem ratione & quadratũ ex AB est æquale quadratis ex AD DB vnà cũ eo, quod bis AD DB continetur. quorũ quod bis continetur AD DB maius est eo quod bis AC CB continetur. est enim rectangulo ADB rectangulo ACB maius. ergo quæ relinquuntur quadrata ex AD DB quadratis ex AC CB minora sunt. quod demonstrare oportebat.



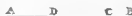


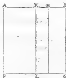
4 secundi.

Ex proxime demõstratis.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam dictis perspicue apparet excessum, quo compositum ex quadratis rectarum linearum AC CB superat compositum ex quadratis ipsarum AD DB, æquale, vel potius eundem esse excessui, quo rectangulum bis contentum AD DB superat rectangulum, quod bis AC CB continetur.





4 secundi.

Fiat enim ex AB quadratum AFGB; & ad ipsam AF applicetur parallelogrammum FH æquale composito ex quadratis AC CB. erit reliquum parallelogrammum HG aequale rectangulo bis contento AC CB. Rursus ad eandem AF applicetur parallelogrammum FK aequale composito ex quadratis AD DB. reliquum igitur parallelogrammum KG est aequale ei, quod bis AD DB continetur. Itaque quoniam parallelogrammum quidem FH est aequale composito ex quadratis AC CB; parallelogrammum vero FK est aequale composito ex quadratis AD DB: erit parallelogrammum LH excessus, quo alterum alterum superat. Sed idem LH est excessus, quo rectangulum bis contentum AD DB superat id, quod bis AC CB continetur. constat igitur verum esse, quod nos demonstrandum propofuimus.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XLIII.

Quæ ex binis nominibus ad unum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis nominibus AB diuisa in nomina ad punctum C. ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles. Dico AB ad aliud punctũ non diuidi in duas rationales potentia solum commensurabiles. si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt AD DB rationales sint potẽtia solũ cõmẽsurabiles. Itaq; manifestũ est A C non esse eandem, quæ DB. si enim fieri potest, sit eadem. erit igitur & AD ea-

 dem

dem, quæ CB : atque erit vt AC ad CB, ita BD ad DA : & AB in D similiter diuisa erit, atque in



D punćto C. quod non ponitur. ergo AC non est ea-
E dē, quę DB. simili ratione & puncta CD non ęquali
F ter distant à bipartita sectione. quo igitur differunt quadrata rectarum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis, hoc differt & quod bis AD DB continetur ab eo, quod bis continetur AC CB: quoniam & quadrata rectarum linearū AC CB vnà cum eo, quod bis continetur AC CB; & quadrata ipsarum AD DB vnà cū
G eo, quod bis AD DB continetur, æqualia sunt quadrato ipsius AB. sed quadrata AC CB à quadratis AD DB differunt rationali; etenim rationalia vtraque sunt. ergo & quod bis AD DB continetur à contento bis AC CB rationali differt, cum ip-
H sa media sint. atqui medium non superat medium rationali. nō igitur quæ ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuiditur. quare ad vnum dumtaxat diuiditur in nomina. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles] *Ex 37 huius.*

B Itaque manifestum est AC non esse eandem, quæ DB] *Hoc est AC non esse aequalem ipsi DB; sumitur enim hoc loco idem pro aequali.*

C Erit igitur & AD eadem, quæ CB] *Si enim AC sit aequalis ipsi DB, dempta BC vtrique communi, erit reliqua AD reliquae CB ęqualis.*

D Quod non ponitur] *Ponitur enim recta linea AB in puncto D aliter diuisa, atque in ipso C.*

E Simili ratione & puncta CD non æqualiter distant a bipartita sectione] *Nā si AD CB inter se ęquales non sint, neque puncta CD aequaliter distabunt ab eo puncto, quod rectam lineam AD bifariam diuidit.*

F Quo igitur differunt quadrata rectarum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis, hoc differt & quod bis AD DB continetur ab eo, quod bis cōtinetur AC CB] *Quomodo hoc sequatur in antecedenti scholio dictum est.*

G Sed quadrata AC CB à quadratis AD DB differunt rationali, etenim rationalia vtraque sunt] *Nam rationale non superat rationale, nisi rationali. quod nos demonstrauimus ad 27 huius.*

H Atqui medium non superat medium rationali] *Ex 27 huius.*

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO. XLIIII.

Quę ex binis medijs prima ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis medijs prima AB diuisa in puncto C, ita vt AC CB medię sint potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineāt. Dico AB in alio puncto non diuidi. si enim fieri potest, di-



uidatur etiam in D, ita vt AD DB sint medię potentia solum cōmensurabiles, quæ rationale contineant. Quoniam igitur quo differt rectangulum contentum bis AD DB ab eo, quod bis AB CB continetur, hoc differunt etiam quadrata rectarum linearum AC CB ab ipsarum AD DB quadratis; rationali autem differt contentum AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur, utraque enim sunt rationalia: sequitur vt etiam quadrata ipsarum AC CB rationali differant à quadratis AD DB; quæ vtraque media sunt. illud autem fieri non potest. non igitur quæ ex binis medijs prima in alio, atque alio puncto diuiditur in nomina. quare in vno dumtaxat diuidatur necesse est.

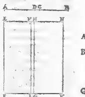
Ex demonstratis ad 21 huius.

27. huius.

THEO-

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO. XLV.

Quæ ex binis medijs secunda ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.



Sit ex binis medijs secũdæ AB diuisa in C, ita vt AC CB mediæ sint potentia solum commensurabiles, quę medium contineant. manifestum est punctum C non esse in bipartita sectione, quoniam nõ sunt longitudine commensurabiles. Dico ipsam A B in alio puncto non diuidi. si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt
AC non sit eadem, quæ DB. sed maior A C positione. A
Itaque constat quadrata ex AC CB quadratis ex AD
DB maiora esse, vt supra ostendimus; & AD DB me- B
dias esse potentia solum commensurabiles, quæ medium contineant. Exponatur rationalis EF: & quadrato quidem ex AB æquale parallelogrammum EK ad ipsam EF applicetur; quadratis vero ex AC CB æqua-
le auferatur EG. reliquum igitur HK æquale est ei, C
quod bis AC CB continetur. rursus quadratis ex AD DB, quæ minora sunt quadratis ex AC CB, ut ostensum est, æquale parallelogrammum auferatur EL. er-
go reliquum MK est æquale ei, quod bis cõtinetur AD DB. et quoniam media sunt D
quæ ex AC CB quadrata, erit EG medium, & ad rationalem EF applicatum est. qua- E
re EH rationalis est, & ipsi EF longitudine incommensurabilis. Eadem ratione & HN est rationalis, & ipsi EF incommensurabilis lõgitudine. Quòd cum AC CB mediæ sint potentia solum commensurabiles, erit AC ipsi CB incommensurabilis longitudine. ut autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad id, quod AC CB continetur. quadratum igitur ex A C incommensurabile est ei, quod continetur AC CB. sed quadrato quidem ex AC commensurabilia sunt quadrata ex A C C B, etenim AC CB potentia sunt commensurabiles; ei uero, quod continetur AC CB, commẽsurabile est illud, quod bis AC CB continetur. ergo et quadrata ex AC CB incommensurabilia sunt ei, quod bis AC CB continetur: quadratis autẽ ex AC CB æqua-
le est parallelogrammum EG, & ei, quod bis continetur AC CB est æquale HK. er- F
go EG ipsi HK est incommensurabile; & ob id recta linea EH ipsi HN incommensurabilis longitudine, suntq; rationales. ergo EH HN rationales sunt potentia solum commensurabiles. si autem duæ rationales potentia solum commensurabiles com-
ponantur, tota irrationalis est, quę ex binis nominibus appellatur. quare EN ex bi- G
nis nominibus est diuisa in puncto H. eadem ratione & EM MN ostendentur ratio-
nales potentia solum cõmensurabiles, & erit EN ex binis nominibus ad aliud, atque H
aliud punctum diuisa, uidelicet ad H, & ad M. & non est EH eadem, quæ MN. quo- K
niam quadrata ex AC CB quadratis ex AD DB sunt maiora; quadrata autẽ ex AD DB maiora sunt eo, quod bis AD DB continetur. ergo quadrata ex AC CB, hoc est parallelogrammum EG multo maius est eo, quod bis continetur AD DB, hoc est parallelogrammo MK. quare & EH, quàm MN est maior. non igitur EH eadem est, quę MN. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed maior AC positione] *Hoc est ponatur nunc AC maior, quam DB.* A
Vt supra ostendimus] *In lemmate, quod positum est ante 43. huius.* B
Reliquum igitur HK æquale est ei, quod bis AC CB cõtinetur.] *Ex 4. secundi libri.* C
Et quoniam media sunt, quæ ex AC CB quadrata, erit EG medium.] *Rectæ enim li-* D
neæ

neae AC CB ponuntur mediae potentia solum commensurabiles. quare & media erunt ipsarum quadrata, atque inter se commensurabilia: & si componantur, vnum fiet medium, quemadmodum ex duabus rationalibus, si longitudine commensurabiles sint, vna fit rationalis.

At vero spacium ex medijs compositum irrationale esse, sic demonstrabimus.]

Componantur duo media spacia AB BC. Dico totum AD esse irrationale. sit enim rationale, si fieri potest; exponaturque rationalis quaedam recta linea EF; & ad ipsam applicetur parallelogrammum EG ipsi AD aequale, latitudinem faciens EH: a parallelogrammo autem EG auferatur EK aequale ipsi AB, quod latitudinem faciat EL. reliquum igitur LG reliquo BC est aequale. & quoniam medium est vtrumque ipsorum AB BC; atque est EK quidem ipsi AB aequale, LG vero ipsi BC. erit & vtrumque ipsorum EK LG medium; & ad rationalem EF applicata sunt. rationalis igitur est vtraque ipsarum EL LH, & ipsi EF incommensurabilis longitudine. Rursus quoniam AD rationale ponitur, estque ipsi EG aequale, & applicatur ad rationalem EF; recta linea EH rationalis erit, & ipsi EF longitudine commensurabilis. est autem EL eidem EF incommensurabilis longitudine. ergo EH ipsi EL longitudine incommensurabilis erit. sed vt EH ad EL, ita & quadratum ex EH ad rectangulum, quod HE EL continetur. quadratum autem ex EH commensurabile est quadratis ex HE EL; vtrumque enim ipsorum est rationale. & rectangulum contentum HE EL est commensurabile ei, quod bis HE EL continetur. ergo ex his, quae ad 14. huius demonstrauimus, quadrata ex HE EL incommensurabilia sunt ei, quod bis continetur HE EL. sed quadratis ex HE EL aequale est id, quod bis HE EL continetur vna cum quadrato ipsius LH, ex 7 secundi libri. si autem magnitudo ex duabus magnitudinibus composita vni componentium sit incommensurabilis, & reliquae incommensurabilis erit. quod a nobis demonstratum est ad 17. huius. quadrata igitur ex HE EL incommensurabilia sunt quadrato ex LH. rationalia autem sunt quadrata ex HE EL. ergo quadratum ex LH irrationale est: & ob id recta linea LH est irrationalis; sed & rationalis, vt demonstratum fuit; quod fieri non potest. non igitur spacium AD est rationale. quare irrationale sit necesse est. quod demonstrare oportebat.

23. huius
21. huius.
13. huius.

E Quare EH rationalis est, & ipsi EF longitudine incommensurabilis.] *Ex 23 huius.*

F Ergo EG ipsi HK est incommensurabile] *Ex demonstratis ad 14 huius.*

G Tota irrationalis est, quae ex binis nominibus appellatur] *Ex 37. huius.*

H Et erit EA ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuisa, videlicet ad H, & ad M] *Quod fieri non posse in 43 huius demonstratum est. non igitur quae ex binis medijs secunda ad aliud, atque aliud punctum diuiditur in nomina. ergo ad vnum dumtaxat diuidi necessarium est.*

K Et non est EH eadem, quae MN] *Ostendit EH ipsi MN non esse aequalem.*

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XLVI.

Maior ad idem dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit maior AB, diuisa in C, ita vt AC CB potentia incommensurabiles sint, facientes compositum quidem ex ipsarum AC CB quadratis rationale; rectangulum vero, quod ipsis continetur, mediu. Dico AB in alio puncto non diuidi. si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt AD DB potentia incōmensurabiles sint, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem ipsis continetur, medium. & quoniam quo differunt quadrata ex AC CB à quadratis ex AD DB, hoc differt & id, quod bis continetur AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur.

sed quadrata ex AC CB superant quadrata ex AD DB rationali; etenim utraque rationalia sunt. ergo quod bis cõtinetur AD BD rationali superat id, quod bis AC CB cõtinetur, cũ media sint. quod est absurdũ. nõ igitur maior ad aliud, atq; aliud punctum diuiditur. ergo ad idem dumtaxat diuidatur necesse est. Ex demonstratis ad 27 huius. Ex 27. huius.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XLVII.

Rationale, ac medium potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

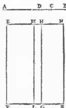
Sit rationale, ac medium potens AB, diuisa in C; ita vt AC CB potentia incõmensurabiles sint; faciantq; compositũ quidem ex ipsarum AC CB quadratis medium; quod autem ipsis continetur, rationale. Dico AB in alio puncto non diuidi. si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt etiam AD DB potentia incommensurabiles sint, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium: quod autem ipsis continetur, rationale. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis contentum AD DB ab eo, quod bis AC CB continetur, hoc differunt & quadrata ex AC CB à quadratis ex AD DB. rectangulum autem bis contentum AD DB rationali superat id, quod bis AC CB continetur. ergo & quadrata ex AC CB superant quadrata ex AD DB rationali, cum media sint. quod est absurdum. non igitur rationale, ac mediũ potens diuiditur ad aliud, atque aliud punctum. quare ad vnum dumtaxat punctum diuidetur.



THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XLVIII.

Bina media potens ad vnum dumtaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit bina media potens AB, diuisa in C, ita vt AC CB potentia incommensurabiles sint, facientes etiam compositum ex ipsarum AC CB quadratis medium; & quod ipsis continetur, medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum AC CB. Dico AB ad aliud punctum non diuidi, ita vt faciat quæ proposita sunt. Si enim fieri potest, diuidatur in D, ita vt rursus AC non sit eadem, quæ DB, sed sit AC positione maior; exponaturq; rationalis EF, & ad ipsam quadratis quidẽ ex AC CB æquale parallelogrammum EG applicetur; rectangulo autem bis contento AC CB æquale applicetur HK. totum igitur EK est æquale ei, quod fit ex AB, quadrato. Rursus ad EF applicetur parallelogrammũ EL, æquale quadratis ex AD DB. ergo reliquum, quod bis AD DB continetur, reliquo MK est æquale. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum AC CB medium ponitur, erit & parallelogrammum EG medium: & ad rationalem EF applicatum est. rationalis igitur est HE, & ipsi EF longitudine incommensurabilis. Eadem ratione & HN est rationalis, ipsiq; EF incommensurabilis longitudine. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur, erit & parallelogrammũ EG ipsi HK incommensurabile. ergo & recta linea EH est incommensurabilis rectæ HN. & sunt rationales. quare EH HN rationales sunt potentia solum commensurabiles 4 secundi. 23. huius.



biles.& ob id EN ex binis nominibus est diuisa in puncto H. similiter ostendemus ipsam EN in puncto quoque M diuidi: & non est H eadem, quæ MN. ergo quæ ex binis nominibus ad aliud, atque aliud punctum diuiditur; quod est absurdum. non igitur bina media potens diuiditur ad aliud, atque aliud punctum. quare ad vnum dumtaxat punctum diuidetur.

Ex 43 huius.

DIFFINITIONES SECVNDAE.

1 Exposita rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomen plus posit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, siquidem maius nomen expositæ rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur ex binis nominibus prima.

2 Si vero minus nomen expositæ rationali longitudine sit commensurabile, dicatur ex binis nominibus secunda.

3 Quòd si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4 Rursus si maius nomen plus posit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi lõgitudine incommensurabilis, siquidem maius nomen expositæ rationali sit commensurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus quarta.

5 Si vero minus, dicatur quinta.

6 Quòd si neutrum, dicatur sexta.

SCHOLIVM.

Cum igitur sex rectæ lineę ita sumantur, primas ordine facit tres, in quibus maior plus potest, quàm minor, quadrato rectę lineæ sibi longitudine commensurabilis; secundas uero tres reliquas, in quibus maior plus potest, quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; propterea quòd commensurabile antecedit incommensurabile: & adhuc primam quidem, in qua maius nomen commensurabile est expositæ rationali; secundam, in qua minus nomen, quoniam rursus maius antecedit minus, cum ipsum contineat; tertiam vero, in qua neutrum expositæ rationali est commensurabile; & in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans, secundam quintam, & tertiam sextam.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO. XLIX.

Inuenire ex binis nominibus primam.

A Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis, videlicet AB ad ipsum quidem BC proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum;



numerum;ad ipsum vero CA proportionem
non habeat, quã quadratus numerus ad qua
dratum n merum. & exponatur quędam ra-
tionalis D;& ipsi D longitudine commensu-
rabilis sit EF . ergo EF est rationalis. fiat autẽ
vt BA numerus ad numerum AC , ita ipsius
EF quadratum ad quadratũ FG . Sed BA ad
AC proportionem habet,quam numerus ad
numerum . ergo & quadratum ipsius EF ad
quadratũ FG proportionẽ habebit,quã numerus ad numerũ. cõmensurabile igitur D
est quadratũ ex EF quadrato ex FG;atq; est EF rationalis. ergo & rationalis FG. & E
quia BA ad AC proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadra
tum numerum neque quadratum ex EF ad quadratum ex FG proportionem ha
bebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum . ergo EF ipsi FG in- F
commensurabilis est longitudine. & ob id EF FG rationales sunt potentia solum cõ
mensurabiles. ex binis igitur nominibus est EG. Dico & primam esse. Quoniá enim G
est vt BA numerus ad numerum AC , ita quadratum ex EF ad id quod ex FG qua-
dratum. maior autem est BA, quàm AC. ergo & quadratum ex EF quadrato ex FG
est maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG H. Quoniam igitur est vt B H
A ad AC,ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG , erit per conuersionem ratio-
nis vt AB ad BC,ita quadratum ex EF ad quadratum ex H. sed AB ad BC propor-
tionem habet,quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & quadratum igi
tur ex EF ad quadratum ex H proportionem habebit quam quadratus numerus
ad quadratum numerum. quare EF ipsi H longitudine est commẽsurabilis . ideoq; K
EF plus potest, quàm FG quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine.
sunt autem EF FG rationales,& EF ipsi D longitudine est commensurabilis. ergo L
EG ex binis nominibus est prima.

F. C. COMMENTARIVS.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis videlicet AB ad ip- A
sum quidem BC proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum
numerum; ad ipsum vero CA proportionem non habeat] *Inuenientur aũt hi ex corol-
lario primi lemmatis ante 30 huius.*

Ergo EF est rationalis] *Ex 6 diffinitione.* B

Fiat autem vt BA numerus ad numerum AC, ita ipsius EF quadratum ad qua- C
dratum FG] *Ex corollario 6 huius.*

Commensurabile igitur est quadratum ex EF quadrato ex FG] *Ex sexta huius.* D

Ergo & rationalis FG] *Ex 6 diffinitione.* E

Ergo EF ipsi FG incommensurabilis est longitudine] *Ex 9 huius.* F

Ex binis igitur nominibus est EG] *Ex 37 huius.* G

Sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG H] *Inuenietur quadratum ipsius H ex lẽ* H
mate ante 15 huius.

Quare EF ipsi H longitudine est commensurabilis] *Ex 9 huius.* K

Ergo EG ex binis nominibus est prima] *Ex prima secundarum diffinitionum.* L

*Sit AC numerus 12, CB 4, & EF 6. fiatq; vt 16 ad 12, ita 36 ad aliũ. erit ad 27, ergo 6 plus
27 est ex binis nominibus prima.*

PROBLEMA XIIII. PROPOSITIO L.

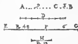
Inuenire ex binis nominibus secundam.

Exponantur duo numeri AC CB , ita vt compositus ex ipsis AB ad ipsum BC
eandem proportionem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerũ:
ad AC vero proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum

 numerum

numerum: & exponatur rationalis D: & sit FG ipsi D longitudine commensurabilis. ergo FG rationalis est. fiatq; vt CA numerus ad numerum AB, ita quadratum ex GF ad quadratum ex FE. commensurabile igitur est quadratum ex GF quadrato ex FE. ergo & EF est rationalis. & quoniã CA numerus ad ipsum AB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex GF ad quadratum ex FE proportionẽ habebit, quàm numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est GF ipsi FE longitudine. quare EF FG rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea ex binis nominibus est EG. Ostendendum est & secundam esse. Quoniam enim conuertendo est vt BA numerus ad numerũ AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG: maior autẽ est BA, quàm AC. ergo & quadratum ex EF quadrato ex FG est maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG, H. est igitur per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex H. sed AB ad BC proportionem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo & quadratum ex EF ad quadratum ex H proportionẽ habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & ob id EF ipsi H longitudine est commensurabilis. quare EF plus potest, quàm FG quadrato rectæ lineæ sibi commensurabiles longitudine. suntq; rationales EF FG potentia solum commensurabiles: & FG minus nomen longitudine commensurabile est ipsi D expositæ rationali. ergo EG ex binis nominibus est secunda.

6. diffi. | Corol. 6. huius | 6 huius. | 6. diffi. | 9 huius. | 9. huius. | 2. diffi. secundarum.



F. C. COMMENTARIVS.

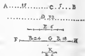
Sit AC 9 CB 3. & FG 6. fiat autem vt 9 ad 12, ita 36 ad aliũ erit ad 48. quare ℞ 48 pl us 6 est ex binis nominibus secunda.

PROBLEMA XV. PROPOSITIO LI.

Inuenire ex binis nominibus tertiam.

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt compositus ex ipsis AB ad BC quidem proportionem habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ad AC vero proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Exponatur etiam alius numerus D non quadratus, qui ad vtrumque ipsorum BA AC proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. denique exponatur rationalis quędam recta linea E; fiatq; vt D ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG. quadratum igitur ex E quadrato ex FG est commensurabile. rationalis autem est E. ergo & FG est rationalis & quoniam D ad AB proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex E ad quadratum ex FG proportionem habebit, quã quadratus numerus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est E ipsi FG longitudine. Rursus fiat vt BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH. ergo quadratum ex FG quadrato ex GH est commensurabile. rationalis autem est FG. quare, & GH est rationalis. & quoniam BA ad AC proportionem non habet, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex FG ad quadratum

Corol. 6 huius | 6 huius. | Diffi. 6. | 9 huius. | 6. huius.



tum ex GH proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine. quare FG GH rationales sunt potentia solum commensurabiles. ideoq; FH ex binis nominibus est. 9. huius.
Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt D numerus ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG, vt autem BA ad AC, ita quod fit ex FG quadratum ad quadratum ex GH erit ex æquali vt D ad AC, ita quadratum ex E ad quadratum ex GH. sed D ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo E ipsi GH incommensurabilis est longitudine. Et quoniam vt BA ad 9. huius.
AC, ita quadratum ex FG ad id, quod ex GH quadratum; erit quadratum ex FG maius quadrato ex GH. sint quadrato ex FG æqualia quadrata ex GH, K. per conuersionem igitur rationis est vt AB ad BC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K. sed AB ad BC proportionem habet, quam numerus quadratus ad quadratũ numerum. ergo & quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est F 9. huius.
G ipsi K longitudine: & ob id FG plus potest, quam GH, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. suntq; FG GH, rationales potentia solum commensurabiles & neutra ipsarum commensurabilis est ipsi E longitudine. ergo FH ex bi 3 diffi. secundarum.
nis nominibus est tertia.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit numerus AC 15, CB 5; & D 30, rationalis autẽ E sit 6, fiatq; vt 30 ad 20, ita 36 ad aliũ. erit ad 24. rursus fiat vt 20 ad 15, ita 24 ad alium, hoc est ad 18. ergo ℞ 24 plus ℞ 18 est ex binis nominibus tertia.

PROBLEMA XVI. PROPOSITIO. LII.

Inuenire ex binis nominibus quartam.

A . . . . 10 . . . . C . . . 6 . . B

D

E 4 F ℞ 10 G

H ℞ 6

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt AB ad vtrumque ipsorum proportionem non habeat, quã numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturq; rationalis D: & ipsi D commensurabilis sit EF longitudine. ergo EF est rationalis. fiat diffi. 6.
autem vt BA numerus ad numerum AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG. commensurabile igitur est quadratum ex EF quadrato ex FG: 6 huius.
ideoq; recta linea FG est rationalis. Et quoniam BA ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, erit EF ipsi FG longitudine incommensurabilis. ergo EF FG rationales sunt potentia solum commensurabiles. & ob id EG ex binis nominibus est. Dico eam & quartam esse. Quoniam enim 9 huius. 37 huius.
est vt BA ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG, maior autem est BA, quam AC: erit quadratum ex EF quadrato ex FC maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG, H. per conuersionem igitur rationis est vt AB numerus ad numerum BC, ita quadratum ex EF ad id, quod fit ex H quadratum. sed AB ad BC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo EF ipsi H longitudine est incommẽsurabilis; ac propterea EF plus potest, quàm FG quadrato rectę lineæ sibi incommensurabilis longitudine. suntq; EF FG rationales potentia solum commensurabiles, & EF ipsi D commensurabilis est longitudine. ergo EG ex binis nominibus est quarta. 9 huius. 4 diffi. secundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC numerus 10, CB 6. rationalis autem D sit 6, & EF 4; fiatq; ut 16 ad 10, ita 16 ad alium, nempe ad 10. erit 4 plus ℞ 10 ex binis nominibus quarta.

PROBLEMA XVII. PROPOSITIO. LIII.

Inuenire ex binis nominibus quintam.

A........16......C..4..B

D

E B5 F 2 G

F
B5

Exponantur duo numeri A C C B, ita vt AB ad vtrumque ipsorum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. exponaturq; recta linea quædam rationalis D; & ipsi D longitudine commensurabilis sit FG. ergo FG est rationalis: & fiat vt C A ad AB, ita quadratum ex GF ad id, quod fit ex FE quadratum. rationalis igitur est FE. Et quoniam CA numerus ad AB proportionem nõ habet, quam numerus quadratus ad quadratũ numerum; neque quadratum ex G F ad quadratum ex FE proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo EF FG rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id EG ex binis nominibus est. itaque dico & quintam esse. Quoniam enim est vt CA ad AB, ita quadratũ ex GF ad quadratum ex FE; erit conuertendo vt BA ad AC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex FG. ergo quadratum ex EF quadrato ex FG est maius. sint quadrato ex EF æqualia quadrata ex FG, H. per cõuersionem igitur rationis est vt AB numerus ad numerum BC, ita quadratum ex EF ad id, quod ex H quadratum. sed AB ad BC proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. ergo neque quadratum ex EF ad quadratum ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ac propterea E F ipsi H longitudine est incommẽsurabilis. quare EF plus potest, quàm FG, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. suntq; EF FG rationales potentia solum commensurabiles: & FG minus nomen exposite rationali D commensurabilis est longitudine. ergo EG ex binis nominibus est quinta.

Margin notes: 6 diffi. — 37 huius. — 5 diffi. secundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 16, CB 4, & FG 2; fiatq; vt 16 ad 20, ita 4 ad alium, videlicet ad 5. erit R 5 plus 2 ex binis nominibus quinta.

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIO LIIII.

Inuenire ex binis nominibus sextam.

A...10.....C..6..B

D.......................20

E

F B20 G B 4 H

E
B 7 2

Exponantur duo numeri AC CB, ita vt AB ad vtrumque ipsorum proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. sit etiam alius numerus D non quadratus, qui ad vtrumque ipsorum BA AC proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: & exponatur rationalis quædã recta linea E: fiatq; vt D ad AB, ita quadratum ex E ad quadratum ex FG. commẽsurabile igitur est E ipsi F G potentia, atque est E rationalis. quare & rationalis est FG. Et quoniam D ad AB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neque quadratum ex E ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo E ipsi F G longitudine est incommensurabilis. itaque rursus fiat vt BA ad AC, sic quadratum ex FG ad quadratum ex GH. quadratum igitur ex FG quadrato ex GH est commensurabile. rationale autem est quadratum ex FG. ergo & quadratum ex GH est rationale: ob idq; recta linea GH est rationalis. Et quoniam BA ad AC proportionẽ nõ habet,

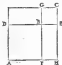
Margin notes: 9 huius. — 9 diffi.

bet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine: & ideo 9 huius.
FG GH rationales sunt potentia solum commensurabiles. quare ex binis nominibus est FH. 37. huius. ostēdendum est & sextā esse. Quoniam enim vt D ad AB, ita est quadratũ ex E ad quadratũ ex FG; est aũt & vt BA ad AC, ita quadratũ ex FG ad quadratũ ex GH. erit ex æquali vt D ad AC, ita quadratũ ex E ad quadratũ ex GH. sed D ad AC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo neque quadratum ex E ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est 9. huius.
E ipsi GH longitudine. ostensum autem est & ipsi FG incommēsurabilem esse. quare vtraque ipsarum FG GH ipsi E longitudine est incommensurabilis. & quoniam est vt BA ad AC, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit quadratũ ex FG quadrato ex GH maius. sint quadrato ex FG ęqualia quadrata ex GH, K. ergo per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita est quadratum ex FG ad quadratum ex K. Sed AB ad BC proportionem non habet, quā numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea FG ipsi K longitudine est incommensurabilis. ergo FG plus potest, quàm GH quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: suntq; FG GH rationales potentia solum commensurabiles: & neutra ipsarum longitudine commensurabilis est expositę rationali E. quare FH ex binis nominibus est sexta. 6. diffi secundarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 10, CB 6 & D 20. rationalis autem E sit 5, & fiat vt 20 ad 16, ita 25 ad alium, nempe ad 20. rursus fiat vt 16 ad 10, ita 20 ad aliũ, erit ad 12 $\frac{1}{2}$. ergo ℞ 20 plus ℞ 12 $\frac{1}{2}$ est ex binis nominibus sexta.

LEMMA



Sint duo quadrata AB BC: & ponantur ita, vt DB sit in directum ipsi BE. ergo & FB ipsi BG in directum erit; & compleatur AC parallelogrammum. Dico AC quadratum esse: & quadratorum AB BC rectangulum DG medium esse proportionale; itemq; ipsorum AC CB medium proportionale esse DC.

Quoniam enim DB quidem est æqualis BF, EB vero ipsi BG; erit tota DE toti FG æqualis. sed DE æqualis est vtrique ipsarum AK HC. ergo & vtraque AH 34. primi.
KC vtrique AK HC est ęqualis. ęquilaterũ igitur, est AC parallelogrãmum. est autem & rectangulum. ergo quadratum est AC. Et quoniam est vt FB ad BG, ita DB ad BE: vt autem FB ad BG, ita AB ad DG: & vt DB ad BE, ita DG ad BC. vt igitur AB ad DG, ita est DG ad BC: ideoq; ipsorum AB BC medium proportionale est DG. Dico præterea ipsorum AC CB medium proportionale esse DC. nam cũ sit vt AD ad DK, ita KG ad GC: est enim vtraque vtrique æqualis: & componendo erit vt AK ad KD, ita KC ad CG. sed vt AK ad KD, ita AC ad CD; & vt KG ad CG, 1. sexti.
ita DC ad CB. & vt igitur AC ad CD, ita est DC ad CB. ac propterea ipsorum AC CB medium proportionale est CD. quod ostendendum proponebatur.

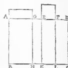
THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO LV.

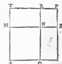
Si spacium cõtineatur rationali, & ex binis nominibus prima,

recta

recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

Spaciũ enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineam, quę poteſt ſpacium A C irrationalem eſſe, quę ex binis nominibus appellatur. Quoniã enim AD eſt ex binis nominibus prima, diuidatur in nomina ad punctum E: & ſit AE maius nomen. ma-
1 Secundarũ diffin. nifeſtum eſt AE ED rationales eſſe potentia ſolũ commenſurabiles, & AE plus poſſe, quàm ED quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: & præterea AE expoſitæ rationali A B longitudine commenſurabilem eſſe. Secetur ED bifariam in F. Quoniam igitur A E plus poteſt, quàm E D quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, ſi quartę parti quadrati, quod fit à minori, hoc eſt quadrato ex EF æquale parallelogrammũ ad maiorem AE applicetur, deficiens figura qua-
A drata, in partes commenſurabiles ipſam diuidet.
B itaque applicetur, & ſit A G E. ergo A G ipſi G E longitudine eſt commenſurabilis. Deinde per pũcta G E F alterutri ipſarum A B DC parallelæ du-
14. ſecundi. cantur GH EK FL: & parallelogrammo quidem AH æquale quadratum conſtituatur SN; parallelogrammo autem GK æquale quadratum NP: & ponatur ita, vt MN ſit in directum ipſi N X. ergo RN ipſi N O in directum erit: & parallelogrammum
Ex antecedẽti lemmate. SP compleatur. quadratum igitur eſt SP. & quoniam rectangulum ACE eſt æquale quadrato ex EF, erit vt A G ad E F, ita FE ad E G. quare & vt A H ad E L, ita eſt
C EL ad KG. ac propterea parallelogrammorum A H K G mediũ proportionale eſt
1. ſexti. EL. Sed parallelogrammo AH ęquale eſt quadratum SN, & parallelogrammo GK æquale quadratum NP, ergo quadratorum SN NP medium proportionale eſt EL. ſed & eorumdem SN NP medium proportionale eſt & MR: æquale igitur eſt MR
43 Primi. ipſi EL. ſed MR eſt æquale OX, & EL ipſi FC. ergo totũ E C ipſis MR OX eſt æquale. ſunt autem & AH GK ęqualia ipſis SN NP. totũ igitur A C eſt æquale toti SP, hoc eſt quadrato ex MX; ideoq; ipſa MX poteſt parallelogrammum AC. Dico MX
D ex binis nominibus eſſe, quoniam enim AG commenſurabilis eſt ipſi GE, erit AE utrique ipſarum AG GE commenſurabilis; ponitur autem & A E commenſurabi-
E lis ipſi AB longitudine. ergo & AG GE ipſi AB commenſurabiles; ſunt; atque eſt
F AB rationalis. rationalis igitur & vtraque ipſarũ AG GE: & ob id rationale vtrũq;
G ipſorum AH GK: & A H ipſi G K eſt commenſurabile. ſed A H eſt ęquale ipſi SN; & GH ipſi NP. ergo & quadrata SN NP, videlicet quæ fiunt ex MN NX rationalia
H ſunt, & commenſurabilia. Et quoniam incommenſurabilis eſt AE ipſi E D longitudine, & AE quidem eſt commenſurabilis ipſi AG; DE vero ipſi EF: erit & A G ipſi
K L EF longitudine incommenſurabilis. ergo & AH eſt incommenſurabile ipſi EL. ſed AH eſt æquale SN, & EL ipſi MR. quare S N eſt incommenſurabile ipſi M R. vt au-
M tem SN ad MR, ita ON ad NR. incommenſurabilis igitur eſt ON ipſi NR: eſt autẽ
N ON ęqualis MN, & NR ipſi NX. ergo MN ipſi NX eſt incommẽſurabilis. atque eſt quadratum ex MN commenſurabile quadrato ex NX. & vtrumque rationale. quare
37. huius. MN NX rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. ideoq; MX ex binis nominibus eſt, & poteſt parallelogrammum AC. quod demonſtrare oportebat.





F. C. COMMENTARIVS.

A In partes commenſurabiles ipſam diuidet] *Ex 2 parte 18 huius.*

Itaque

Itaque applicetur, & ſit AGE] *Ex 3 lemmate ante 18 huius.* B

Erit vt AG ad EF, ita FE ad EG] *Ex 14 ſexti.* C

Erit AE vtrique ipſarum AG GE commenſurabilis] *Ex 16 huius.* D

Ergo & AG GE ipſi AB commenſurabiles ſunt] *Ex 12 huius.* E

Et ob id rationale vtrumque ipſorum AH GK] *Ex 20 huius.* F

Et AH ipſi GK eſt commenſurabile] *Eſt enim ex 1 ſexti vt AG ad GE, ita AH parallelogrammum ad parallelogrammum GK. ergo ex 10 huius parallelogrammum AH ipſi GK eſt commenſurabile.* G

Et quoniam incommenſurabilis eſt AE ipſi ED longitudine] *Ponitur enim AD eſſe ex binis nominibus prima, quae conſtat ex duabus rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus.* H

Erit & AG ipſi EF longitudine incommenſurabilis] *Ex iis, quae ad 14 huius demonſtrauimus.* K

Ergo & AH eſt incommenſurabile ipſi EL] *Nam vt AG ad EF, ita & AH parallelogrammum ad ipſum EL. quare ex 10 huius propoſitum concludetur.* L

Incommenſurabilis igitur eſt ON ipſi NR] *Ex 10 huius, vt dictum iam eſt.* M

Atque eſt quadratum ex MN commenſurabile quadrato ex NX, & vtrumque rationale.] *Hoc enim ſupra demonſtratum eſt.* N

Sit AB 5, & AD 4 plus ℞ 12. erit EF, vel FD ℞ 3. & ſi ad rectam lineam AE applicetur parallelogrammum aequale quadrato ipſius EF, deficiens figura quadrata, erit ex demonſtratis ad 18 huius AG 3, GE 1. quare parallelogrammũ AH eſt 15, GK 5, & EL vel FC ℞ 75: ideoq; totum AC parallelogrammum erit 20 plus ℞ 300. Huiuſmodi vero ſpacia minores etiam binomialia, ſeu ex binis nominibus appellant, quorum latera quadrata, vel radices ex iis, quae tradita ſunt, facile inuenire licebit in hunc modum.

Binomialis ſpacij latus quadratum, vel radicem inuenire.

Sit binomiale ſpacium 20 plus ℞ 300, cuius oporteat latus quadratum inuenire. diuidatur maius nomen, videlicet 20 in duas partes, ita vt quod ex ipſis producitur ſit aequale quartae parti quadrati minoris nominis, hoc eſt aequale 75. erit ex iis, quae nos tradidimus ad 18 huius, maior pars 15, & minor 5. dico ℞ 15 plus ℞ 5 eſſe latus quadratum eius ſpacij 20 plus ℞ 300. Quoniam enim recta linea, quae ex binis nominibus cõſtat, videlicet ℞ 15 plus ℞ 5, diuiditur in duas partes, erit quadratum totius aequale quadratis partiũ vnà cum rectangulo, quod bis dictis partibus continetur itaque quadratum ℞ 15 eſt 15; & quadratum ℞ 5 eſt 5: rectangulum autem, quod continetur ℞ 15 & ℞ 5 eſt ℞ 75, & eius duplum eſt ℞ 300. quae omnia ſi componantur facient 20 plus ℞ 300, et idem erit quadratũ, quod fit ex recta linea ℞ 15 plus ℞ 5. ergo ℞ 15 plus ℞ 5 eſt latus quadratum, vel radix huius ſpacij binomialis 20 plus ℞ 300. Eodem modo & aliorum ſpaciorum binomialium radices inueniemus. quod facere oportebat.

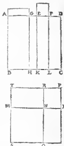
THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO LVI.

Si ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus ſecunda, recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ ex binis medijs prima appellatur.

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus ſecunda AD. Dico rectam lineam, quæ ſpacium AC poteſt, ex binis medijs primam eſſe. Quoniam enim AD eſt ex binis nominibus ſecunda, diuidatur in nomina ad punctum E, ita vt AE ſit maius nomen. ergo AE ED rationales ſunt potẽtia ſolum cõmenſurabiles: & AE plus poteſt quam ED quadrato rectę lineę ſibi longitudine cõmenſurabilis: & minus nomen ED commenſurabile eſt ipſi AB longitudine. ſecetur ED bifariam in F. & quadrato ipſius EF æquale parallelogrammum ad rectam lineam AE applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AGE. commenſurabilis igitur eſt AG ipſi GE lõgitudine. & per puncta G E F ipſis AB DC parallelę ducantur GH EK FL. parallelogrammo autẽ AH ęquale quadratum SN conſtituatur, & parallelogrammo GK ęquale quadratum NP. & ponatur ita, vt MN ſit in directum ipſi

2 diffi ſecũdarum.

18 huius.



ipſi NX. ergo & RN ipſi NO in directum erit; &
In antecedẽti lemmate. compleatur SP quadratum. manifeſtum iam eſt ex
ijs, quæ demõſtrata ſunt, parallelogrammum MR
medium eſſe proportionale quadratorum SN N
Ex demonſtratis in antecedente. P: & parallelogrammo EL ęquale. & prętere a re-
ctã lineam MX poſſe ſpacium AC. oſtendendum
igitur eſt ipſam MX ex binis medijs primam eſ-
37 huius. ſe. Quoniam enim incommenſurabilis eſt AE ipſi
ED longitudine, cõmenſurabilis aũt ED ipſi AB;
14. huius. erit AE ipſi AB longitudine incommenſurabilis.
Et quoniam AG commenſurabilis eſt longitudi-
16 huius. ne ipſi GE, erit AE vtrique ipſarũ AG GE lõgitu-
6 diffi. dine cõmẽſurabilis. atque eſt AE rationalis. ratio-
nalis igitur & vtraque AG GE. Quòd cũ AE ſit
incommenſurabilis quidem ipſi AB lõgitudine,
commenſurabilis autẽ vtrique ipſarum AG GE,
14 huius. erunt AG GE ipſi AB longitudine incommenſu-
rabiles. quare BA, AG, GE rationales ſunt
22. huius. potentia ſolum commenſurabiles. medium igi-
tur eſt vtrumque parallelogrammorum AH G
K. & ob id vtrumque quadratorum SN NP eſt
medium. ergo rectæ lineę MN NX medię ſunt.
rurſus quoniam commenſurabilis eſt AG ipſi GE longitudine, erit parallelogram-
mum AH parallelogrammo GK commenſurabile, hoc eſt quadratum SN ipſi NP,
hoc eſt quadratum ex MN quadrato ex NX. ergo MN NX potentia commenſurabi
les ſunt. & quoniam incommenſurabilis eſt AE ipſi ED longitudine: & AE quidem
Ex demonſtratis ad 14 huius. eſt commenſurabilis ipſi AG, ED vero ipſi EF: erit AG ipſi EF longitudine incom-
menſurabilis. quare & parallelogrammum AH incommenſurabile parallelogram-
mo EL, hoc eſt SN ipſi MR, hoc eſt ON ipſi NR, hoc eſt MN ipſi NX incommenſura
bilis eſt longitudine. oſtenſæ autem ſunt MN NX & mediæ, & potentia commenſu-
rabiles. ergo MN NX medię ſunt, potentia ſolum commenſurabiles. Dico & rationa
le continere. Quoniam enim DE ponitur commẽſurabilis vtrique ipſarum AB EF.
12 huius. erit FE ipſi EK longitudine commenſurabilis. atque eſt rationalis vtraque ipſarum,
20 huius. rationale igitur eſt & parallelogrammum EL, hoc eſt MR. eſtq; MR, quod MN NX
continetur. ſi autem duę mediæ potentia ſolum commenſurabiles componantur,
38 huius. quę rationale contineant; tota irrationalis eſt, quæ ex binis medijs prima appella-
tur. ergo MX ex binis medijs eſt prima, quod demonſtrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

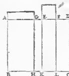
Sit AB 6, AD ℞ 12 plus 3. erit EF vel FD 1 $\frac{1}{2}$: & ſi ad AE applicetur parallelogrammũ aequale quadrato ipſius EF, deficiens figura quadrata; erit AG ℞ 6 $\frac{3}{4}$ GE ℞ $\frac{3}{4}$. parallelogrammum igitur AH eſt ℞ 243, GK ℞ 27, & EL 9: & totum AC parallelogrammum ℞ 432 plus 18. vt autem inueniatur eius radix, diuidemus ℞ 432 in duas partes, ita vt quod ex ipſis producitur ſit aequale quartae parti quadrati 18, hoc eſt aequale 81. erit ex iam dictis maior pars ℞ 108 plus ℞ 27: quae duae radices ſi inter ſe componantur facient ℞ 243. minor autem pars erit ℞ 108 minus ℞ 27. & detracta ℞ 27 à ℞ 108 relinquitur ℞ 27. maior igitur pars eſt ℞ 243, & minor ℞ 27. quare ſpacij binomialis ℞ 432 plus 18 radix erit ℞℞ 243 plus ℞℞ 27.

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO LVII.

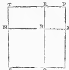
Si ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus tertia, recta linea ſpacium potens irrationalis eſt, quæ appellatur ex binis medijs ſecunda.

Spacium

Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. diuidatur in nomina ad punctum E, quorum maius sit AE. Dico rectam lineam, quę potest spacium AC irrationalem esse, quę ex binis medijs secūda appellatur. construantur enim eadem, quæ supra. & quoniam AD ex binis nominibus tertia est, erunt AE ED rationales potentia solum commensurabiles, & AE plus poterit, quam ED quadrato rectę lineæ sibi commensurabilis longitudine. neutraq; ipsarum AE, ED ipsi AB longitudine erit commensurabilis. similiter ostēdemus MX eam esse, quæ spacium AC potest, & MN NX ex binis esse medijs. itaque ostendendum est & secundam esse. Quoniam enim DE incommensurabilis est longitudine ipsi AB, hoc est ipsi EK; atque est DE commensurabilis EF: erit EF ipsi EK longitudine incommensurabilis. & sunt rationales. ergo FE EK rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id EL, hoc est MR medium est, quod MN NX continetur. quare MX ex binis medijs est secunda.



diffi. 3 secundarum.



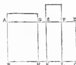
F. C. COMMENTARIUS.

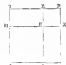
Sit AB 6, AD ℞ 18 plus ℞ 10. erit EF ℞ 2 $\frac{1}{2}$: & si ad AE applicetur parallelogrammū AGE aequale quadrato ipsius EF, deficiens figura quadrata, erit AG ℞ 12 $\frac{1}{2}$ GE $\frac{1}{2}$. quare parallelogrammum AH est ℞ 450, GK ℞ 18, & EL ℞ 90: & totum parallelogrammum AC est 648 plus ℞ 360. Diuidatur ℞ 648 in duas partes, ita vt quod ipsis continetur sit aequale quartae parti quadrati ℞ 360, hoc est 90. erit maior pars ℞ 450, & minor ℞ 18. spacij igitur binomialis ℞ 648 plus ℞ 360 radix est ℞℞ 450 plus ℞℞ 18.

THEOREMA XL. PROPOSITIO LVIII.

Si spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quarta, recta linea spacium potens irrationalis est, quæ vocatur maior.

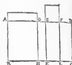
Spacium enim AC contineatur rationali AB & ex binis nominibus quarta AD, diuisa in nomina ad punctum E, quorum AE sit maius. Dico rectam lineam, quæ spacium AC potest, irrationalem esse, quæ maior appellatur. Quoniam enim AD ex binis nominibus est quarta, erunt AE ED rationales potentia solum commensurabiles: & AE plus poterit, quàm ED quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & AE ipsi AB commensurabilis erit longitudine. diuidatur DE bifariam in F: & quadrato ipsius EF æquale parallelogrammum ad AE applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AGE. erit igitur AG ipsi GE longitudine incommen-



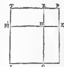


diffi 4. secundarum.

19 huius.



ſurabilis.Ducãtur ipſi AB parallelę GH EK FL.
& eadem fiãt,quę ſupra.conſtat igitur MX poſſe
ſpacium AC. itaque oſtendendum eſt MX irra-
tionalem eſſe,quæ vocatur maior.Quoniã enim
AG ipſi GE incommenſurabilis eſt lõgitudine,
erit & AH parallelogrammum ipſi GK incom-
mẽſurabile,hoc eſt SN ipſi NP. ergo MN NX po
tentia incommenſurabiles ſunt. & quoniam AE
ipſi AB longitudine eſt commenſurabilis, paral
lelogrammum AK rationale eſt. atque eſt æqua
le quadratis ipſarum MN NX. ergo compoſitũ
ex quadratis MN NX eſt rationale.quòd cum D
E ſit incommenſurabilis longitudine ipſi AB,
hoc eſt ipſi EK; ſit autem commenſurabilis ipſi
EF:erit EF ipſi EK incommenſurabilis longitu-
dine.quare KE EF rationales ſunt potentia ſolũ
20. huius. commenſurabiles: & ob id medium eſt paralle-
grammum EL,hoc eſt MR, & MN NX contine-
tur:eſtq; compoſitum ex quadratis ipſarum M
N NX rationale: & MN ipſi NX potentia incom
menſurabilis.ſi autem duæ rectæ lineæ potentia
incommenſurabiles componantur,facientes compoſitum quidem ex ipſarum qua-
40. huius. dratis rationale,quod autem ipſis continetur medium;tota irrationalis erit. voce-
tur autem maior.ergo MX irrationalis eſt,quæ maior appellatur, & poteſt ſpacium
A C. quod demonſtrare oportebat.

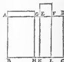


F. C. COMMENTARIVS.

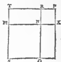
Sit AB 6, AD 6 plus R 24. *erit EF* R 6. *ſi autem ad AE applicetur parallelogrammum AGE aequale quadrato ipſius EF, et deficiẽs figura quadrata; erit AG 3 plus* R 3, *& GE 3 minus* R 3. *ergo AH parallelogrammũ eſt 18 plus* R 108, *GK 18 minus* ℞ 108, *& EL vel FC* ℞ 216, *totumq́; parallelogrammum AC 36 plus* ℞ 864. *itaque ſi diuidamus 36 in duas partes, ita vt productum ex ipſis ſit æquale 216, erit maior pars 18 plus* ℞ 108, *& minor 18 minus* R 108. *quare ſpacij binomialis 36 plus* R 864 *radix eſt* R*V*. 18 *plus* ℞ 108 *plus* ℞ *V*. 18 *minus* R 108.

THEOREMA XLI. PROPOSITIO LIX.

Si ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quinta, quæ ſpacium poteſt recta linea irrationalis eſt, vocaturq́; rationale, & medium potens.



Spacium.n. AC cõtineatur rationali AB,& AD
exbinis nominibus quinta, quę diuidatur in no-
mina ad pũctũ E, ita vt maius nomẽ ſit AE. Dico
rectam lineã,quę põtſpaciũ AC, irrationalẽ eſſe,
quę vocatur rationale,ac mediũ potens. conſtruã
tur enim eadem,quæ ſupra.manifeſtũ eſt MX poſ
ſe ſpacium AC. itaque oſtẽdere oportet MX irra
tionalem eſſe, quæ rationale, ac medium poteſt.
19 huius. Qm̃ enim AG ipſi GE incommenſurabilis eſt lon
gitudine, & parallelogrammum AH eſt incom-



menſurabile parallelogrammo HE, hoc eſt quadratũ ex MN quadrato ex NX. ergo MN NX potentia incõmenſurabiles ſunt. Quòd cũ AD ſit ex binis nominibus quinta, ſitq; minor ipſius portio ED; erit ED ipſi AB cõmẽſurabilis longitudine. ſed AE ipſi ED eſt incommenſurabilis. ergo & AB incommenſurabilis eſt longitudine ipſi AE; ac propterea BA AE rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. medium igitur eſt AK, hoc eſt compoſitum ex quadratis ipſarum MN NX. & quoniam DE commenſurabilis eſt longitudine ipſi AB, hoc eſt ipſi EK; eſtq; DE commenſurabilis ipſi EF. erit & FE ipſi EK commenſurabilis. rationalis autem eſt EK. ergo & FE eſt rationalis, & parallelogrammum EL rationale, hoc eſt MR, hoc eſt quod MN NX continetur. quare MN NX potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium: quod autem ipſis continetur, rationale. ergo MX potens eſt rationale, ac medium, & poteſt ſpacium AC. quod demõſtrare oportebat. Diffi. 5. ſecũdarum. 22. huius. 12 huius. 20 huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB 6, AD ℞ *24 plus 4, erit EF 2. applicetur ad AE parallelogrammum AGE aequale quadrato ipſius EF, deficiẽs figura quadrata; erit AG* ℞ *6 plus* ℞ *2, GE* R *6 minus* ℞ *2; parallelogrammumq; AH* R *216 plus* R *72; GK* R *216 minus* R *72; FL 12: & totum AC parallelogrammum* R *864 plus 24. ſi igitur diuidamus* R *864 in duas partes, vt id, quod ex ipſis producitur, ſit aequale 144, erit maior pars* R *216 plus* R *72, & minor* R *216 minus* R *72. quare ſpacij binomialis* R *864 plus 24 radix eſt* R *V.* R *216 plus* R *72 plus* R *V.* R *216 minus* R *72.*

THEOREMA XLII. PROPOSITIO. LX.

Si ſpacium contineatur rationali, & ex binis nominibus ſexta, quæ ſpacium poteſt recta linea irrationalis eſt: vocaturq; bina media potens.



Spacium enim ABCD contineatur rationali AB, & ex binis nominibus ſexta AD; quæ diuidatur in nomina ad punctum E, ita vt AE ſit maius nomen. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpacium AC, irrationalem eſſe, quæ vocatur bina media potens. conſtruantur enim eadem, quę ſupra, manifeſtũ eſt MX poſſe ſpacium AC: & MN ipſi NX potentia incommenſurabilem eſſe. Et quoniam EA ipſi AB incommenſurabilis eſt longitudine, erunt EA AB rationales potentia ſolum commenſurabiles. medium igitur eſt AK, hoc eſt compoſitum ex quadratis ipſarũ MN NX. Rurſus quoniam incõmenſurabilis eſt ED ipſi AB longitudine, erit & FE ipſi EK longitudine incommenſurabilis. ergo & FE EK rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea medium eſt EL. hoc eſt MR, hoc eſt quod MN NX continetur. Quod cum AE ſit incommenſurabilis ipſi EF, & parallelogrammum AK parallelogrammo EL incõmenſurabile erit. Sed AK quidem eſt cõpoſitũ ex quadratis ipſarũ MN NX. EL vero eſt quod MN, NX continetur. incommenſurabile igitur eſt compoſitum ex quadratis ipſarum MN NX ei, quod MN NX continetur. atque eſt vtrumque ipſorum medium; & MN NX potentia ſunt incommenſurabiles. ergo MX eſt bina media potens, & poteſt ſpacium AC. quod demonſtrare oportebat. 22. huius. A B C D

F. C. COMMENTARIVS.

A Rursus quoniam incõmensurabilis est ED ipsi ab longitudine, erit & FE ipsi EK longitudine incommensurabilis] *Quoniam enim ED ipsi AB incommensurabilis est longitudine; atque est FE commensurabilis ED; erit ex 13 huius etiam FE ipsi AB, hoc est ipsi EK longitudine incommensurabilis.*

B Quòd cum AE sit incommensurabilis ipsi EF] *Ex 13 huius. est enim AE ipsi ED incommensurabilis, & EF commensurabilis ipsi ED.*

C Et MN NX potentia sunt incommensurabiles] *Nam cum AG sit incommensurabilis ipsi GE longitudine, erit AH parallelogrammum parallelogrammo HE, hoc est quadratũ ex MN quadrato ex NX incommensurabile. ergo MN NX potentia incommensurabiles sunt.*

C Ergo MX est bina media potens] *Ex 42 huius.*

D *Sit AB* 5, *AD* R 10 *plus* R 8. *erit EF* R 2. *si igitur ad AE applicetur parallelogrammum AGE, aequale quadrato ipsius EF, quod deficiat figura quadrata, erit AG* R 2 $\frac{1}{2}$ *plus* R $\frac{1}{2}$, *GE* R 2 $\frac{1}{2}$ *minus* R $\frac{1}{2}$ *& parallelogrammum AH* R 62 $\frac{1}{2}$ *plus* R 12 $\frac{1}{2}$, *GK* R 62 $\frac{1}{2}$ *minus* R 12 $\frac{1}{2}$, *et EL* R 50: *totumq́ AC parallelogrammum* R 250 *plus* R 200. *Diuidatur* R 250 *in duas partes, ita vt quod ex ipsis producitur sit aequale* 50; *erit maior pars* R 62 $\frac{1}{2}$ *plus* R 12 $\frac{1}{2}$, *& minor* R 62 $\frac{1}{2}$ *minus* R 12 $\frac{1}{2}$. *Eius igitur spacij binomialis* R 250 *plus* R 200 *radix est V.* R 62 $\frac{1}{2}$ *plus* R 12 $\frac{1}{2}$ *plus* R 62 $\frac{1}{2}$ *minus* R 12 $\frac{1}{2}$.

L E M M A.

Si recta linea in partes inæquales secetur, ipsarum partium quadrata maiora sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur.

A D C B

Sit recta linea A B, & secetur in puncto C, ita vt AC sit maior, quàm CB. Dico quadrata ex AC CB maiora esse rectangulo, quod bis AC CB continetur. secetur enim AB bifariam in D. & quoniam recta linea AB in partes quidem ęquales secatur ad D; in partes vero inęquales ad C; rectangulum, quod AC CB continetur vnà cum quadrato ipsius CD est æquale ei, quod fit ex AD quadrato. (5. secundi.) ergo rectanctulũ ACB quadrato ex AD est minus. quod igitur bis continetur AC CB minus est quàm duplum quadrati ex AD. sed quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC. ergo quadrata ex AC CB maiora sunt eo, quod bis AC CB continetur. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

* Ergo quadrata ex AC CB maiora sunt eo, quod bis AC CB continetur] *Quoniam enim quadrata ex AC CB dupla sunt quadratorum ex AD DC, erunt quadrata ex AC CB maiora, quàm dupla quadrati ex AD. sed quod bis continetur AC CB minus est, quàm duplum quadrati ex AD. quadrata igitur ex AC CB multo maiora sunt eo, quod bis AC CB continetur.*

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO. LXI.

Quadratum eius, quæ est ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus AB, diuisa in nomina ad punctum C, ita vt AC sit maius nomen exponaturq́; rationalis DE; & quadrato rectæ lineæ AB æquale ad ipsam DE applicetur parallelogrammum DEFG, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus primam esse. Applicetur enim ad rationalem DE quadrato quidem ipsius AC æquale parallelogrammum DH: quadrato autem ipsius BC æquale KL.

reliquum

reliquum igitur, quod bis AC CB continetur est ęquale parallelogrammo MF. secetur MG bifariã in N: & alterutri ipsarum ML GF parallela ducatur NX. vtrumque igitur parallelogrammorum MX NF est æquale ei, quod semel AC CB continetur. Et quoniam ex binis nominibus est AB, diuisa in nomina ad punctum C, erunt AC CB rationales potentia solum commensurabiles. ergo quadrata ex AC CB rationalia sunt, & commensurabilia inter se se: & ob id compositum ex quadratis ipsarum AC CB commensurabile est earumdem AC CB quadratis. rationale igitur est compositũ ex quadratis AC CB, atque est æquale parallelogrammo DL. ergo & DL est rationale, & ad rationalem DE applicatum est. rationalis igitur est DM, & ipsi DE commensurabilis longitudine. Rursus quoniam AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles, medium est, quod bis AC CB continetur, hoc est MF, & ad rationalem ML applicatum est. rationalis igitur est MG, & ipsi ML hoc est ipsi ED longitudine incommensurabilis. est autem & MD rationalis, & ipsi DE commensurabilis longitudine. ergo DM ipsi MG longitudine est incommensurabilis. suntq; rationales. ergo DM MG rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea DG est ex binis nominibus. ostendendum est & primam esse. Quoniam enim quadratorum ex AC CB medium proportionale est, quod AC CB continetur; erit etiam parallelogrammorum DH KL medium proportionale MX. est igitur vt DH ad MX, ita MX ad KL, hoc est vt recta linea DK ad MN, ita MN ad MK. ergo rectangulum DKM quadrato ex MN est æquale. Et quoniam quadratum ex AC commẽsurabile est quadrato ex CB, erit & parallelogrammum DH parallelogrammo KL commensurabile. ergo & DK ipsi KM longitudine est commensurabilis. quòd cum quadrata ex AC CB maiora sint eo, quod bis AC CB continetur; erit & parallelogrammum DL maius parallelogrammo MF: ideoq; recta linea DM ipsa MG est maior. atque est rectangulum DKM æquale quadrato ex MN, hoc est quartæ parti quadrati ex MG: & DK ipsi KM longitudiue est commensurabilis. si autem sint duæ rectæ lineę inæquales, & quartæ parti quadrati minoris ęquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes cõmensurabiles ipsam diuidat, maior plus poterit, quàm minor quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. suntq; rationales DM MG, & DM, quæ est maius nomen expositę rationali DE longitudine est commensurabilis. ergo DG est ex binis nominibus prima. quod demonstrare oportebat.

4. secundi. 37. huius. 16 huius. 6. diffi. 23. huius. 13. huius. Ex lemmate ad 55. huius. 1. sexti. 17. sexti. 1 sexti. 10 huius. Ex antecedentium. 1 sexti. 14. quinti. 19. huius. 1 diffi. secũdarum.

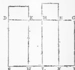
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ℞ *15 plus* R *5, & DE 5. erit DH 15 KL 5, & MX* R *75 & NF* R *75. quare si ad DE applicetur DH latitudinem faciet DK 3: & si applicetur KL faciet KM 1. Quòd si ad eandẽ applicetur MX videlicet* R *75 faciet latitudinẽ MN* R *3 ex 2 theoremate eorum, quae ad 20 huius conscripsimus. et similiter NG erit* R *3. ergo tota DG est 4 plus* R *12, quae est ex binis nominibus prima.*

THEOREMA XLIIII. PROPOSITIO LXII.

Quadratum eius, quę est ex binis medijs prima ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

Sit ex binis medijs prima AB, diuisa in medias ad pũctum C, quarum AC sit maior: exponaturq; rationalis DE; & ad ipsam applicetur parallelogrammum æquale quadrato



quadrato ipsius AB, quod sit DF, latitudinem faciẽs DG. Dico DG ex binis nominibus secundã esse. Cõstruantur enim eadem, quę supra. & quoniam AB ex binis medijs est prima, diuisa ad pũ
58 huius. ctum C, erunt AC CB mediæ potentia solum cõmensurabiles, quæ rationalem continent. quare & quę fiunt ex AC CB media sunt; ideoq́, DL est medium, quod ad rationalem applicatũ est.
23 huius. rationalis igitur est MD, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam rationale est quod bis AC CB continetur, erit & MF ratio
21 huius. nale, & ad rationalem ML applicatum est. ergo & MG est rationalis; & ipsi ML, hoc est ipsi DE commensurabilis longitudine. incommensura-
13 huius. bilis igitur est DM ipsi MG, & sunt rationales. quare DM MG rationales sunt potẽ-
37 huius. tia solum commensurabiles; ac propterea DG est ex binis nominibus. ostendẽdum
Ex lem. ad est & secundam esse. Quoniam enim quadrata ex AC CB maiora sunt eo, quod bis
6 huius. AC CB continetur, erit & DL parallelogrammum parallelogrammo MF maius. er-
1 sexti go & recta linea DM maior est ipsa MG. Quòd cum quadratum ex AC quadrato
14 quinti. ex CB sit commensurabile, & DH parallelogrammum parallelogrammo KL commensurabile erit. quare & DK commensurabilis ipsi KM. atque est quod DK KM cõ-
19 huius. tinetur quadrato ipsius MN æquale. ergo DM plus potest, quàm MG quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. estq́; MG commensurabilis longitudi-
2 diffi. secũdarum. ne ipsi DE. quare DG ex binis nominibus est secunda.

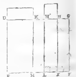
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB RR 48 *plus* RR 27, *et DE* 4; *erit DH* R 48, *KL* R 27, *MX, et NF* 6. *ergo si ad DE applicetur DH, faciet DK* R 3 *ex 2 theoremate iam dicto, et eadem ratione si ad eandem applicetur KL, erit KM* R $1\frac{11}{16}$ *et si applicetur MX vel NF, erit MN, vel NG* $1\frac{1}{2}$ *et quoniam DK KM hoc est* R 3, R $1\frac{11}{16}$ *longitudine cõmensurabiles sunt, si inter se componantur, erit ex tertio theoremate eorum, quae nos ad 20 huius apposuimus, DM* R $9\frac{3}{16}$ *ergo tota DG est* R $9\frac{3}{16}$ *plus 3 videlicet ex binis nominibus secunda.*

THEOREMA XLV. PROPOSITIO. LXIII.

Quadratum eius, quę est ex binis medijs secunda ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.





Sit ex binis medijs secunda AB, diuisa in medias ad C, ita vt AC sit maior portio. rationalis autem sit DE & ad ipsam DE quadrato ex AB æquale parallelogrammum DF applicetur, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus tertiam esse. Construantur enim eadem, quę supra. & quoniã AB est ex binis medijs secũda, diuisa ad punctũ
39 huius. C, erunt AC CB mediæ potentia solum commen-
A surabiles, quæ medium contineant. ergo & compositum ex ipsarum AC CB quadratis medium est, & ipsi DL æquale. medium igitur est DL, & ad ra-
23 huius. tionalem DE applicatur. ergo rationalis est MD, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. Eadem ratione, & MG est rationalis, & incommensurabilis ipsi ML, hoc est ipsi DE. vtraque igitur ipsarum

DM

DM MG rationalis est, & ipsi DE longitudine incommensurabilis. & quoniam incommensurabilis est AC ipsi CB longitudine; vt autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad rectangulum ACB: erit & quadratum ex AC rectangulo ACB incommensurabile. ergo & compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur; hoc est DL incõmensurabile ipsi MF. et ob id recta linea DM ipsi MG est incommensurabilis: suntq; rationales. ergo DG est ex binis nominibus. ostendendũ est et tertiã esse. similiter enim concludemus DM ipsa MG maiorem esse, et DK ipsi KM commensurabilem. atque est rectangulum DKM quadrato ipsius MN æquale. ergo DM plus potest, quàm MG, quadrato rectę lineæ sibi incommensurabilis longitudine; et neutra ipsarum DM MG est longitudine commensurabilis ipsi DE. quare DG est ex binis nominibus tertia.

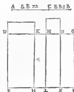
1. sexti, uel ex lemm. ad 23. huius: B

1. sexti & 10. huius.

37 huius.

19. huius.

3. diffi. secundarum.



F. C. COMMENTARIVS.

Ergo et compositum ex ipsarum AC CB quadratis medium est.] *Ex duobus enim medijs commensurabilibus, si inter se componantur, vnum fit medium, vt in 45 huius diximus.* A

Ergo et compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur.] *Nam cum quadrata ex AC CB commensurabilia sint, si inter se componantur, erit compositum commensurabile quadrato ex AC per 16 huius. quod autem bis continetur AC CB rectãgulo ACB est incõmẽsurabile, vt pote eius duplum. ergo ex ijs, quae nos ad 14 huius demonstrauimus, compositum ex quadratis AC CB incommensurabile est ei, quod bis AC CB continetur.* B

Sit AB RR 72 *plus* RR 8, *et DE 4. erit DH* R 72, *KL* R 8, *MX, vel NF* R 24. *quare si ad DE applicetur DH, latitudinem faciet DK* R 4 $\frac{1}{2}$: *si vero applicetur KL faciet KM* R $\frac{1}{2}$. *et si MX, vel NF faciet MN, vel NG* R 1 $\frac{1}{2}$. *At si DK KM componantur, hoc est* R 4 $\frac{1}{2}$, *&* R $\frac{1}{2}$ *fiet DM* R 8. *tota igitur DG est* ℞ 8 *plus* ℞ 6, *quae est ex binis nominibus tertia.*

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO LXIIII.

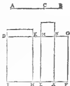
Quadratum maioris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Sit maior AB, diuisa in puncto C, ita vt AC maior sit quã CB. rationalis autem quędam sit DE. & quadrato ex AB æquale ad ipsam DE applicetur parallelogrammum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus quartã esse. Constrnantur enim eadem, quæ supra. Et quoniam maior est AB, diuisa in C, erunt AC CB potentia incommensurabiles, quæ faciunt cõpositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium. itaque quoniam rationale est compositum ex quadratis ipsarum AC CB, erit & parallelogrammum DL rationale. ergo & rationalis est recta linea DM, ipsiq; DC longitudine commensurabilis. Rursus quoniam medium est quod bis AC CB continetur, hoc est MF, & ad rationalẽ ML est applicatum; erit et MG rationalis, & ipsi DE incommensurabilis longitudine. ergo & DM ipsi MG longitudine incommensurabilis est, ac propterea DM MG rationales

40. huius.

21. huius.

23 huius.



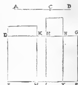
37.huius. rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. quare ex duobus nominibus eſt DG. oſtendendum eſt & quartam eſſe. ſimiliter enim ſuperioribus cõcludemus DM maiorem eſſe, quàm MG. et rectãgulum DKM quadrato ex MN æquale. Quoniam igitur quadratum ex AC incõmenſurabile eſt quadrato ex CB, erit et DH paralle-
1 sexti & 10. huius. logrammum incõmenſurabile parallelogrãmo KL. et ob id recta linea DK ipſi KM incõmenſurabilis. ſi aũt ſint duæ rectæ lineę inæquales, & quartæ parti quadrati mi-
19 huius. noris ęquale parallelogrãmũ ad maiorẽ applicetur, deficiens figura quadrata, quod in partes incommenſurabiles longitudine ipſam diuidat, maior plus poterit, quam minor quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. ergo DM plus poteſt, quàm MG, quadrato rectæ lineę ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntq; DM MG rationales potentia ſolum commenſurabiles: atque eſt DM commenſurabi-
4 diffi secũdarum. lis expoſitæ rationali DE. quare DG eſt ex binis nominibus quarta.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ℞ V. 10 plus ℞ 37 $\frac{1}{2}$ plus ℞ V. 10 minus ℞ 37 $\frac{1}{2}$: et DE ſit 5. erit DH 10 plus ℞ 37 $\frac{1}{2}$: KL 10 minus ℞ 37 $\frac{1}{2}$: MX, vel NF ℞ 62 $\frac{1}{2}$. itaque ſi ad DE applicetur DH latitudinem faciẽs DK, erit DK 2 plus ℞ 1 $\frac{1}{2}$: ſi vero applicetur KL faciens KM, erit ea 2 minus ℞ 1 $\frac{1}{2}$: & ſi applicetur MX, vel NF, erit MN, vel NG ℞ 2 $\frac{1}{2}$. Quòd ſi componantur DK KM, hoc eſt 2 plus ℞ 1 $\frac{1}{2}$, & 2 minus ℞ 1 $\frac{1}{2}$, fiet DM 4. ergo tota DG eſt 4 plus ℞ 10. videlicet ex binis nominibus quarta.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO. LXV.

Quadratum eius, quæ rationale, ac medium poteſt ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.



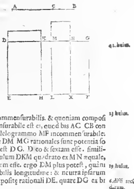
Sit rationale, ac medium potens A B, diuiſa in rectas lineas ad punctum C, ita vt AC ſit maior. exponaturq; rationalis DE, & quadrato ipſius A B æquale parallelogrammum D F ad ipſã DE applicetur, latitudinem faciens D G. Dico DG ex binis nominibus quintam eſſe. Conſtruãtur enim eadem, quæ ſupra. Et quoniam rationale, ac medium potens eſt AB, diuiſa ad C punctum, erunt AC CB potentia incommenſurabi-
41.huius. les, quę faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ipſis continetur rationale. quoniam igitur medium eſt compoſitum ex ipſarum AC CB quadratis, erit & pa-
23 huius. rallelogrãmum DL medium: ideoq; recta linea DM rationalis eſt, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam ra-
21.huius. tionale eſt, quod bis AC CB continetur, hoc eſt parallelogrammum MF; erit MG
13 huius. rationalis, & ipſi DE longitudine commenſurabilis. incommenſurabilis igitur eſt DM ipſi MG. quare DM MG rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea DG eſt ex binis nominibus. Dico & quintam eſſe. ſimiliter enim demõſtrabitur, rectangulum DKM quadrato ex MN eſſe ęquale; & DK ipſi KM longitudine eſſe incommenſurabilem. quare DM plus poteſt, quàm M G quadrato rectæ lineę ſibi incommenſurabilis longitudine: ſuntq; DM MG rationales, potẽtia ſolum
5 diffi secundarum. commenſurabiles, & minor MG commenſurabilis eſt ipſi DE lõgitudine. ergo DG eſt ex binis nominibus quinta.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit ab R *V*.R 125 *plus* 5,*plus* R *V* R 125 *minus* 5; *& DE sit* 5.*erit parallelogrammũ DH* R 125 *plus* 5, *KL* R 125 *minus* 5; *MX vel NF* 10:*& si ad DE applicetur parallelogrammum DH latitudinem faciens DK, erit DK* R 5 *plus* 1.*si vero applicetur KL latitudinẽ faciens KM, erit KM* R 5 *minus* 1. *& si applicetur MX vel NF, erit MN, vel NG* 2. *quòd si componantur DK KM videlicet* R 5 *plus* 1,R 5 *minus* 1,*fiet DM* R 20. *tota igitur DG est* R 20 *plus* 4. *nimi rum ex binis nominibus quinta.*

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO LXVI.

Quadratum eius, quæ bina media poteſt, ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.



Sit bina med. a potens A B, diuiſa ad punctum C: rationalis autem ſit D E: & ad ipſam DE quadrato ex AB æquale parallelogrammum DF applicetur, latitudinem faciens DG. Dico DG ex binis nominibus ſextam eſſe. Conſtruantur enim ea dem quę ſupra. Et quoniam bina media potens eſt AB, diuiſa ad C, erũt AC CB potentia incommenſurabiles, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis medium: & quod ipſis continetur medium; & adhuc incommẽſurabile compoſito ex quadratis ipſarum. ergo ex iam demonſtratis medium eſt vtrumque parallelogrammorum DL MF: & ad rationalem DE applicata ſunt. rationalis igitur eſt & vtraque DM MG, & ipſi DE longitudine incommenſurabilis. & quoniam compoſitum ex ipſarum AC CB quadratis incommenſurabile eſt ei, quod bis AC CB continetur: erit & DL parallelogrammum parallelogrammo MF incommenſurabile: & idcirco DM incommenſurabilis MG. quare DM MG rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & ex binis nominibus eſt D G. Dico & ſextam eſſe. ſimiliter enim prædictis rurſus oſtendemus rectãgulum DKM quadrato ex M N æquale, & DK ipſi KM longitudine incommenſurabilem eſſe. ergo DM plus poteſt, quàm MG quadrato rectæ lineę ſibi incommenſurabilis longitudine: & neutra ipſarum DM MG longitudine commenſurabilis eſt expoſitę rationali DE. quare DG ex binis nominibus eſt ſexta.

41. huius.

23 huius.

19 huius.

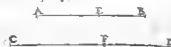
6. diffi. secũdarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R *V*.R 252 *plus* R 72,*plus* R *V*.R 252 *minus* R 72: *& DE sit* 6. *erit DH* R 252 *plus* R 72: *KL* R 252 *minus* R 72: *MX, vel NF* R 180. *applicetur ad DE parallelogrammũ DH latitudinem faciens DK. erit DK* R 7 *plus* R 2. *Rursus applicetur KL faciens latitudinem KM. erit KM* R 7 *minus* R 2. *denique applicetur MX, vel NF. erit MN, vel NG* R 5.*ergo tota DG est* R 28 *plus* R 20 *ex binis nominibus sexta.*

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO LXVII.

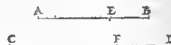
Ei, quæ eſt ex binis nominibus longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, atque ordinę eadem.



Sit ex binis nominibus AB, & ipsi AB
longitudine commensurabilis sit C D.
Dico CD ex binis nominibus esse, & ordine eandem ipsi AB. quoniam enim ex
binis nominibus est A B, diuidatur in
nomina ad punctum E, & sit AE maius nomen. ergo AE EB rationales sunt poten
12.sexti. tia solum commensurabiles. fiat vt AB ad CD, ita AE ad CF: & reliqua igitur EB
19.quinti. ad reliquam FD est, ut AB ad C D. commensurabilis autem est AB ipsi CD longitu
10.huius. dine. ergo & AE ipsi CF, & EB ipsi FD longitudine est commensurabilis. suntq; ra
3.diffi. tionales AE EB. rationales igitur sunt & CF FD. & quoniam est vt AE ad CF, ita
EB ad FD, erit permutando ut AE ad EB, ita CF ad FD: sunt autem AE EB poten
10 huius. tia solum commensurabiles. ergo & CF FD potentia solum cōmensurabiles erunt.
& sunt rationales. ex binis igitur nominibus est CD. Dico & ipsi AB ordine eandē
esse. uel enim AE plus potest, quàm EB quadrato rectæ lineæ sibi longitudine com
15.huius. mensurabilis, uel incommensurabilis. si quidem commensurabilis, & CF plus pote
rit, quàm FD quadrato rectę lineæ sibi commensurabilis longitudine. Quod si AE
12.huius. sit commensurabilis expositæ rationali, & CF eidem commensurabilis erit. & ob id
vtraque ipsarum A B CD ex binis nominibus est prima; hoc est ordine eadem. Si ve
ro EB sit commensurabilis expositę rationali, & FD eidem erit commēsurabilis. ob
eamq; caussam CD ipsi AB ordine eadem est; vtraque enim est ex binis nominibus
secunda. quod si neutra ipsarum AE EB sit expositę rationali commensurabilis, &
neutra CF FD eidem commensurabilis erit; & est vtraque tertia. At si AE plus pos
15.huius. sit, quàm EB quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, & CF plus
poterit, quàm FD quadrato rectæ lineę sibi longitudine incommensurabilis. &
si AE sit commensurabilis expositæ rationali, & CF eidem commensurabilis erit,
& est vtraque quarta. quòd si EB, & ipsa FD, & est vtraque quinta. si vero neutra ip
sarū AE EB, & neutra CF FD expositę rationali erit cōmensurabilis, & est vtraque
sexta. ergo ei, quę est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, & ipsa ex
binis nominibus est, & ordine eadem.

THEOREMA L. PROPOSITIO. LXVIII.

Ei, quę est ex binis medijs longitudine commensurabilis, & ip
sa ex binis medijs est, atque ordine eadem.



Sit ex binis medijs AB, & ipsi A B com-
mensurabilis longitudine sit CD. Dico CD
ex binis medijs esse, & ipsi AB ordine ean-
dē. quoniam enim A B ex binis medijs est,
38.huius. diuisa in medias ad punctum E, erunt AE
12.sexti. EB mediæ potentia solum commensurabiles. Itaque fiat vt A B ad C D, ita A E ad
19.quinti CF. ergo & reliqua EB ad reliquam FD est vt AB ad CD. commēsurabilis autem est
10.huius. AB ipsi C D longitudine. quare & AE ipsi C F longitudine commensurabilis erit,
24.huius. & EB ipsi FD. suntq; mediæ AE EB. mediæ igitur & CF FD. Et quoniā est vt AE
ad EB, ita CF ad FD, & sunt AE EB commensurabiles potentia solum; erunt & CF
FD, potentia solum commensurabiles. ostensę autem sunt & mediæ. ergo CD est
✠ ex binis medijs. Dico & ipsi AB ordinę eandem esse. Quoniam enim est vt AE ad
EB, ita CF ad FD, erit & vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratū
ex CF ad rectangulum CFD. quare permutando vt quadratum ex A E ad quadra-
tum ex C F, ita rectangulum AEB ad C F D rectangulum. commensurabile autem
est quadratum ex AE quadrato ex CF. ergo & rectangulum AEB rectangulo CFD
est commensurabile. si igitur rationale est rectangulum AEB, & tectāgulum CFD
rationale erit: atque est ex binis medijs prima. si vero medium est rectangulum
AEB

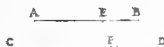
AEB, & ipsum CFD erit medium: & est vtraque ex binis medijs secunda. ergo CD ipsi AB ordine eadem est. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam enim est vt AE ad EB, sic CF ad FD, erit & ut quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD] *Nam cum sit ut AE ad EB, ita CF ad FD; ut autem AE ad EB, ita quadratum ex AE ad AEB rectangulum ex 1 sexti, vel ex lemmate ante 23 huius: erit ut quadratum ex AE ad AEB rectangulum, ita CF ad FD. sed vt CF ad FD, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. vt igitur quadratum ex AE ad AEB rectangulum, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD.* 11. quinti.

THEOREMA LI. PROPOSITIO LXIX.

Maiori commensurabilis, & ipsa maior est.



Sit maior AB: & ipsi AB commensurabilis sit CD. Dico CD maiorem esse. diuidatur AB in E. ergo AE EB potentia sunt incommensurabiles, quę faciunt compositū quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis cōtinetur, medium. & fiant eadem, quæ supra. quoniam igitur est vt AB ad CD, ita AE ad CF, & EB ad FD; erit vt AE ad CF, ita EB ad FD. commensurabilis autē est AB ipsi CD. ergo & vtraque ipsarum AE EB vtrique CF FD est commensurabilis. & quoniam est vt AE ad CF, ita EB ad FD: permutandoq; vt AE ad EB, ita CF ad FD: & componendo vt AB ad BE, ita CD ad DF. vt igitur quadratum ex AB ad quadratū ex BE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF. similiter demonstrabimus & vt quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita esse quadratum ex CD ad quadratum ex CF. ergo & vt quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex CD ad quadrata ex CF FD: permutando igitur ut quadratum ex AB ad quadratum ex CD, ita quadrata ex AE EB ad quadrata ex CF FD. commensurabile autē est quadratum ex AB quadrato ex CD. ergo & quadrata ex AE EB quadratis ex CF FD sunt commensurabilia. atque est compositum ex quadratis ipsarum AE EB rationale. ergo & rationale erit compositum ex quadratis CF FD. similiter aūt & quod bis continetur AE EB commensurabile est ei, quod bis CF FD continetur. atque est medium, quod bis continetur AE EB. medium igitur & quod bis CF FD continetur. ergo CF FD potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis rationale: quod autem ipsis cōtinetur medium. tota igitur CD irrationalis est, quæ vocatur maior. ergo maiori commensurabilis & ipsa maior est. quod demonstrare oportebat.

40. huius — A — B — C — D — E — F

F. C. COMMENTARIVS.

A Vt igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF] *Ex 22 sexti libri.*

B Similiter demonstrabimus & vt quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita esse quadratum ex CD ad quadratum ex CF] *Quoniam enim est vt AB ad BE, ita CD ad DF, erit per conuersionē rationis vt BA ad AE, ita DC ad CF. ergo ut quadratum ex AB ad quadratum ex AE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex CF.* 22. sexti.

C Ergo & quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratū ex CD ad quadrata ex CF FD] *Est enim vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare vt quadratum ex AE ad quadratum ex EB, ita quadratum ex CF ad quadratum ex FD: & componendo vt quadrata ex AE EB ad quadratum ex EB, ita quadrata ex CF FD ad quadratum ex FD: conuertendoq; vt quadratum ex EB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex FD ad quadrata ex CF FD. erat autē*

ut quadratum ex AB ad quadratum ex BE, ita quadratum ex CD ad quadratum ex DF. ergo ex aequali ut quadratum ex AB ad quadrata ex AE EB, ita quadratum ex CD ad quadrata ex CF FD.

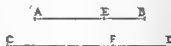
D Similiter autem & quod bis continetur AE EB commensurabile est ei, quod bis CF FD continetur] *Nam ex 4 secundi quadratum ex AB est aequale quadratis ex AE EB unà cum eo, quod bis continetur AE EB: & eadem ratione quadratum ex CD est aequale quadratis ex CF FD unà cum eo, quod bis CF FD continetur. Cum igitur sit ut totum ad totum, ita ablatũ ad ablatũ, uidelicet ut quadratum ex AB ad quadratũ ex CD, ita quadrata ex AE EB ad quadrata ex CF FD; erit & reliquũ ad reliquũ, ut totum ad totũ; hoc est quod bis continetur AE EB ad id, quod bis CF FD continetur, ut quadratum ex AB ad quadratum ex CD. sed quadratum ex AB commensurabile est quadrato ex CD. ergo ex 10 huius & quod bis continetur AE EB commensurabile est ei, quod bis CF FD continetur.*

E Medium igitur & quod bis CF FD continetur.] *Ex corollario 24 huius. quare & medium est, quod semel continetur CF FD.*

F Ergo CF FD potentia sunt incommensurabiles] *Ut enim AE ad EB, ita est CF ad FD. sed AE est potentia incommensurabilis ipsi EB. ergo & CF ipsi FD potẽtia incommensurabilis erit. sunt igitur CF FD potentia incommensurabiles.* 10. huius.

THEOREMA LII. PROPOSITIO. LXX.

Rationale, ac medium potenti commensurabilis, & ipsa rationale, ac medium potens est.



Sit rationale, ac medium potens AB: & ipsi AB commensurabilis sit CD. ostendendum est & CD rationale, ac medium potẽtem esse. diuidatur AB in rectas lineas ad
40. huius. punctum E. ergo AE EB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium: quod autem ipsis continetur rationale. & eadem, quæ prius construantur. Similiter demonstrabimus CF FD potentia esse in commensurabiles: & compositum ex quadratis ipsarum AE EB commensurabile esse composito ex quadratis CF FD. Quod autẽ continetur AE EB cõmẽsurabile est ei, quod CF FD continetur. ergo & compositum ex quadratis ipsarum CF FD est medium. Quod autem continetur CF FD rationale. rationale igitur, ac medium potens est CD. quod ostendere oportebat.

THEOREMA LIII. PROPOSITIO. LXXI.

Bina media potenti commensurabilis, & ipsa bina media potens est.



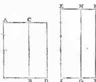
Sit bina media potens AB, & ipsi AB commẽsurabilis CD. ostendendũ est CD bina media potentem esse. Quoniam enim bina media potens est AB, diuidatur in rectas lineas ad punctum E. quare
42. huius. AE EB potentia sunt incommensurabiles, quæ faciunt cõpositum ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis continetur medium, incommensurabileq́; composito ex quadratis ipsarum. & construantur eadem, quę supra. similiter demonstrabimus CF FD potentia incommensurabiles esse: & compositum ex quadratis ipsarum AE EB commẽsurabile composito ex quadratis CF FD: quod autem AE EB continetur commensurabile est ei, quod continetur CF FD. quare & compositum ex quadratis ipsarum CF FD medium est: itemq́; medium quod CF FD continetur; & adhuc incommensurabile composito ex quadratis CF FD. ergo bina media potens est CD. quod ostendendum fuit.

THEO-

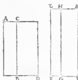
THEOREMA LIIII. PROPOSITIO. LXXII.

Si rationale,& medium componantur , quattuor irrationales fiunt, vel ea, quę ex binis nominibus, vel quę ex binis medijs primą, vel maior, vel rationale ac medium potens.

Sit rationale quidem spacium AB,
medium autem CD. Dico eam, quę po
test spacium AD, vel esse ex binis nomi
nibus, vel ex binis medijs primam , vel
maiorem, vel rationale, ac medium po
tentem. etenim AB vel maius est, quã
CD, vel minus. sit primum maius, expo
naturq; rationalis EF : & ad ipsam ap-
plicetur parallelogrammũ EG ipsi AB
æquale, quod latitudinem faciat EH:
ipsi vero CD ęquale ad EF, hoc est ad
HG applicetur HI latitudinem faciens
HK. & quoniam rationale est AB, & ip
si est ęquale EG, erit & EG rationale;&



ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens EH. ergo EH est rationalis, 21 huius.
& ipsi EF longitudine commensurabilis. Rursus quoniam medium est CD, & ipsi
est ęquale HI, erit & HI medium;& ad rationalem EF, hoc est HG applicatum est, la
titudinem faciens HK. quare HK est rationalis,& incommensurabilis ipsi EF longi- 23 huius.
tudine. quòd cum medium sit CD, rationale autem AB; erit AB ipsi CD incommẽ
surabile. ergo & EG incõmensurabile est ipsi HI. vt autem EG ad HI, ita est recta li- 1. sexti.
nea EH ad HK. ergo EH ipsi HK longitudine est incommensurabilis. & sunt vtręq; 10. huius.
rationales. quare EH HK rationales sunt potentia solum commensurabiles; & ob
id ex binis nominibus est EK, diuisa ad pũctum H. & quoniam maius est AB, quàm
CD, æquale autem AB ipsi EG, & CD ipsi HI; erit & EG, quàm HI maius. ergo & E
H maior est quàm HK. vel igitur EH plus potest, quàm HK quadrato rectæ linæ si-
bi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. possit primum quadrato
rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, & sit maior HE expositę rationali E
F commensurabilis. ergo EK ex binis nominibus est prima, atque est EF rationalis. 1. Diffi secũdarum.
Si autem spacium cõtineatur rationali,& ex binis nominibus prima, recta linea spa-
cium potens ex binis nominibus est. ergo quæ potest spacium EI est ex binis nomi- 55. huius.
nibus. quare & ea quæ potest spacium AD. Sed EH plus possit, quàm HK, quadrato
rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & sit maior EH expositę rationali
EF commensurabilis longitudine. ergo EK ex binis nominibus est quarta, & est EF 4 diffi.
rationalis. si autem spacium contineatur rationali, & ex binis nominibus quarta, re 58. huius.
cta linea spacium potens irrationalis est, quæ maior appellatur. potens igitur spa-
cium EI maior est. ergo & potẽs spacium AD maior. sit deinde spacium AB minus,
quam CD. erit & EG quam HI minus; &
ob id recta linea EH minor, quàm recta H
K. vel igitur KH plus potest, quàm HE qua
drato rectæ lineę sibi longitudine commen-
surabilis, vel incommensurabilis. possit pri-
mum quadrato rectæ lineæ commensurabilis
longitudine, & sit minor EH commensura-
bilis expositæ rationali EF longitudine. ergo
EK ex binis nominibus est secunda: rationa-
lis autem EF. quod si spacium contineatur
rationali, & ex binis nominibus secunda, re-
cta linea spacium potens est ex binis medijs 56 huius.



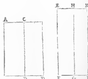
primam:

[illegible]. potens igitur ſpacium EI prima eſt ex binis medijs.ergo & potẽs ſpaciũ AD. Sed KH plus poſsit, quam HE quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſitq́; minor EH expoſitæ rationali EF commenſurabilis longitudine.quare EK ex binis nominibus eſt quinta; atque eſt rationalis EF. ſi autem ſpacium con-
59. huius. tineatur rationali, & ex binis nominibus quinta, quæ ſpacium poteſt recta linea rationale ac medium potẽs eſt. quæ igitur poteſt ſpacium EI rationale & medium potens eſt; ideoq́; rationale & mediũ potẽs eſt quæ põt ſpaciũ AD. Si igitur rationale, & medium componantur, quattuor irrationales fiunt, vel ea quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis medijs prima, vel maior, vel rationale, ac medium potens. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA LV. PROPOSITIO LXXIII.

Si duo media inter ſe incommenſurabilia componantur duæ reliquæ irrationales fiunt, vel ex binis medijs ſecunda, vel bina media potens.

Componantur enim duo media incõmenſurabilia inter ſe AB CD. Dico rectam lineam, quæ ſpaciũ AD poteſt vel ex binis medijs ſecundam eſſe, vel bina media potentem. ſpacium enim AB vel maius eſt, quàm CD, vel minus. ſit primum maius; exponaturq́; rationalis EF: & ad EF ſpacio quidem AB æquale applicetur EG, latitudinem faciens EH. ipſi vero CD æquale applicetur HI, latitudinem faciens HK. & quoniam medium eſt vtrumq́; ipſorũ AB CD, erit & vtrũq; EG HI medium, & ad rationalem EF applicata ſunt, quæ latitudinem faciunt E



23 huius. H HK. ergo vtraque EH HK rationalis eſt, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis. quòd cum AB incõmenſurabile ſit ipſi CD; ſitq́; AB quidem æquale EG, CD
1 sexti. vero ipſi HI: erit & EG ipſi HI incõmẽſurabile. ſed vt EG ad HI, ita eſt EH ad HK.
10 huius. incommenſurabilis igitur eſt EH ipſi HK lõgitudine: ideoq́; EH HK rationales sũt
37 huius. potentia ſolum commenſurabiles. quare ex binis nominibus eſt EK. Itaque vel EH plus poteſt, quàm HK quadrato rectę lineę ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. poſsit primum quadrato rectæ lineę ſibi commenſurabilis longitudine; & neutra ipſarum EH HK longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali EF. ergo EK ex binis nominibus eſt tertia, & eſt FE rationalis. ſi autem ſpacium contineatur rationali, & ex binis
57. huius. nominibus tertia, recta linea ſpaciũ potens eſt ex binis medijs ſecũda. ergo quę poteſt ſpacium EI, hoc eſt AD eſt ex binis medijs ſecunda. ſed EH plus poſsit quàm HK quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; & vtraque ipſarum EH HK longitudine incõmenſurabilis eſt expoſitæ rationali EF. quare EK ſexta eſt ex binis nominibus. At ſi ſpacium contineatur rationali, &
60 huius. ex binis nominibus ſexta, quæ ſpacium poteſt recta linea eſt bina media potẽs. ergo quę poteſt ſpacium AD bina me-



dia

dia potens est. Similiter demonstrabimus & si AB sit minus, quàm CD, recta[illegible]neam, quæ spacium potest AD, vel ex binis medijs secundam esse, vel rationale, ac medium potentem. si igitur duo media inter se incommensurabilia componantur reliquæ duæ irrationales fiunt, vel ex binis medijs secunda, vel bina media potens. quod demonstrandum fuit.

Quæ ex binis nominibus & quæ post ipsam sunt, irrationales neq; mediæ, neque
inter se eædem sunt. quadratum enim, quod fit à media, ad rationalem applicatum
latitudinem efficit rationalem, et ei ad quam applicatur, longitudine incommensu 23 huius.
rabilem. quod autem fit ab ea, quæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum 61 huius.
latitudinem efficit ex binis nominibus primam. quod ab ea, quę est ex binis medijs 62. huius.
prima ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus secundā.
Quod ab ea, quæ est ex binis medijs secunda ad rationalem applicatum latitudinē 63 huius.
efficit ex binis nominibus tertiam. Quod à maiori ad rationalem applicatum lati- 64 huius.
tudinem efficit ex binis nominibus quartam. Quod ab ea, quæ rationale, ac mediū 65 huius.
potest ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus quintam.
Quod ab ea, quæ bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem efficit 66. huius.
ex binis nominibus sextam. Quoniam igitur dictę latitudines differunt et à prima
& inter se se: à prima quidem, quòd rationalis sit; inter se se vero, quod ordine non
sint eædem, constat & ipsas irrationales inter se differentes esse.

SCHOLIVM.

Septem sunt senarij, de quibus hactenus dictum est. eorum primus quidem ostendit ortum linearum irrationalium: secundus autem diuisionem, nempe quòd ad vnum dumtaxat punctum diuiduntur. tertius earum, quæ ex binis nominibus inuentionem, videlicet primę, secundę, tertiæ, quartæ, quintæ, & sextę. deinceps sequitur quartus senarius, ostendens quomodo hæ lineæ inter se differant. namque vsus ijs, quæ ex binis nominibus, ostendit differentiam sex irrationalium. Quintum, & sextum exposuit, ostendens in quinto quidem applicationes quadratorum, quę ex irrationalibus, videlicet quales irrationales faciant, latitudines applicatorū spaciorū. In sexto aūt quomodo irrationalibus commensurabiles eiusdem speciei sint. Rursus in septimo manifeste ostendit differentiam ipsarum. Apparet autem & in his irrationalibus arithmetica analogia: & quæ media sumitur proportionalis inter portiones cuiusque lineæ irrationalis iuxta arithmeticam analogiam, & ipsa eiusdem speciei cū ijs, inter quarū portiones media interijcitur. itaq primum arithmeticam medietatem in his esse, sic apparet.

Ponatur enim exempli gratia ex binis nominibus AB, & in nomina ad punctum C diuidatur. manifestum est AC maiorem esse, quàm CB. auferatur à recta linea AC ipsi BC æqualis AD, & CD bifariam in E secetur. constat igitur AE ipsi EB æqualem esse. po

A D E C B

F G

natur alterutri ipsarum æqualis FG. manifestum est quo differt AC ab ipsa FG, eo differre EB ab ipsa BC; etenim AC ab ipsa FG differt magnitudine EC: & eadem magnitudine differt FG ab ipsa BC, quod est arithmeticæ analogiæ proprium. commensurabilis autem est FG ipsi AB; est enim eius dimidię æqualis. ergo FG ex binis nominibus est. similiter ostendetur & in alijs. 67. huius.

PRIN-

PRINCIPIVM SENARIORVM PER APHÆRESIM HOC EST *Per detractionem.*

THEOREMA LVI. PROPOSITIO LXXIIII.

Si à rationali rationalis auferatur potentia solum commensurabilis existés toti, reliqua irrationalis est. vocetur autem apotome.

A rationali enim AB rationalis auferatur BC, potentia solum cōmensurabilis existens toti. Dico reliquā AC irrationalem esse, quæ vocatur apotome. Quoniā enim incommensura-
A bilis est AB ipsi BC longitudine; atq; est vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad id quod continetur AB BC: erit quadratū ex AB incommensurabile ei, quod AB BC continetur. sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt quadrata ex AB BC: ei vero, quod continetur AB BC, commensurabile est quod bis AB BC contine-
B tur. quadrata igitur ex AB BC ei, quod bis continetur AB BC sunt incommensu-
C rabilia. ergo reliquo, nempe quadrato ex AC incommensurabilia sunt quadrata ex
D AB BC; quoniam quadrata ex AB BC æqualia sunt ei, quod bis AB BC contine-
E tur vnà cum quadrato ex AC. rationalia autem sunt quadrata ex AB BC. ergo recta linea AC est irrationalis. vocetur autem apotome.

A C B

F. C. COMMENTARIVS.

A Atque est vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad id, quod continetur AB BC] *Ex 1. sexti, vel ex lemmate, quod 23 huius inseruit.*

B Quadrata igitur ex AB BC ei, quod bis continetur AB BC sunt incommensurabilia] *Ex demonstratis à nobis ad 14 huius.*

C Ergo reliquo, nempe quadrato ex AC incommensurabilia sunt quadrata ex AB BC] *Ex demonstratis ad 17 huius.*

D Quoniam quadrata ex AB BC æqualia sunt ei, quod bis AB BC cōtinetur, vna cum quadrato ex AC] *Ex septima 2 libri.*

E Ergo recta linea AC est irrationalis] *Quoniam enim quadrata ex AB BC incommensurabilia sunt quadrato ex AC, & sunt quadrata ex AB BC rationalia, sequitur quadratum ex AC irrationale esse, ideoque ex 11 diffinitione rectam lineam AC esse irrationalem.*

Sit recta linea AB 2, BC ℞ 3. erit AC 2 minus ℞ 3. respondet autem tota linea AB maiori nomini eius, quæ est ex binis nominibus, de qua in 37 huius agitur; & BC respondet minori. atque est AC reliqua portio maioris nominis, nempe minori nomine ex eo detracto.

THEOREMA LVII. PROPOSITIO LXXV.

Si à media media auferatur potentia solum commensurabilis existens toti, quæ cum tota rationale contineat; reliqua irrationalis est. vocetur autem mediæ apotome prima.

A media enim AB auferatur media BC, potentia solum commensurabilis existens ipsi AB, & cum ea rationale faciens, videlicet quod AB BC continetur. Dico reliquam AC irrationalē esse. vocetur autem medię apotome prima. Quoniam enim AB BC mediæ sunt,
A erunt & quæ ex AB BC quadrata media. rationale autem est quod bis continetur

A C B

AB

AB BC.quadrata igitur ex AB BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC continetur. ergo & reliquo, videlicet quadrato ex AC incõmensurabile est id, quod B
bis AB BC continetur, quoniam si tota magnitudo vni componentium sit incom- C
mensurabilis, & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt. Irrationalis igitur est AC. vocetur q; medię apotome prima. D

F. C. COMMENTARIUS.

Rationale autem est, quod bis continetur AB BC] *Ponitur enim rationale, quod semel AB BC continetur.* A

Ergo & reliquo, videlicet quadrato ex AC incommensurabile est id, quod bis A B
B BC continetur] *Namque ex 7 secundi quadrata ex AB BC sunt aequalia ei, quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato, quod fit ex AC.*

Quoniam si tota magnitudo vni componentium sit incommensurabilis] *Ex 17* C
huius.

Irrationalis igitur est AC] *Nam cum id, quod bis AB BC continetur sit rationale, & incõ-* D
mensurabile quadrato ex AC, erit quadratum ex AC irrationale: idcirco q; recta linea AC irrationalis ex 11. diffinitione.

Sit recta linea AB R R 54, BC R R 24. erit AC R R 54 minus R R 24. respondet autem tota linea AB maiori nomini eius, quae est ex binis medijs prima, de qua in 38 huius, & BC minori, est igitur AC reliqua portio maioris nominis, minori ex eo detracto.

THEOREMA LVIII. PROPOSITIO. LXXVI.

Si à media media auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti, quæ cum tota medium contineat; & reliqua irrationalis est. vocetur autem mediæ apotome secunda.



A media enim AB auferatur media BC potẽtia solum commensurabilis existens toti AB, & cum ea medium continens, videlicet quod continetur AB BC. Dico reliquam AC irrationalem esse. vocetur autem mediæ apotome secunda. exponatur enim rationalis DI: & quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum DE ad ipsam DI applicetur, latitudinem faciens DG: ei vero quod bis AB BC continetur ęquale parallelogrammum DH ad eandem DI applicetur, latitudinem faciens DF. reliquum igitur FE est æquale quadrato ex AC. & quoniam media sunt, quæ ex AB BC quadrata; erit & A
parallelogrammum DE medium. & ad rationalem DI applicatum est, latitudinem faciens DG. ergo DG est rationalis, & ipsi DI longitudine incommensurabilis. Rur B
sus quoniam medium est quod AB BC continetur, erit & quod bis continetur AB C
BC medium. atque est ęquale parallelogrammo DH. ergo & DH est medium, & ad rationalem DI applicatum est latitudinem faciens DF. rationalis igitur est DF, & ipsi DI longitudine incommensurabilis. & quoniam AB BC potentia solum cõ-
mensurabiles sunt, erit AB ipsi BC incommensurabilis longitudine. ergo quadra- D
tum ex AB incommensurabile est ei, quod AB BC continetur. sed quadrato quidẽ E
ex AB commensurabilia sunt quæ ex AB BC quadrata, ei vero, quod AB BC con- Coroll. 24. huius.
tinetur commensurabile est id, quod bis continetur AB BC. quadrata igitur ex AB
BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC continetur. parallelogrammum F
autem DE est ęquale quadratis ex AB BC; & parallelogrammum DH æquale est ei, quod bis continetur AB BC. ergo DE ipsi DH est incommensurabile. sed vt DE

1. sexti. 10. huius. ad DH, ita recta linea GD ad DF. incommensurabilis igitur est GD ipsi DF longitudine. & sunt vtræque rationales. quare GD DF rationales sunt, potentia solum cō-
G mensurabiles. ergo FG apotome est; & D I est rationalis. quod autem rationali, & ir-
H rationali continetur rectangulum irrationale est, & ipsum potens est irrationalis.
K sed recta linea AC potest FE parallelogrammum. ergo AC est irrationalis. vocetur autem mediæ apotome secunda.

F. C. COMMENTARIVS.

A Reliquum igitur FE est æquale quadrato ex AC] *Ex 7 secundi libri.*

B Ergo DG est irrationalis, & ipsi DI longitudine incommensurabilis] *Ex 23 huius.*

C Erit & quod bis continetur AB BC medium] *Ex corolario 24 huius.*

D Ergo quadratum ex AB incommensurabile est ei, quod AB BC continetur] *Est enim vt AB ad BC, ita quadratum ex AB ad rectangulum ABC. & cum AB ipsi BC longitudine sit incommensurabilis, erit & quadratum ex AB incommensurabile ei, quod AB BC continetur; ex 10 huius.* (Lemma. ad 23 huius.)

E Sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt quæ ex AB BC quadrata] *Nam rectae lineae AB BC potentia commensurabiles ponuntur.*

F Quadrata igitur ex AB BC incommensurabilia sunt ei, quod bis AB BC continetur] *Ex demonstratis ad 17 huius.*

G Ergo FG apotome est] *Ex 74 huius.*

H Quod autem rationali, & irrationali continetur rectangulum irrationale est] *Ex scholio ad 39 huius apposito, quare sequitur parallelogrammum FE irrationale esse.*

K Ergo AC est irrationalis] *Ex 11 diffinitione.*

Sit AB ℞℞ 18, BC ℞℞ 8. erit AC ℞℞ 18 minus ℞℞ 8. respondet autem ipsa AB maiori nomini eius, quae est ex binis medys secunda; & BC respondet minori. de qua in 39 huius.

THEOREMA LIX. PROPOSITIO LXXVII.

Si à recta linea recta linea auferatur, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem ipsis continetur medium; reliqua irrationalis est. vocetur autem minor.



A recta linea AB auferatur recta BC potentia incommensurabilis existens toti, faciésq; cum tota AB compositum quidem ex ipsarū AB CB quadratis rationale; quod autem bis AB BC continetur medium. Dico reliquam AC irrationalem esse, quę vocatur minor. Quoniam enim cō-positum quidem ex ipsarum AB BC quadratis rationale est: quod autem bis AB BC continetur medium, erunt AB BC quadrata incommensurabilia ei, quod bis
A continetur AB BC. ergo per conuersionem rationis quadrata ex AB BC quadra-
B to ex AC sunt incommensurabilia. sed quadrata ex AB BC rationalia sunt. irratio-
C nale igitur est quadratum ex AC; ideoq; recta linea AC est irrationalis. vocetur autem minor.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo per conuersionem rationis quadrata ex AB BC quadrato ex AC sunt incommensurabilia] *Ex demonstratis ad 17 huius.*

B Irrationale igitur est quadratum ex AC] *Ex 10 diffinitione.*

C Ideoq; recta linea AC est irrationalis] *Ex vndecima diffinitione.*

Sit AB ℞V. 32 plus ℞ 704, BC ℞V. 32 minus ℞ 704. erit AC ℞V. 32 plus ℞ 704 minus ℞V. 32 minus ℞ 704. respondet autem AB maiori nomini eius, quae dicitur maior, & BC respondit minori nomini eiusdem; de qua in 40 huius.

THEO-

THEOREMA LX. PROPOSITIO. LXXVIII.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis bis continetur rationale; reliqua irrationalis est; vocetur que cum rationali medium totum efficiens.



A recta enim linea AB recta linea BC auferatur, potentia incommensurabilis existens toti AB, faciensq; compositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis medium; quod autem bis AB BC continetur, rationale. Dico reliquam AC irrationalem esse: vocetur autem cum rationali medium totum efficiens. Quoniam enim compositum ex ipsarum AB BC quadratis medium est: quod autem bis continetur AB BC rationale; erunt ex AB BC quadrata incommensurabilia ei, quod bis AB BC continetur. & reliquum igitur quadratum ex AC incommensurabile est ei, quod bis continetur AB BC. atque est quod bis continetur AB BC rationale. ergo quadratum ex AC irrationale est: & ob id recta linea AC irrationalis. vocetur aūt cū rationali medium totum efficiēs. 17. huius 10. diff.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 4 $\frac{1}{2}$. BC ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ minus ℞ 4 $\frac{1}{2}$, erit AC ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ plus ℞ 4 $\frac{1}{2}$ minus ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$. minus ℞ 4 $\frac{1}{2}$, respondetq; AB maiori nomini eius, quae vocatur rationale, ac medium potens, & BC respondet minori. de qua in 41 huius.

THEOREMA LXI. PROPOSITIO. LXXIX.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti: & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem ipsis bis cōtinetur medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum; reliqua irrationalis est. vocetur autem cum medio medium totum efficiēs.



A recta enim linea AB, recta linea BC auferatur, potētia incommensurabilis existens toti AB, faciensq; cōpositum quidem ex ipsarum AB BC quadratis mediū; quod autem bis AB BC continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum. Dico reliquam AC irrationalem esse. vocetur autem cum medio medium totum efficiens. exponatur enim rationalis D I: & quadratis quidem ex AB BC æquale parallelogrammum DE ad ipsam D I applicetur, latitudinem faciens DG. ei vero, quod bis continetur AB, BC æquale auferatur DH, latitudinem faciens D F. ergo reliquum FE est æquale quadrato ex A C. & ob id recta linea AC ipsum FE potest. itaque quoniam compositum ex ipsarum AB BC quadratis medium est, & parallelogrammo DE ęquale, erit ipsum DE medium: & ad rationalē DI applicatū est, latitudinē faciēs DG. quare D G est rationalis, & ipsi DI longitudine in cōmensurabilis. Rursus qm̄ id quod bis AB B C cōtinetur mediū est, & æquale parallelogrāmo DH, erit DH mediū, & ad rationalē D I applicatū 23. huius.

 est,

23.huius. ...tis, latitudinem faciens DF. ergo DF est rationalis, ipsiq; DI incõmensurabilis longitudine. Quòd cum quadrata ex A B BC incommensurabilia sint ei, quod bis AB
1.sexti. BC continetur, & parallelogrãmum D E ipsi D H est incommensurabile. vt autem
10 huius. DE ad DH, ita est recta linea DG ad ipsam DF. incõmensurabilis igitur est DG ipsi DF, & sunt vtræque rationales. ergo GD DF rationales sunt, potentia solum cõmen
A surabiles. apotome igitur est FG: & FH est rationalis, quod autem rationali, & apo
B toma continetur rectangulum irrationale est, ipsumq; potens est irrationalis. sed A
C C potest parallelogrammum FE. ergo AC irrationalis est. vocetur autem cum medio medium totum efficiens,

F. C. COMMENTARIVS.

A Apotome igitur est F G] *Ex 74 huius.*

B Quod autem rationali, & apotoma continetur rectangulum irrationale est] *Etenim in scholio ad 39 huius apposito demonstratur, quod rationali, & irrationali continetur irrationale esse.*

C Ipsumq; potens est irrationalis] *Ex 11 diffinitione.*

Sit AB ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ plus 3, BC ℞ V. ℞ 13 minus 3. erit AC ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ plus 3 minus ℞ V. ℞ 13 $\frac{1}{2}$ minus 3. & respondet AB maiori nomini eius, quae vocatur bina media potens; & BC respondet minori, de qua in 42 huius.

THEOREMA LXII. PROPOSITIO LXXX.

Apotomæ vna tantum congruit recta linea potentia solum cõmensurabilis existens toti.

A Sit apotome A B: congruens autem ipsi sit BC. ergo AC CB rationales sunt potẽtia solum commensurabiles. Dico ipsi AB alteram non congruere rationalem, quæ potentia solum sit comensurabilis toti. si enim fieri potest, congruat BD. ergo AD DB rationales sunt potentia solum commensurabiles. & quoniam quo excessu quadrata ex AD DB excedunt id, quod bis continetur AD DB, eo & quadrata ex AC
B CB excedunt quod bis AC CB continetur; vtraque enim excedunt eodem quadra
C to, quod fit ex AB. & permutando quo excessu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedet id, quod bis AC
D CB continetur. sed quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali; etenim vtraque rectarum linearum rationalis est. quod igitur bis continetur AD
E DB excedit id, quod bis AC CB continetur rationali. quod fieri non potest; vtraq;
F enim media sunt. medium autem medium non superat rationali. ergo rectæ lineæ AB altera non congruit rationalis, potentia solum commensurabilis existens toti. vna igitur tantum ipsi congruit.

A B C D

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo AC CB rationales sunt potentia solum commensurabiles] *Ex 74 huius.*

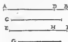
B Vtraque enim excedunt eodem quadrato, quod fit ex AB] *Quadrata enim ex AD DB aequalia sunt ei, quod bis AD DB continetur vnà cum quadrato ex AB, ex 7 secundi; & eadem ratione quadrata ex AC CB sunt aequalia ei, quod bis continetur AC CB vnà cum quadrato ex AB.*

C Et permutando quo excessu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB] *Hoc sequenti lemmate demonstrabimus.*

LEMMA.

Sint quattuor magnitudines AB C EF G; & AB excedat ipsam C eodem excessu, quo EF excedit G. Dico & permutando AB eodem excessu excedere ipsam E F, vel excedi ab ea, quo C excedit G, vel ab ea exceditur.

Sit enim DB excessus, quo AB excedit C: & HF excessus quo EF excedit G. erunt DB HF aequales; itemq; aequales inter se AD C; & EH G. ergo AD excedit EH, vel ab ea exceditur eodem excessu, quo C ipsam G. & additis vtrinque aequalibus DB HF, excedet AB ipsam EF, vel ab ea excedetur eodem excessu, quo AD ipsam EH, hoc est quo C ipsam G. atque illud est, quod demonstrare oportebat.



Sed quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali]*Rationale enim non superat rationale, nisi rationali. quod nos ad 27 huius demonstrauimus.* D

Vtraque enim media sunt]*Nam quod rationalibus potentia solũ commensurabilibus continetur rectangulum irrationale est, quod medium appellatur, ex 22 huius. mediũ igitur est id, quod continetur AD DB: & ideo medium quod bis continetur AD DB, vt pote eius duplum ex corollario 24 huius. eadem ratione & medium est, quod bis AC CB continetur.* E

Medium autem medium non superat rationali]*Ex 27 huius.* F

THEOREMA LXIII. PROPOSITIO. LXXXI.

Mediæ apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota rationale continens.

Sit enim media apotome prima AB, & ipsi AB cõgruat BC. ergo AC CB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quę rationale continent. Dico ipsi AB alteram non congruere mediam, quæ potentia solum sit commensurabilis toti, & cum tota medium contineat. si enim fieri potest, congruat BD. ergo AD DB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ rationale continent, quod AD DB continetur. & quoniam quo excessu quadrata ex AD DB excedunt id, quod bis continetur AD DB, eodẽ & quadrata ex AC CB excedunt quod bis AC CB continetur; eodem enim turfus excedunt quadrato ex AB; & permutando quo excessu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur. sed quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur rationali: vtraque enim rationalia sunt. ergo & quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali. quod fieri nõ potest; vtraque enim sunt media. medium autem medium non superat rationali: quare mediæ apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea media, quę potentia solum toti sit commẽsurabilis, & cum tota rationale contineat.

75 huius. 7. secundi. Ex antecedẽti lemmate. Ex demonstratis ad 17. huius. 27. huius.

THEOREMA LXIIII. PROPOSITIO LXXXII.

Medię apotomæ secundę vna tantum congruit recta linea, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota medium continens.

Sit mediæ apotome secunda AB, & ipsi AB congruat BC. ergo AC CB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, mediumq; continentes ACB. Dico ipsi AB alteram 76. huius.

alteram non congruere mediam quæ potentia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat. ſi enim fieri poteſt, congruat BD. quare AD DB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium ADB continent: & exponatur rationalis EF: quadratiſq; ex AC CB æquale parallelogrammum EG ad ipſam EF applicetur, latitudinem faciens EM, & ei, quod bis continetur AC CB æquale auferatur parallelogrammum HG, latitudinem faciens HM. reliquum igitur



EL eſt æquale ei, quod fit ex AB quadrato. ergo AB ipſum EL poteſt. Rurſus quadratis ex AD DB æquale parallelogrammum EI ad ipſam EF applicetur, latitudinem faciens EN. eſt autem & EL æquale quadrato ex AB. reliquum igitur HI eſt æquale ei, quod bis AD DB continetur. & quoniã mediæ ſunt AC CB, erunt & quadrata ex AC CB media, ſuntq; æqualia parallelogrammo EG. quare EG eſt me-
23. huius. dium, & ad rationalem EF applicatum eſt, latitudinem faciens EM. ergo EM eſt rationalis, & ipſi EF longitudine incommenſurabilis. rurſus quoniam mediũ eſt quod continetur AC CB, & quod bis AC CB continetur medium erit. atque eſt æquale parallelogrammo HG. ergo & HG eſt medium, & ad rationalem EF applicatum
23. huius. eſt, latitudinem faciens HM. rationalis igitur eſt HM, & ipſi EF incommenſurabilis longitudine. & quoniam AC CB potentia ſolum ſunt commenſurabiles, erit AC in
Ex lemm. ad 23. huius. commenſurabilis ipſi CB longitudine. vt autem AC ad CB, ita quadratum ex AC ad id, quod continetur AC CB. incommenſurabile igitur eſt & quadratum ex AC ei, quod AC CB continetur. ſed quadrato quidem ex AC commenſurabilia ſunt quadrata ex AC CB; ei vero, quod continetur AC CB commenſurabile eſt, quod
Ex demonſtratis in 14. huius. bis AC CB continetur. ergo quadrata ex AC CB incommẽſurabilia ſunt ei, quod bis AC CB continetur. atque eſt quadratis ex AC CB æquale parallelogrammum EG, ei vero, quod bis AC CB continetur æquale ipſum HG. ergo EG ipſi GH eſt in
1. ſexti. commenſurabile. ſed vt EG ad GH, ita eſt recta linea EM ad ipſam MH. quare EM
10. huius. ipſi MH eſt incommenſurabilis longitudine. & ſunt vtræque rationales. ergo EM MH rationales ſunt, potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea apotome eſt
74. huius. EH, & ipſi congruens HM. ſimiliter demonſtrabimus & HN ipſi congruere. apotomæ igitur alia, atque alia congruit recta linea, potentia ſolum commenſurabilis exi
Ex 80. huius ſtens toti. quod fieri non poteſt. ergo mediæ apotomæ ſecundæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat.

THEOREMA LXV. PROPOSITIO LXXXIII.

Minori vna tantum congruit recta linea, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod aũt bis ipſis continetur mediũ.

77 huius. Sit minor AB, & ipſi AB congruat BC. ergo AC CB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale: quod autem bis ipſis continetur medium.



Dico ipſi AB alteram non congruere rectam lineam, quæ eadem faciat. ſi enim fieri poteſt, congruat BD ergo AD DB potentia ſunt incommenſurabiles, facientes cõ-
Ex lemmate ad 80 huius poſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale: quod autem bis ipſis continetur medium. & quoniam quo exceſſu quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem

CB, eodem & quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur; quadrata autem ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB rationali; vtraque enim rationalia sunt: & quod bis continetur AD DB id, quod bis AC CB continetur, rationali excedet. quod fieri non potest. etenim vtraque sunt media. ergo mino ri vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cū tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod vero bis ip sis continetur medium. 27 huius.

THEOREMA LXVI. PROPOSITIO LXXXIIII.

Ei, quæ cū rationali mediū totū facit, vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale.



Sit cum rationali medium totum faciens AB, congruens autem ipsi BC. ergo AC CB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum AC CB quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale. Dico ipsi AB alterā non congruere eadem facientem. si enim fieri potest, congruat. BD. ergo AD DB potētia sunt incōmensurabiles, facientes cōpositum quidem ex ipsarū AD DB quadratis medium; quod autem bis ipsis continetur, rationale. Quoniam igitur quo ex excessu, quadrata ex AD DB excedunt quadrata ex AC CB, eodem quod bis continetur AD DB excedit id, quod bis AC CB continetur: quod autem bis continetur AD DB excedit id quod bis AC CB continetur rationali; etenim vtraque rationalia sunt: & quadrata ex AD DB rationali excedēt quadrata ex AC CB. quod fieri non potest, cum vtraque sint media. non igitur ipsi AB altera congruit, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis ipsis cōtinetur rationale. quare ei, quæ cum rationali medium totum facit, vna tantum congruet recta linea. 78. huius.

THEOREMA LXVII. PROPOSITIO. LXXXV.

Ei, quę cum medio medium totum facit, vna tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem bis ipsis continetur, medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.



Sit cum medio medium totum faciens AB, ipsi vero congruens BC. ergo AC CB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod au tem bis ipsis continetur medium, & adhuc incō- mensurabile composito ex quadratis ipsarum. Dico ipsi AB alteram non congruere potentia incommensurabilem toti, & cum tota facientem ea, quæ proposita sunt. si enim fieri potest, congruat BD, ita vt AD DB potentia incommensu- 79. huius.

rabiles



rationales sint, facientq; compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem ipsis continetur medium, & incomensurabile composito ex quadratis ipsarum. & exponatur rationalis EF, & quadratis ipsarum AC CB æquale parallelogrammum EG ad ipsam EF applicetur, latitudinē facens EM: ei vero, quod bis continetur AC CB ęquale parallelogrammum auferatur HG, latitudinem faciens HM. reliquum igitur quadratum ex AB est æquale parallelogrammo EL. ergō AB ipsum EL pôt. rursus quadratis ex AD DB ęquale parallelogrammum EI ad ipsam EF applicetur, latitudinem faciens EN. est autem & quadratum ex AB æquale parallelogrammo EL. ergo reliquum, quod bis AD DB continetur ipsi HI est quale. & quoniam compositum ex quadratis AC CB medium est, & æquale parallelogrā-
mo EG, erit & EG medium, quod ad rationalem EF applicatum est, latitudinem
23 huius. faciens EM. quare EM est rationalis, & ipsi EF longitudine incommēsurabilis. Rur
sus quoniam quod bis AC CB continetur est medium, & æquale ipsi HG, erit &
HG medium, & ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens HM. rationa
lis igitur est HM, & ipsi EF incommensurabilis longitudine. quòd cum quadrata
ex AC CB incommensurabilia sint ei, quod bis AC CB continetur, erit & EG in-
10 huius. commensurabile ipsi GH; ideoq; recta linea EM rectæ MH longitudine est incom-
mensurabilis. & sunt vtræque rationales. cum igitur EM MH rationales sint, poté-
74. huius. tia solum commensurabiles, recta linea EH apotome est, & ipsi congruens HM. si-
militer demonstrabimus EH rursus apotomen esse, ipsiq; congruentem HN. ergo
apotomæ alia, atque alia congruit rationalis, potentia solum commensurabilis exi
80 huius. stens toti. quod fieri non posse ostensum est. non igitur ipsi AB altera congruet re
cta linea quare vna tantum congruet, potentia incommensurabilis existens toti, &
cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem
bis ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis
ipsarum.

DIFFINITIONES TERTIAE.

1 Exposita rationali, & apotoma, si quidē tota plus possit, quàm congruens quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; sitq; tota expositæ rationali longitudine commensurabilis: vocetur apotome prima.

2 Si vero congruens sit longitudine commensurabilis expositæ rationali, & tota plus possit, quàm congruens quadrato rectę lineæ sibi cōmensurabilis longitudine; vocetur apotome secunda.

3 Quòd si neutra sit longitudine commensurabilis expositę rationali, & tota plus possit, quàm congruens quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine; dicatur apotome tertia.

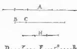
4 Rursus si tota plus possit, quàm congruens quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, si quidem tota sit longitudine commensurabilis expositæ rationali; vocetur apotome quarta.

Si vero congruens expositę rationali sit longitudine commensurabilis, vocetur apotome quinta. 5

Quòd si neutra, dicatur apotome sexta. 6

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIO LXXXVI.

Inuenire primam apotomen.



Exponatur rationalis A, & ipsi A longitudine commensurabilis sit BG. ergo & BG est rationalis. & exponantur duo quadrati numeri DE EF, quorum excessus DF nõ sit quadratus. neque igitur ED ad DF proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & fiat vt E D ad D F, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC. commẽsurabile igitur est quadratum ex BG quadrato ex G C; rationale autẽ est quadratũ ex BG. ergo & quadratum ex GC est rationale; ideoq; recta linea GC rationalis est. & quoniam ED ad DF proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine; & sunt vtræque rationales. ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ob id BC apotome est. Dico & primam esse. sit enim quadratum ex H id, quo quadratũ ex BG plus potest, quàm quadratum ex GC. & quoniam est vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex GC, erit per conuersionem rationis vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad quadratum ex H. sed DE ad EF proportionem habet, quã quadratus numerus ad quadratum numerum; vterque enim quadratus est. ergo & quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est BG ipsi H lõgitudine. & B G plus potest, quâm GC quadrato ex H. ergo B G plus poterit, quàm GC quadrato rectæ lineę sibi longitudine commensurabilis. atque est tota BG expositę rationali A commensurabilis lõgitudine. ergo BG apotome est prima. Inuẽta igitur est prima apotome. quod facere oportebat.

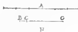
6. diffi. | Coroll. 1. lẽ. ad 30. huius | 9. huius. | 74. huius. | 9. huius. | 3. diffi. tertiarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, BG 4. numerus autem DE sit 16, EF 9. erit DF 7. si igitur fiat vt 16 ad 7, ita quadratum ex BG, videlicet 16 ad quadratum ex GC. erit quadratum ex GC 7, & recta linea GC ℞ 7. ergo BC est 4 minus ℞ 7, quae est apotome prima.

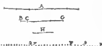
PROBLEMA XIX. PROPOSITIO LXXXVII.

Inuenire secundam apotomen.



Exponatur rationalis A; & ipsi A longitudine commensurabilis sit CG. ergo CG est rationalis. & exponantur duo numeri quadrati D E EF, quorũ excessus DF, nõ sit quadratus fiatq; vt F D ad D E, ita quadratum ex CG ad quadratum ex G B. commensurabile igitur est quadratum ex CG quadrato ex G B. sed quadratum ex

6 Diffi. | Coroll. 1. lemma ad 30 huius.



CG est rationale. ergo & rationale est quadratum ex GB; ac propterea ipsa GB est rationalis. & quoniam quadratum ex CG ad quadratum ex GB proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum,
9.huius. erit CG ipsi GB incommensurabilis longitudine; & vtræque sunt ra-
74.huius. tionales. ergo CG GB rationales sunt, potentia solum commensurabiles, & ob id B C est apotome. Dico & secundam esse. quo enim quadratum ex BG excedit quadratum ex GC, sit ex H quadratum. Quoniam igitur est vt quadratum ex BG ad quadratum ex GC, ita DE numerus ad numerum DF, erit per conuersionem rationis, vt quadratum ex BG ad quadratum ex H, ita DE ad EF. atque est vterque ipsorum DE EF quadratus. quadrati igitur ex BG ad quadratum ex H proportionem ha-
9. huius. bet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoq; BG ipsi H longitudine est commensurabilis. & plus potest BG, quàm GC quadrato ex H. ergo BG plus potest, quàm GC quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. atque est congruens CG exposite rationali A commensurabilis longitudine. ergo B
2.diff. C apotome est secunda. inuenta igitur est secunda apotome BG. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, CG 3; numerus autem DE sit 36, & EF 9. erit DF 27. itaque fiat vt 27 ad 36, ita 9 ad alium, erit ad 12. ergo GB est ℞ 12, & BC ℞ 12 minus 3, quæ est apotome secunda.

PROBLEMA XX. PROPOSITIO LXXXVIII.

Inuenire tertiam apotomen.



Exponatur rationalis A, & exponãtur tres numeri E BC CD non habentes inter se proportionem, quam numerus quadratus habet ad quadratum numerum; BC vero ad BD proportionem habeat, quam quadratus numerus
Coral 6 huius. ad quadratum numerum: & fiat vt E ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG: vt
6.huius. autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH, commẽsurabile igitur est quadratum ex A quadrato ex FG. atque est quadratum ex A rationale. ergo & rationale est quadratum ex FG; ac propterea recta linea FG est rationalis. & quoniam E ad BC proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. in-
9 huius. cõmensurabilis igitur est A ipsi FG longitudine. rursus quõ est vt BC ad CD, ita
6.huius. quadratum ex FG ad quadratum ex GH; erit quadratum ex FG quadrato ex GH commensurabile rationale autẽ est quadratum ex FG. ergo & quadratũ ex GH est rationale, & ob id recta linea GH rationalis. quòd cum BC ad CD proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratũ ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam quadratus numerus ad
9.huius. quadratum numerum. incommensurabilis igitur est FG ipsi GH longitudine: & sunt vtræque rationales. ergo FG GH rationales sunt potentia solum commensu-
74.huius. rabiles; ac propterea apotome est FH. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt E

quidem ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG; vt autem BC ad CD, ita
quadratum ex FG ad quadratum ex GH, erit ex æquali vt E ad CD, ita quadratum
ex A ad quadratum ex GH: sed E ad GD proportionem non habet, quam numerus
quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex A ad quadratum
ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerũ.
ergo A ipsi GH longitudine est incommẽsurabilis. neutra igitur ipsarum FG GH 9. huius.
expositę rationali A commensurabilis est longitudine. quo autem quadratum ex F
G plus potest, quam quadratum ex GH, sit ex K quadratum. Quoniam igitur est vt
BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH, erit per conuersionem ra-
tionis vt CB ad BD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex K. at CB ad BD pro-
portionem habet, quam nnmerus quadratus ad quadratum numerum. ergo & qua
dratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadra-
tus ad quadratum numerum. commensurabilis igitur est FG ipsi K longitudine: & 9. huius.
plus potest FG, quàm GH quadrato ex K. ergo FG plus potest, quàm GH quadra-
to rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine. & neutra ipsarum FG GH longi-
tudine commensurabilis est expositę rationali A. quare FH apotome est tertia. In- 3. diff.
uenta igitur est tertia apotome FH. quod facere oportebat.

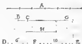
F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, numerus E 18, BC 16, & CD 7. erit BD 9. fiat vt 18 ad 16, ita 36 ad alium, erit ad 32. ergo FG est ℞ 32. rursus fiat vt 16 ad 7, ita 32 ad alium. erit ad 14 quare GH est ℞ 14 & FH ℞ 32 minus ℞ 14, quae est apotome tertia.

PROBLEMA XXI. PROPOSITIO. LXXXIX.

Inuenire quartam apotomen.

Exponatur rationali A & ipsi A longitudi
ne commensurabilis sit BG. ergo BG est ra-
tionalis. exponantur prӕterea duo numeri D
F FE, ita vt totus DE ad vtrumque ipsorum
DF FE proportionem non habeat, quam nu-
merus quadratus ad quadratum numerum:
& fiat vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad
quadratum ex GC. commensurabile igitur
est quadratum ex BG quadrato ex GC. est au 6. huius.
tem quadratum ex BG rationale. quare & rationale est quadratũ ex GC; ideoq; re-
cta linea GC est rationalis. & quoniam DE ad EF proportionem non habet, quam
numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadra
tum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum nu-
merum. incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine, & sunt vtræque ra- 9. huius.
tionales. ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles. & ob id 74 huius.
apotome est BC. Dico & quartam esse. Quo igitur plus potest BG, quàm GC, sit
quadratum ex H. & quoniam est vt DE ad EF, ita quadratum ex BG ad qnadratum
ex GC; erit per conuersionem rationis vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad qua-
dratum ex H: sed ED ad DF proportionem non habet, quam numerus quadratus
ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex BG ad quadratum ex H pro-
portionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum incommẽ
surabilis igitur est BG ipsi H longitudine. & plus potest BG, quam GC quadrato
ex H. ergo BG plus potest, quam GC quadrato rectę lineæ sibi longitudine incom-
mensurabilis. atque est tota BG commẽsurabilis expositę rationali A. ergo BC apo 4. diffi. ter-
tome est quarta. Inuenta igitur est quarta apotome BC. quod facere oportebat. tiarum.

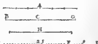


F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, BG 4, numerus autem DF 6, & FE 10. itaq; si fiat vt 16 ad 10, ita 16 ad alium, erit GC R 10 & BC 4 minus R 10, quae est apotome quarta.

PROBLEMA XXII. PROPOSITIO XC.

Inuenire quintam apotomen.



Exponatur rationalis A, & ipsi A commensurabilis sit CG. ergo CG est rationalis. & exponantur duo numeri DF FE, ita vt DE ad vtrumque ipsorum DF FE proportionem rursus nõ habeat, quã numerus quadratus ad quadratũ numerum; fiatq; vt FE ad ED, ita

6. huius. quadratum ex CG ad quadratum ex GB. ergo quadratum ex CG commensurabile est quadrato ex GB. est autem quadratum ex CG rationale. ergo & rationale est quadratum ex GB: & idcirco recta linea GB est rationalis. & quoniam vt DE ad EF, ita est quadratum ex BG ad quadratum ex GC: & DE ad EF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex BG ad quadratum ex GC proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum

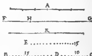
9 huius. dratum numerum. incommensurabilis igitur est BG ipsi GC longitudine; & sunt vtraque rationales. ergo BG GC rationales sunt potentia solum commensurabiles; & BC apotome est. Dico & quintam esse. Quo enim plus potest quadratum ex BG, quàm quadratum ex GC, sit quadratum ex H. Quoniam igitur quadratum ex BG ad quadratum ex GC est vt DE ad EF, erit per conuersionem rationis vt ED ad DF, ita quadratum ex BG ad id, quod fit ex H quadratũ. sed ED ad DF proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadrarum numerum. neque igitur quadratum ex BG ad quadratum ex H proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoq; recta linea BG ipsi H longitudine est incommensurabilis. & plus potest BG, quàm GC quadrato ex H. ergo BG plus potest, quàm GC quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. atque est congruens CG expositę rationali A longitudine commensurabilis. quare BC apotome est quinta. Inuenta est igitur quinta apotome BC. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 6, CG 3. numerus autem DF sit 25, FE 9: & fiat vt 9 ad 34, ita quadratum ex CG, quod est 9 ad alium, erit BG R 34, & BC R 34 minus 3, quę est apotome quinta.

PROBLEMA XXIII. PROPOSITIO. XCI.

Inuenire sextam apotomen.



Exponatur rationalis A, & tres numeri E BC CD proportionem non habentes inter se, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ. & fiat vt E ad BC, ita quadratũ ex A ad quadratũ ex FG: ut aũt BC ad CD, ita quadratũ ex FG ad quadratũ ex GH. quũ igitur est vt E ad BC ita, quadratũ ex A ad quadratũ ex FG;

6. huius. erit quadratum ex A quadrato ex FG cõ

mensurabile.

mensurabile. rationale autem est quadratum ex A. ergo & quadratum ex [illegible] nale erit; & ob id recta linea FG rationalis. & quoniam E ad BC proportionem no habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex FG proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. Incommẽsurabilis igitur est A ipsi FG longitudine. rursus quo- 9 huius.
niam est vt BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH, erit quadratum 6. huius.
ex FG commensurabile quadrato ex GH. est autem quadratum ex FG rationale. rationale igitur est & quadratum ex GH; & ipsa GH rationalis. quòd cũ BC ad CD proportionem non babeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerũ; neque quadratum ex FG ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo F G ipsi G H longitudine est incom- 9. huius.
mensurabilis: & sunt vtræque rationales. quare FG GH rationales sunt potentia solum commẽsurabiles, & FH apotome est. Dico & sextam esse. Quoniam enim est 74. unius
vt E ad BC, ita quadratum ex A ad quadratum ex FG; vt autem BC ad CD, ita quadratum ex FG ad quadratum ex GH. erit ex æquali vt E ad CD, ita quadratum ex A ad quadratum ex GH. sed E ad CD proportionem non habet, quã numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex GH proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numetum. ergo A ipsi GH longitudine est incommensurabilis: & neutra ipsarum FG GH expositæ rationali A commensurabilis est longitudine. quo igitur plus potest quadratum ex FG, quàm quadratum ex GH, sit quadratum ex K. & quoniam est vt BC ad CD, ita quadratum ex F G ad quadratum ex G H, erit per conuersionem rationis vt CB ad BD, ita quadratum ex F G ad quadratum ex K. at C B ad B D proportionem non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. neque igitur quadratum ex FG ad quadratum ex K proportionem habebit, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo incommensurabilis est FG ipsi K longitudi- 9 huius.
ne. & FG plus potest, quã GH quadrato ex K. plus igitur potest FG, quàm GH quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: & neutra ipsarum FG GH est commensurabilis longitudine expositæ rationali A. ergo FH apotome est sexta. 6. tertiarum
Inuenta est igitur sexta apotome F H. sed & expeditius sex dictatum linearum in- diffi.
uentionem ostendere licet.

Si enim oporteat inuenire primam apotomẽ, exponatur ex binis nominibus prima A C, cuius maius nomẽ sit AB. & ponatur B D ipsi B C ęqualis. ergo AB BC, hoc est AB BD rationales sũt, potentia solum commensurabiles: & AB plus potest, quàm BC, hoc est quàm B D quadrato rectę lineæ sibi longitudine commensurabilis: & AB est commensurabilis lõgitudine expositę rationali. apotome igitur prima est AD. similiter & reliquas apotomas inueniemus, eas, quæ ex binis nominibus eiusdem ordinis exponentes.

A D B C

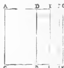
F. C. COMMENTARIVS.

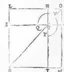
Sit A 6. numerus autem E sit 15, BC 25, & CD 10. fiat igitur ut 15 ad 25, ita 36 ad aliũ, erit ad 60. Rursus fiat ut 25 ad 10, ita 60 ad alium, erit ad 24. ergo F G est R 60, *& G H* R 24. *ac propterea FH est* R 60 *minus* R 24, *quę est apotome sexta.*

THEOREMA LXVIII. PROPOSITIO XCII.

Si spacium cõtineatur rationali, & apotoma prima, recta linea spacium potens apotome est.

Contineatur





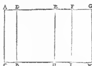
...ineatur enim spacium AB rationali A C,& apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spacium AB apotomen esse. Quoniã enim AD prima apotome est, sit ipsi congruens
1 diffi tertia rum. DG. ergo AG GD rationales sunt potentia solum commensurabiles, & tota AG longitudine commensurabilis est expositæ rationali AC. & præterea AG plus potest, quàm GD quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine. si igitur quartæ parti quadrati, quod fit ex DG, ęquale parallelogrammũ ad AG applicetur, de-
18. huius. ficiens figura quadrata, in partes longitudine cõmensurabiles ipsam diuidet. secetur DG bifariã in E,& quadrato ex EG æquale parallelogrammum ad ipsam AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. commensurabilis igitur est AF ipsi FG longitudine: & per E F G puncta ipsi AC parallelæ ducantur EH FI GK. & qm̃ AF ipsi FG lõgitudine est commensurabi
16. huius. lis, erit & tota AG vtrique ipsarum AF FG cõmensurabilis longitudine. sed AG commensurabilis est ipsi AC. vtraque igitur AF FG ipsi AC longitudine est commensurabilis. atque est AC rationalis. ergo & rationalis vtra-
20. huius. que AF FG, ac propterea vtrumque parallelogrammorum AI FK est rationale. &
16 huius. quoniam DE ipsi EG longitudine est commensurabilis, erit & DG vtrique DE EG commensurabilis longitudine: estq; rationalis DG,& ipsi AC longitudine incõ-
14 huius. mensurabilis. ergo & vtraque DE EG rationalis est, & incommensurabilis ipsi AC
22 huius. longitudine: & ob id vtrumque parallelogrammorum DH EK medium est. ponatur ipsi quidem AI parallelogrammo æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK æquale quadratum auferatur NX, communem ipsi angulum habens LO
26 sexti. M. ergo quadrata LM NX circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter OR,& figura describatur. itaque quoniam rectãgulum AFG est æquale quadrato ex
14. sexti. EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF: sed vt AF ad EG, ita est parallologrammum AI ad ipsum EK: & vt EG ad GF, ita parallelogrammum EK ad ipsum KF. parallelogrammorum igitur AI KF medium proportionale est EK. est autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN, vt superius ostensum est. parallelogrammumq; AI est æquale quadrato LM,& parallelogrammum KF quadrato NX æquale. ergo & parallelogrammum MN est æquale ipsi EK. sed parallelogrammum quidem EK est æquale parallelogrammo DH, parallelogrammum vero MN ipsi LX, parallelogrammum igitur DX est æquale gnomoni YVQ, quadrato NX. est autẽ & parallelogrãmũ AK quadratis LM NX ęquale. ergo & reliquũ AB est ęquale quadrato ST. at quadratũ ST est id, quod fit ex LN. quadratum igitur ex LN est æquale parallelogrammo AB; ideoq; recta linea LN ipsum AB potest. Dico LN apotomen esse. Quoniam enim rationale est vtrumque parallelogrammorum AI FK,& sunt ęqualia quadratis LM NX, erit & vtrumque LM NX rationale; hoc est vtrumque ipsorum, quæ fiunt ex LO ON;& vtraque igitur LO ON rationalis est. rursus Qm̃ medium est parallelogrammum DH, atque est æquale ipsi LX; erit & LX mediũ. cũ igitur LX quidẽ medium sit, NX vero rationale, incõmensurabile est LX ipsi
10 huius. NX; vtq; LX ad XN, ita est recta linea LO ad ON. ergo LO ipsi ON longitudine est incommensurabilis.& sunt vtręque rationales. quare LO ON rationales sunt potẽ-
74 huius. tia solum commensurabiles.& idcirco apotome est LN; & spacium AB potest. quæ igitur potest spacium AB est apotome. ergo si spacium contineatur rationali,& apotoma prima, recta linea spacium potens apotome est.

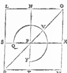
Sit AC 6, AD 7 minus R 13. erit DG R 13, & DE, uel EG R 3 $\frac{1}{4}$. quòd si ad rectam lineã AG applicetur parallelogrammum AFG aequale quadrato ipsius EG, deficiensq; figura quadrata, erit ex demonstratis ad 18 huius AF 6 $\frac{1}{2}$ FG $\frac{1}{2}$. ergo parallelogrammum AI est 39, & FK 3, totumq; AK parallelogrammum 42. parallelogrammum vero DK est R 468, DH, uel EK R 117, EI R 117 minus 3, & FK 3. quare parallelogrammum AB est 42 minus R 468. Huiusmodi autem spacium iuniores etiam apotomen primam, vel residuum primum appellare consueuerunt, cuius latus quadratum, vel radicem inueniemus, quemadmodum ad 55. huius dictum est in spacijs binomialibus, preterquã quòd loco vocis plus, vtemur minus. Diuidatur enim 42 in duas partes ita vt quod ex ipsis producitur, sit aequale quartę parti 468, hoc est 117. erit maior pars 39, minor 3: ideoq; R 39 minus R 3 erit latus quadratum, uel radix huius spacij residui 42 minus R 468.

THEOREMA LXIX. PROPOSITIO. XCIII.

Si spacium contineatur rationali, & apotoma secunda, recta linea spacium potens mediæ est apotome prima.

Spacium enim AB cõtineatur rationali AC, & apotoma secunda AD. Dico rectam lineam, quæ spacium AB potest me diæ apotomen esse primam. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo AG GD rationales sunt potentia solum commensurabiles, & congruẽs DG commensurabilis est expositę rationali AC; totaq; AG plus potest, quàm GD quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. quoniam igitur AG plus potest, quàm GD quadrato rectę lineæ sibi longitudine commensurabilis, si quartæ parti quadrati ipsius GD æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commensurabiles ipsam diuidet. Itaque secetur DG bifariam in E: & quadrato ipsius EG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. ergo commensurabilis est AF ipsi FG longitudine; & per puncta EFG ipsi AC parallelæ ducantur EH FI GK. quoniam igitur AF ipsi FG lõgitudine est commensurabilis, erit AG vtrique ipsarum AF FG commensurabilis longitudine. rationalis autem est AG, & ipsi AC longitudine incommensurabilis. ergo & vtraque AF FG est rationalis, ipsiq; AC incommensurabilis longitudine; & ob id vtrumque parallelogrammorum AI FK medium est. Rursus quoniam DE commensurabilis est ipsi EG, erit & DG vtrique DE EG commẽsurabilis. sed DG commensurabilis est ipsi AC longitudine. ergo & vtraque DE EG rationalis est, & ipsi AC longitudine commensurabilis: ac propterea vtrumque parallelogrammorum DH EK est rationale. constituatur igitur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK ęquale quadratum auferatur NX, communem ipsi angulum habens LOM. ergo circa eandem diametrum sunt quadrata LM NX. sit ipsorum diameter OR, & figura describatur. Cum igitur parallelogramma AI FK media sint, & sibi ipsis commensurabilia, & æqualia quadratis ex LO ON, erunt & quadrata ex LO ON media. ergo rectæ lineę LO ON medię sũt, potentia solum commensurabiles. & quoniam rectangulum AFG est æquale quadrato





a. diff. tertiarum.

18 huius.

16 huius.

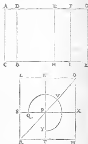
22 huius.

16 huius.

20 huius.

26. sexti.

14.sexti. ... ex EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF: sed vt AF ad EG, ita est parallelogrãmum AC ad ipsum EK. vt autem EG ad GF, ita parallelogrammum EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK mediũ proportionale est EK. est autẽ & quadratorum LM NX medium proportionale MN: et parallelogrammum AI quidẽ est ęquale quadrato LM; parallelogrãmum vero FK æquale quadrato NX. ergo MN ipsi EK est ęquale. sed DH est æquale EK, & LX ipsi MN. totum igitur DK gnomoni YVQ, & quadrato NX ęquale erit. itaq; quoniam totum AK ęquale est quadratis LM NX, quorum DK est æquale gnomoni YVQ, & quadrato NX, erit reliquum AB ęquale quadrato ST, hoc est ei, quod fit ex LN. quadratũ igitur ex LN est ęquale spacio AB; ideoq; recta linea LN spacium AB potest. Dico LN mediæ apotomen esse primam. quoniam enim rationale est EK, & ęquale ipsi MN, hoc est ipsi LX, erit & LX rationale, videlicet quod LO ON continetur. medium autem ostensum est NX. quare LX est incommensurabile ipsi XN: & vt LX ad XN, ita LO ad ON. ergo LO ON longitudine sunt incommensurabiles; ac propterea LO ON mediæ sunt commensurabiles potentia solum, quæ
75.huius rationale continent. quare LN medię apotome prima est, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens medię est apotome prima.



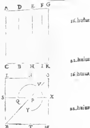
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 4, & AD ℞ 48 minus 6: erit DG 6. & DE, vel EG 3 & si ad AG applicetur parallelogrammum AFG aequale quadrato ipsius EG, deficiensq; figura quadrata: erit AF ℞ 27, FG ℞ 3. & ob id parallelogrammum AI ℞ 432, FK ℞ 48, & totum AK parallelogrãmum ℞ 768, parallelogrammum vero DK 24, DH, vel EK 12, & EI 12 minus ℞ 48. ergo AB est ℞ 768 minus 24, quod spacium etiam apotomen secundam, vel residuum secundum vocat. Vt autem eius latus quadratum, vel radicem inueniamus, diuidetur ℞ 768 in duas partes, ita vt productum ex ipsis sit aequale quartae parti quadrati 24, hoc est aequale 144, erit maior pars ℞ 432, minor ℞ 48. quare ℞℞ 432 minus ℞℞ 48 est latus quadratum, seu radix eius spacij residui ℞ 768 minus 24.

THEOREMA LXX. PROPOSITIO XCIIII.

Si spacium cõtineatur rationali, & apotome tertia, recta linea spacium potens medię est apotome secunda.

Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma tertia AD. Dico rectã lineam, quæ potest spacium AB, mediæ esse apotomen secundam. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo AG GD rationales sunt, potẽtia solum commensurabiles, & neutra ipsarum AG GD longitudinę commensurabilis est expositæ rationali AC, totaq; AG plus potest, quàm congruens DG quadrato rectæ lineæ sibi commensurabiles longitudine. si igitur quartæ parti quadrati ipsius DG ęquale parallelogrãmum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commensurabiles ipsam diuidet. Itaque secetur DG bifariam in E, & quadrato ipsius EG æquale ad
18 huius. AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG: & per puncta EFG ipsi



ipsi AC parallelę ducantur EH FI GK. ergo AF FG commensurabiles sunt: atque ob id parallelogrammũ AI parallelogrammo FK est commensurabile. & quoniam AF FG commensurabiles sunt longitudine, erit & AG vtrique ipsarum AF FG longitudine commensurabilis. est autem rationalis AG, & ipsi AC incommensurabilis longitudine & vtraque igitur AF FG rationalis est, & ipsi AC longitudine incommensurabilis; 16. huius. ac propterea vtrumque parallelogrammorum AI FK est medium. Rursus quoniam DE commensurabilis est ipsi EG longitudine, erit & DG vtrique DE EG cõmensurabilis. sed DG rationalis est, & ipsi AC incõmensurabilis longitudine. rationalis igitur est & vtraque DE EG, & ipsi AC lõgitudine incommensurabilis. ergo vtrumque parallelogrammorũ DH EK medium est. quòd cum AG GD potentia solum commẽsurabiles sint, AG ipsi GD longitudine erit incommẽsurabilis. sed AG commensurabilis est ipsi AF longitudine, & DG ipsi GE. est igitur AF ipsi EG longitudine incommensurabilis. 22. huius. 16 huius. 22. huius. vt autem AF ad EG, ita parallelogrammum AI ad EK parallelogrammum. ergo incõmensurabilis est AI ipsi EK. constituatur ipsi quidem AI æquale quadratum LM; ipsi vero FK ęquale auferatur NX, angulum habens eundem, quem LM. ergo quadrata LM NX circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter OR, & figura describatur. Quoniam igitur rectangulum AFG est æquale quadrato ex EG, erit vt AF ad EG, ita EG ad GF. vt autem AF ad EG, ita parallelogrammum AI ad EK parallelogrammum; & vt EG ad GF, ita EK ad KF. ergo & vt AI ad EK, ita EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK medium proportionale est EK. est autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN; & parallelogrammum AI quidem æquale est quadrato LM; FK vero ipsi NX. ergo & EK est æquale MN. sed MN æquale est LX, & EK ipsi DH. totum igitur DK gnomoni YVQ, & quadrato NX est æquale. est autem & parallelogrammũ AK æquale quadratis LM NX. ergo reliquum AB est æquale ipsi ST, hoc est quadrato ex LN. & ob id recta linea LN ipsum AB spacium potest. Dico LN mediæ apotomen esse secundam. Quoniam enim media ostensa sunt parallelogramma AI FK, & sunt ęqualia quadrãtis ex LO ON, erit & vtrumque quadratorum ex LO ON medium; & idcirco vtraque LO ON media est. & quoniam commensurabile est AI ipsi FK, erit & quadratum ex LO quadrato ex ON commensurabile. Rursus quoniam ostensum est AI incommensurabile ipsi EK, & LM ipsi MN incommensurabile erit, hoc est quadratum ex LO rectangulo LON quare & recta linea LO ipsi ON longitudine est incommensurabilis. sunt igitur LO ON mediæ commensurabiles potentia solum. Dico eas etiam medium continere. Quoniam enim medium demonstratum est FK, atque est rectãgulo LON æquale, erit & LON medium ergo LO ON mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quę medium continent; ac propterea LN mediæ apotome secunda est, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens mediæ apotome est secunda.

Ex demonstratis ad 18 huius. 26 sexti. 14. sexti. Lem ad 23. huius. 76. huius.

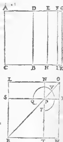
F. C. COMMENTARIVS.

Sit AC 6, & AD R 27 *minus* R 15. *erit DG* R 15, *& DE, vel EG* R $3\frac{3}{4}$. *quòd si ad AG applicetur parallelogrammum aequale quadrato ex EG, deficiensq; figura quadrata, quod sit AF G, erit AF* R $18\frac{3}{4}$, *FG* R $\frac{3}{4}$. *ideoq; parallelogrammum AI est* R 675, *FK* R 27, *& totum AK parallelogrammum* R 972 *parallelogrammum autem DK* R 540, *EK* R 135, *& EI* R 135 *minus* R 27. *est igitur AB* R 972 *minus* R 540 *quod spacium est apotome tertia, vel tertium residuum. Itaque diuidatur* R 972 *in duas partes, ita vt quod ex ipsis producitur sit ęquale*

[illegible] erit maior pars ℞ 675, & minor ℞ 27. ergo ℞℞ 675 minus ℞℞ 27 eſt latus quadratum, vel radix ſpacij illius reſidui ℞ 972 minus ℞ 540.

THEOREMA LXXI. PROPOSITIO XCV.

Si ſpacium contineatur rationali, & apotoma quarta, recta linea ſpacium potens minor eſt.



Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quę ſpacium AB poteſt, minorem eſſe. ſit enim
4 diffi. tertiarum. ipſi AD congruens DG. ergo AG GD rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & AG commenſurabilis eſt expoſitę rationali AC lõgitudine, totaq́; AG plus poteſt, quàm GD, quadrato rectę lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. ſi igitur quartę parti quadrati ex DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, de
26.huius. ficiens figura quadrata, in partes incommenſurabiles ipſam diuidet. Itaque ſecetur DG bifariã in E, & quadrato ex EG æquale ad ipſam AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſit AFG. ergo AF ipſi FG longitudine eſt incommenſurabilis. Ducantur per puncta EFG ipſis AC BD parallelæ EH FI GK. Quoniam igitur AG rationalis eſt, & ipſi AC longitudine commenſura
20. huius. bilis, erit totum parallelogrammum AK rationale. Rurſus quoniam incommenſurabilis eſt DG ipſi AC longitudine, & ſunt vtræque rationales,
22.huius. erit parallelogrammnm DK medium. quòd cum AF ipſi FG longitudine ſit incommenſurabilis, erit & parallelogrammnm AI incommenſurabile parallelogrammo FK. conſtituatur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum LM; parallelogrammo autem FK ęquale quadratum NX auferatur, angulum habens eundem,
26 sexti. quem LM, videlicet LOM. quadrata igitur LM NX circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter OR, & figura deſcribatur. itaque quoniã rectangulum AFG
14.sexti eſt ęquale quadrato ex EG, vt AF ad EG, ita erit EG ad GF. ſed vt AF quidem ad EG, ita eſt parallelogrammum AI ad ipſum EK vt autem EG ad GF, ita EK ad KF. parallelogrammorum igitur AI FK medium proportionale eſt EK. eſt autem & quadratorum LM NX medium proportionale MN. atque eſt parallelogrammum AI æquale quadrato LM, & parallelogrammum FK æquale NX. ergo & EK æquale eſt MN. ſed EK quidem eſt æquale parallelogrammo DH, MN vero ipſi LX. totum igitur DK parallelogrammum gnomoni YVQ, & quadrato NX eſt æquale. & quoniam totum AK æquale eſt quadratis LM NX, quorum DK eſt æquale gnomoni YVQ. & NX quadrato; erit reliquum AB æquale quadrato ST, hoc eſt quadrato ex LN. ergo LN ſpacium AB poteſt. Dico LN irrationalem eſſe, quę minor appellatur. Quoniam enim parallelogrammum AK rationale eſt, & æquale quadratis ipſorum LO ON, erit & compoſitum ex quadratis LO ON rationale. Rurſus quoniam parallelogrammum DK medium eſt, atque eſt æquale ei, quod bis continetur LO ON erit & quod LO ON cõtinetur mediũ. oſtenſũ aũt eſt parallelogrãmũ AI incõmẽſurabile ipſi FK. ergo & quadratũ ex LO incõmenſurabile eſt quadrato ex ON, ac propterea LO ON potentia ſunt incommenſurabiles, quę faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ipſis continetur medium. quare
77 huius. LN irrationalis eſt, quæ minor appellatur, & poteſt ſpacium AB. recta igitur linea ſpacium AB potens minor eſt.

Sit AC 6. AD 7 minus R 14. erit DG R 14, & DE, vel EG R 3 $\frac{1}{2}$. Si vero ad AG applicetur parallelogrammum AFG equale quadrato ipsius EG, deficiensq; figura quadrata, erit AF 3 $\frac{1}{2}$ plus R 8 $\frac{3}{4}$: FG 3 $\frac{1}{2}$ minus R 8 $\frac{3}{4}$, & parallelogrammum AI est R 21 plus R 315, FK 21 minus R 315, & totum AK 42. parallelogrammum vero DK est R 504, CK R 126. & AB 42 minus R 504. quod spacium est apotome quarta, vel residuum quartum. si igitur 42 dividatur in duas partes, ita ut productum ex ipsis sit equale quartae parti R 504, hoc est R 126, erit maior pars 21 plus R 126, & minor 21 minus R 126. ergo R V. 21 plus R 126 minus R V. minus R 126 est latus quadratum, seu radix spacij residui 42 minus R 504.

THEOREMA LXXII. PROPOSITIO. XCVI.

Si spacium contineatur rationali, & apotoma quinta, recta linea spacium potens est, quæ cum rationali medium totum efficit.



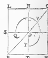
Spacium enim AB contineatur rationali AC, & apotoma quinta AD. Dico rectā lineam, quæ spacium AB potest, esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo AG GD rationales sunt potentia solum cōmensurabiles; & congruens DG longitudine commensurabilis est expositę rationali AC; totaq; AG plus potest, quàm GD quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. si igitur quartæ parti quadrati ex DG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommensurabiles ipsam diuidet. 19.huius. Itaque secetur DG bifariam in puncto E, & quadrato ex EG æquale ad ipsam AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. ergo AF incommensurabilis est ipsi FG longitudine. Ducantur per puncta EFG ipsi AC parallelę EH FI GK. & quoniam AG incommensurabilis est ipsi AC lōgitudine, & sunt vtręque rationales; erit parallelogrammum AK medium. 22.huius. Rursus quoniam rationalis est DG, & ipsi AC longitudine commensurabilis; parallelogrammum DK rationale erit. 20.huius. Constituatur igitur parallelogrammo quidem AI ęquale quadratum LM; ipsi vero FK ęquale quadratum auferatur NX, angulum habens eundem; quem LM, videlicet LOM. 26.huius. ergo quadrata LM NX circa eandem sunt diametrum. sit diameter ipsorum OR, & figura describatur. Similiter ostēdemus rectam lineam LN spacium AB posse. Dico LN esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit. Quoniam enim ostendimus parallelogrammum AK medium esse; atque est æquale quadratis ipsarum LO ON: erit & compositum ex quadratis LO ON medium. Rursus quoniam DK rationale est, & æquale ei, quod bis continetur LO ON, erit & quod bis LO ON continetur rationale. est autem AI incommensurabile ipsi FK. incommensurabile igitur est quadratum ex LO quadrato ex NO; ideoque LO ON potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsorum quadratis medium; quod autem ipsis bis continetur rationale. ergo reliqua LN irrationalis est, quæ vocatur cum rationali medium totum efficiens, & potest spacium AB. recta igitur linea spacium AB potens est, quæ cum rationali medium totum efficit.

Sit AC 6, AD R 56 minus 4, erit DG 4, & DE, vel EG 2. quòd si ad AG applicetur parallelogrammum AFG aequale quadrato ex C G, deficiensq́; figura quadrata, erit AF R 14 plus R 10; FG R 14 minus R 10. & parallelogrammum A I est R 504 plus R 360, F K R 504 minus R 360: totumq́; AK R 2016. At vero DK est 24, EK 12, & AB R 2016 minus 24. quod spacium est apotome quinta, vel residuum quintum. Diuidatur R 2016 in duas partes, ita vt productum ex ipsis sit aequale 144, erit maior pars R 504 plus R 360, & minor R 504 minus R 360. quare R V. R 504 plus R 360 minus R V. R 504 minus R 360 est latus quadratum dicti spacij residui R 2016 minus 24.

THEOREMA LXXIII. PROPOSITIO XCVII.

Si spacium contineatur rationali, & apotoma sexta, recta linea spacium potens est, quæ cum medio medium totum efficit.



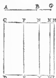


Spacium enim AB contineatur rationali A C, & apotoma sexta AD. Dico rectam lineam, quę spacium A B potest, esse eam, quæ cum medio medium totum efficit. sit enim ipsi AD congruens DG. ergo A G G D rationales (6 diffin. tertiarum.) sunt potentia solum commensurabiles; & neutra ipsarum commensurabilis est expositę rationali A C longitudine. totaq́; AG plus potest, quàm congruens DG quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incōmensurabilis. si igitur quartæ parti quadrati ex DG ęquale ad rectam lineam AG applicetur, deficiens figura quadrata, in partes incommensurabiles ipsam diuidet. (19. huius.) Itaque secetur DG bifariam in E, & quadrato ex CG æquale parallelogrammum ad AG applicetur, deficiens figura quadrata, quod sit AFG. incommensurabilis igitur est AF ipsi FG longitudine. ut autem AF ad FG, ita est parallelogrammum AI ad ipsum FK. ergo AI ipsi FK est incommensurabile. (10 huius: 21. huius) & quoniam AG AC rationales sunt potentia solum commensurabiles, erit parallelogrammum AK medium. sunt autem AG DG rationales, & incommensurabiles longitudine. medium igitur est & DK. quòd cum AG GD potentia solum commensurabiles sint, erit A G ipsi GD longitudine incommensurabilis. sed ut AG ad GD, ita est AK ad KD. incommensurabile igitur est AK ipsi KD. (10. huius:) itaque constituatur parallelogrammo AI ęquale quadratum LM; parallelogrammo autem F K æquale auferatur quadratum N X, angulum habens eundem, quem LM. (14. sexti.) ergo quadrata LM NX circa eādem sunt diametrum. sit eorum diameter OR, & figura describatur. similiter vt supra, ostendemus rectam lineam LN spacium AB posse. Dico LN esse eam, quæ cum medio medium totum efficit. Quonā enim medium ostensum est A K, atque est æquale quadratis ipsarum LO ON, erit & compositum ex quadratis LO ON medium. Rursus quoniam medium ostensum est D K, & est ęquale ei, quod bis continetur LO ON; & quod bis LO ON continetur medium erit. Incommensurabile autem ostensum est A K ipsi K D. ergo & quadrata ex LO ON incommensurabilia sunt ei, quod bis LO ON continetur. & quoniam incommensurabile est AI ipsi FK, erit & quadratum ex LO quadrato ex ON incommensurabile. ergo LO ON potentia solum commensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum medium, quod autem ipsis bis continetur medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. (79. huius.) ergo LN irrationalis est, quæ vocatur, cum medio medium totum efficiens, & potest AB spacium. recta igitur linea spacium A B potens est, quæ cum medio medium totum efficit.

Sit AC 6, AD R 32 minus R 20. erit DG R 20, & DE vel EG R 5. si autem ad AG applicetur parallelogrammum AFG, aequale quadrato ex EC, & deficiens figura quadrata, erit AF R 8 plus R 3, FG R 8 minus R 3: & idcirco parallelogrammum AI R 288 plus R 108, FK R 288 minus R 108, & totum parallelogrammum AK R 1152. parallelogrammum vero DK est R 720, DH R 18, & AB R 1152 minus R 720. quod spacium est apotome sexta, vel sextis residuum, & eius latus quadratum, vel radix inuenietur esse R V. R 288 plus R 108 minus R V. 288 minus R 108.

THEOREMA LXXIIII. PROPOSITIO. XCVIII.

Quadratum apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.



Sit apotome AB, rationalis autem CD, & quadrato ex AB ęquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudinē faciens CF. Dico CF apotomen esse primam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB rationales sunt potentia solum cōmensurabiles: & quadrato quidē ex AG æquale ad ipsam CD applicetur CH: quadrato autem ex BG ęquale applicetur KL. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum parallelogrammum CE æquale est quadrato ex AB. ergo reliquum FL ei, quod bis AG GB continetur est æquale. secetur FM bifariam in N: & per N ipsi CD parallela ducatur NX: vtrumque igitur ipsorum FX LN est ęquale ei, quod AG GB continetur. & quoniam quadrata ex AG GB rationalia sunt, atque est quadratis ex AG GB ęquale parallelogrammum DM; erit ipsum DM rationale; & ad rationalē CD applicatum est, latitudinē faciens CM. ergo CM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis longitudine. Rursus quoniam medium est, quod bis continetur AG GB, estq; ei, quod bis AG GB continetur, æquale parallelogrammum LF; erit ipsum LF medium: & applicatum est ad rationalem CD, latitudinem faciens FM. quare FM est rationalis, ipsiq; CD longitudine incommensurabilis. & sunt quadrata quidem ex AG GB rationalia: quod autem bis continetur AG GB medium. quadrata igitur ex AG GB incommēsurabilia sunt ei, quod bis AG GB continetur. sed quadratis ex AG GB ęquale est parallelogrammum CL. ei vero, quod bis continetur AG GB est ęquale FL. ergo CL ipsi LF est incommensurabile. vt autem CL ad LF, ita est recta linea CM ad MF. incommēsurabilis igitur est CM ipsi MF longitudine: & sunt vtræque rationales. ergo CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea CF est apotome. Dico & primam esse. Quoniam enim quadratorum ex AG GB medium proportionale est quod AG GB continetur; atque est quadrato quidem ex AG ęquale parallelogrāmum CH; ei vero, quod AG GB continetur æquale NL, & quadrato ex GB ęquale KF. erit ipsorum CH KL medium proportionale NL. vt igitur CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH ad NL, ita est recta linea CK ad ipsam NM. vt autem NL ad LK, ita recta linea NM ad MK. ergo vt CK ad NM, ita est NM ad MK. & ob id rectangulum CKM, est æquale ei, quod fit ex MN quadrato, hoc est quartę parti quadrati ex FM. & quoniam quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex GB, erit & parallelogrammum CH parallelogrammo KL commensurabile. sed vt CH ad KL ita est recta linea CK ad ipsam KM. commensurabilis igitur est CK ipsi KM. itaque cum duæ rectæ lineę inęquales sint CM MF, & quartę parti quadrati ex FM ęquale parallelogramum ad ipsam CM applicatum sit, deficiens figura quadrata, quod

scilicet

74. huius.
7. secundi.
21. huius.
23. huius.
1. sexti.
74 huius.
Lem ad 55. huius.
11 quinti.
17 sexti.

18 huius. scilicet CK KM continetur; sitq; CK commensurabilis ipsi KM: recta linea CM plus poterit, quam MF quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis. atque est
1 diffi. tertia rum. CM commensurabilis longitudine expositæ rationali CD. ergo CF est prima apotome. quadratum igitur apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ℞ 33 minus R 3, BG ℞ 3. rationalis autem CD sit 6; & si ad ipsam CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, quod est 33, latitudinem faciens CK, erit CK 5 $\frac{1}{2}$. & si ad eandem applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod est 3, latitudinem faciens KM, erit KM $\frac{1}{2}$, & tota CM 6. Rursus si ad eandem CD applicetur parallelogrammum FX, quod est ℞ 99, latitudinem faciens FN, erit FN R 2 $\frac{1}{4}$, & eadem ratione NM est R 2 $\frac{1}{4}$, & tota FM R 11. ergo CF est 6 minus R 11, quę est apotome prima.

THEOREMA LXXV. PROPOSITIO. XCIX.

Quadratum medię apotomæ primę ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.



Sit apotome mediæ prima AB; rationalis autē CD: & quadrato ex AB æquale parallelogrammū CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomē esse secundam. sit enim ip-
75. huius. si AB congruens BG. ergo AG GB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ rationale continent & quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH ad CD applicetur, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB ęquale KL ad eandem applicetur, latitudinem faciens KM. totum igitur CL est ęquale quadratis ex AG GB medijs existētibus. quare & CL est medium; & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem
23. huius. faciens CM. rationalis igitur est CM, & ipsi CD longitudine incommensurabilis, itaque quoniam CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum quadratum ex AB ęquale est parallelogrammo CE; erit reliquum, quod bis continetur AG GB æqua-
9 secundi, le ipsi FL. est autem rationale, quod bis AG GB continetur. rationale igitur est &
21. huius. FL; & ad rationalem FE applicatum est, latitudinem faciens FM. quare FM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis longitudine. & quoniam quadrata quidem ex AG GB, hoc est parallelogrammum CL medium est; quod autem bis continetur A
1. sexti. G GB, videlicet FL est rationale: erit CL incommēsurabile ipsi LF. vt autem CL ad
10. huius. LF, ita recta linea CM ad MF. ergo CM ipsi MF longitudine est incōmensurabilis. & suntvtræque rationales. sunt igitur CM MF rationales potentia solum commensu-
74. huius. rabiles. ideoq; CF apotome est. Dico & secundam esse. secetur enim FM bifariam in puncto N. & per N ipsi CD parallela ducatur NX. vtrumque igitur parallelogrammorum FX NL est ęquale ei, quod continetur AG GB. & quoniam quadratorum
em ad 55. huius. ex AG GB medium proportionale est, quod AG GB continetur; estq; quadratū ex AG æquale parallelogrammo CH; quod autem continetur AG GB æquale parallelogrammo NL; & quadratum ex GB æquale ipsi KL: erit parallelogrammorū CH KL medium proportionale NL. est igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. Sed vt C
11 quinti. H ad NL, ita est recta linea CK ad ipsam NM; & vt NL ad LK, ita NM ad MK. ergo vt
17. sexti. CK ad NM, ita est NM ad MK, ac propterea rectāgulum CKM est æquale quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. & quoniam quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex CB, erit & CH parallelogrammum parallelogrammo KL commensurabile, hoc est recta linea CK commensurabilis ipsi KM, quòd cum duæ

duę rectæ lineę inæquales sint CM MF, quartæ autem parti quadrati ex MF æquale parallelogrammum CKM ad maiorem CM applicatum sit, deficiens figura quadrata, & in partes commensurabiles ipsam diuidit: recta linea CM plus poterit, quàm MF quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. atque est congruens FM expositę rationali CD commensurabilis. quare CF est apotome secunda. quadratum igitur mediæ apotomę primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam. 18 huius. 2. Diff. tertiarum.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonstratis perspicuum fit, vt apotomę quadratū inueniamus, nos vti septima propositione 2 libri, non autem quarta, vt ad 34 huius dictum est.

Sit AB RR 972 *minus* RR 108, *BG* RR 108, *rationalis autem CD sit 6. & si ad ipsam CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, quod est* R 972, *latitudinem faciens CK, erit CK* R 27: *& si ad eādem applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod est* R 108 *latitudinem faciens KM; erit KM* R 3. *& tota CM* R 48. *Rursus si ad CD applicetur parallelogrammum FX aequale rectangulo AGB, quod est 18, latitudinem faciens FN; erit FN 3, itemq; NM 3, & tota FM 6. ergo CF est* R 48 *minus 6, quae est apotome secunda.*

THEOREMA LXXVI. PROPOSITIO C.

Quadratum mediæ secundæ apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.



Sit medię apotome secunda AB; rationalis autem CD & quadrato ex AB ęquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciēs CF. Dico CF apotomen esse tertiam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ medium continent: & quadrato quidem ex AG æquale ad CD applicetur CH, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB ęquale ad KH applicetur KL, latitudinem faciens KM. totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB. & sunt quadrata ex AG GB media. ergo & CL est medium, & ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens CM. ergo CM est rationalis, & ipsi CD incommensurabilis longitudine. & quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE ęquale est quadrato ex AB, erit reliquum FL æquale ei, quod bis continetur AG GB. secetur FM bifariam in N, & per N ipsi CD parallela ducatur NX. Vtrumque igitur parallelogrammorum FX NL est æquale ei, quod AG GB continetur. est autem quod continetur AG GB medium. ergo & medium est FL, & ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens FM. quare & FM est rationalis; & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & quoniam AG GB potentia solum commensurabiles sunt, erit AG ipsi GB incommensurabilis longitudine. ideoq; quadratum ex AG rectangulo AGB est incommensurabile. sed quadrato quidem ex AG commensurabilia sunt ex AG GB quadrata; rectangulo autem AGB commensurabile est quod bis AG GB continetur. ergo quadrata ex AG GB ei, quod bis AG GB continetur, sunt incommensurabilia. at quadratis ex AG GB æquale est parallelogrammum CL, ei vero, quod bis continetur AG GB est ęquale FL. incommensurabile igitur est CL ipsi LF. Vt autem CL ad LF, ita est recta linea CM ad MF. ergo CM ipsi MF incommensurabilis est longitudine; & sunt vtręque rationales. quare CM MF rationales sunt potentia solum commensurabilis. & ob id apotome est CF. Dico & tertiam esse. Quoniam enim quadratum ex AG commensurabile est quadrato ex GB, erit

76. huius. 23 huius. 7 secundi. 23 huius. Lem ad 23 huius. Ex demonstratione 24 huius. 1 sexti. 10 huius. 74 huius.



erit parallelogrammum CH parallelogrammo KL commensurabile. ergo & recta linea CK est cõmensurabilis ip
Lem. ad 55. huius. si KM & quoniam quadratorum ex AG GB mediũ proportionale est rectangulũ AGB; atque est quadrato quidem ex AG ęquale parallelogrammum CH; quadrato autem ex GB æquale KL, & rectangulo AGB æquale NL: erit parallelogrammorum CH KL medium proportionale NL. est igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK. sed vt CH
1. sexti. ad NL, ita est recta linea CK ad NM: vt autem NL ad LK,
11 quinti. ita NM ad MK. ergo & vt CK ad NM, ita NM ad MK; ac
17. sexti. propterea rectangulum CKM est æquale quadrato ex N M, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. Quoniam igitur duæ rectę lineæ inæquales sunt CM MF; & quartæ parti quadrati ex FM æquale ad CM applicatum est, deficiens
18. huius. figura quadrata, quod in partes cõmensurabiles ipsam diuidit: recta linea CM plus poterit, quam MF quadrato rectę lineę sibi longitudine commensurabilis. & neutra
3. diffin. tertiarum. ipsarum CM MF longitudine commensurabilis est expositæ rationali CD. ergo CF tertia est apotome. quadratum igitur mediæ apotomæ secundę ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen tertiam.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB RR 882 *minus* RR 18, *BG* RR 18, *& rationalis CD sit 6. quòd si ad CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK, erit CK* R $24\frac{1}{2}$. *& si applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod latitudinem faciat KM, erit KM* R $\frac{1}{2}$, *& tota CM* R 32. *pręterea si ad eandem CD applicetur FX aequale rectangulo AGB, quod est* R 126, *latitudinem faciens FN, erit FN* R $3\frac{1}{2}$; *& tota FM* R 14. *ergo CF est* R 32 *minus* R 14, *quae est apotome tertia.*

THEOREMA LXXVII. PROPOSITIO CI.

Quadratum minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.



Sit minor AB, rationalis autem CD: & quadrato ex AB æquale paralllelogrãmum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esse quartam. sit enim ipsi AB congruẽs BG.
77. huius. ergo AG GB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum AG GB quadratis rationale; quod autem bis ipsis continetur medium: & quadrato ex AG æquale ad CD applicetur CH, latitudinem faciens CK quadrato autem ex GB æquale ad KH applicetur KL, latitudinẽ faciens KM. totum igitur CL quadratis ex AG GB est æquale. atque est compositum ex quadratis AG GB rationale. ergo & rationale est CL, & ad rationa
21 huius. lem CD applicatum est, latitudinem faciẽs CM. quare CM est rationalis, & ipsi CD longitudine commensurabilis. & quoniam totum CL est ęquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex AB: erit
7. secundi. reliquum FL ęquale ei, quod bis AG GB cõtinetur. Itaque secetur FM bifariam in N; & per N alterutri ipsarum CD ML parallela ducatur NX. vtrumque igitur parallelogrammorum FX NL est ęquale ei, quod continetur AG GB. & quoniam quod bis continetur AG GB medium est, & æquale parallelogrammo LF. erit & LF me-

dium.

dium.& ad rationalem FE applicatum est, latitudinem faciens FM.ergo FM est ra- 23 huius.
tionalis,& ipsi CD longitudine incommensurabilis.& quoniam compositũ ex qua-
dratis ipsarum AG GB est rationale;quod autem bis AG GB continetur mediũ:
erunt quadrata ex AG GB ei, quod bis continetur AG GB incommensurabilia.
quadratis autem ex AG GB æquale est parallelogrammum CL;& ei quod bis AG
GB continetur est ęquale FL.incommensurabile igitur est CL ipsi LF. sed vt CL ad
LF,ita est CM ad MF.quare CM ipsi MF longitudine est incommensurabilis:& sunt 1.sexti.
vtræque rationales.ergo CM MF rationales sunt potentia solum commensurabi- 10.huius.
les.& eam ob caussam apotome est CF.Dico & quartam esse. Quoniam enim AG 74 huius.
GB potentia sunt incommensurabiles, erit quadratum ex AG incommensurabile
quadrato ex GB. & quadrato quidem ex AG æquale est parallelogrammum CH;
quadrato autem ex GB est æquale KL.incommensurabile igitur est CH ipsi KL.sed
vt CH ad KL,ita est CK ad KM.ergo CK ipsi KM est incommensurabilis longitudi- 1 sexti.
ne.& quoniam quadratorum ex AG GB medium proportionale est AGB rectan- 10 huius.
gulum;atque est quadrato quidem ex AG æquale parallelogrammum CH;quadra Lem. ad 55.
to autem ex GB æquale KL; & rectangulo AGB ęquale NL: erit NL medium pro- huius.
portionale parallelogrammorum CH KL. est igitur vt CH ad NL, ita NL ad LK.
sed vt CH ad NL,ita CK ad MN,& vt NL ad LK,ita NM ad MK.ergo vt CK ad MN 1.sexti.
ita NM ad MK; ac propterea rectangulum CKM est æquale quadrato ex NM, hoc 11 quinti.
est quartę parti quadrati ex FM. Itaque quoniam duę rectæ lineæ inæquales sunt C 17.sexti.
M MF;& quartæ parti quadrati ex FM ęquale ad CM applicatum est,deficiens figu
ra quadrata,quod est CKM,& in partes incommensurabiles ipsam diuidit: recta li- 19 huius.
nea CM plus poterit,quàm MF quadrato rectę lineę sibi incommẽsurabilis longitu
dine.& est tota CM longitudine commensurabilis expositę rationali CD. ergo CF 4 Diffi-
quarta est apotome. quadratum igitur minoris ad rationalem applicatum latitu- nitiones.
dinem facit apotomen quartam.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R V.21 plus R 315; minus R V.21 plus R 315; BG R V.21 minus R 315: rationalis autem CD sit 6. & si ad CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK, erit CK $3\frac{1}{2}$ plus R $8\frac{3}{4}$. & si applicetur KL aequale quadrato ex GB, quod latitudinem faciat KM, erit KM $3\frac{1}{2}$ minus R $8\frac{3}{4}$: & tota CM 7. Quòd si ad eandem CD applicetur FX aequale rectangulo AGB, videlicet R 126, latitudinem faciens FN, erit FN R $3\frac{1}{2}$; & tota FM R 14. est igitur CF 7 minus R 14, quae est apotome quarta.

THEOREMA LXXVIII. PROPOSITIO CII.

Quadratum eius,quę cum rationali mediũ totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.



Sit quę cum rationali medium totum efficit AB,rationalis autem CD;& quadrato ex AB æquale ad CD applicetur parallelogrammum CE, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esse quintam. sit enim ipsi AB congruens BG.ergo AG GB rectæ lineæ potentia sunt incõmensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex quadratis ipsarum medium,quod autem bis ipsis continetur rationale. & quadrato ex AG æquale parallelogrammũ CH ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CK: quadrato autem ex GB ęquale applicetur KL latitudinẽ faciens KM.totum igitur CL est æquale quadratis ex AG GB. sed compositum ex quadratis ipsarum AG GB est medium.ergo & medium est parallelogrammum CL; & 78.huius.

ad rationalem CD applicatum est, latitudinem faciens
23. huius CM. quare CM est rationalis, & ipsi CD longitudine incommensurabilis. & quoniam totum CL est æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale est quadrato ex A
7 secundi. B, erit reliquum FL æquale ei, quod bis AG GB continetur. Itaque secetur FM bifariam in puncto N, & ab ipso N alterutri ipsarum CD ML parallela ducatur NX. vtrumque igitur FX NL est æquale ei; quod AG GB continetur. & quoniam quod bis continetur AG GB rationale est, & æquale parallelogrammo FL; erit & FL rationale, & ad rationalem EF applicatum est, latitudinem faciens F
21. huius. M. ergo FM est rationalis, & ipsi CD commensurabilis lõgitudine. est autem parallelogrammum CL medium, &
1. sexti. FL rationale. incommensurabile igitur est CL ipsi LF. & vt CL ad LF, ita CM ad M
10. huius. F. ergo CM ipsi MF longitudine est incommensurabilis. & sunt vtræque rationales.
74. huius. quare CM MF rationales sunt potentia solum commensurabiles; ob idque apotome est CF. Dico & quintam esse. similiter enim demonstrabimus rectangulum CK M esse æquale quadrato ex NM, hoc est quartæ parti quadrati ex FM. quòd cum quadratum ex AG incommensurabile sit quadrato ex GB; sitq; quadratum ex AG parallelogrammo CH æquale; quadratum autem ex GB parallelogrammo KL: erit C H ipsi KL incommensurabile. sed vt CH ad KL, ita CK ad KM. ergo CK ipsi KM lon-
1. sexti. gitudine est incommensurabilis. Quoniam igitur duæ rectæ lineæ CM MF inæ-
10. huius. quales sunt: & quartæ parti quadrati ex FM æquale ad ipsam CM applicatum est, deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles ipsam diuidit; recta linea C
19. huius. M plus poterit, quàm MF quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommẽsurabilis. atque est congruens FM commensurabilis longitudine expositæ rationali CD. ergo
5 diffi. tertiarum. CF quinta apotome est. quadratum igitur eius, quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.



F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB ℞ *V.* ℞ *288 plus* ℞ *207 minus* R *V. 288 minus* ℞ *207. EG* ℞ *V.* ℞ *288 minus* ℞ *207: rationalis autem CD sit 6. quòd si ad CD applicetur parallelogrammum CH aequale quadrato ex AG, latitudinem faciens CK; erit CK* ℞ *8 plus* ℞ *5 $\frac{3}{4}$. & si applicetur KL aequale quadrato ex GB, latitudinẽ faciens KM erit KM* R *8 minus* R *5 $\frac{3}{4}$, & tota CM* R *32. Rursus si ad eandem CD applicetur FX aequale rectangulo AGB, latitudinem faciens FN; erit FN 1 $\frac{1}{2}$, & tota FM 3. quare CF est* R *32 minus 3, quae est apotome quinta.*

THEOREMA LXXIX. PROPOSITIO CIII.

Quadratum eius, quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

Sit quę cum medio medium totum efficit AB; rationalis autem CD: & quadrato ex AB æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur, latitudinem faciens CF. Dico CF apotomen esse sextam. sit enim ipsi AB congruens BG. ergo AG GB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium: quod autem bis ipsis AG GB continetur medium, & adhuc quadratis ipsarum incommensurabile. Itaq; ad CD applicetur quadrato ex AG æquale parallelogrãmũ CH, latitudinem faciens



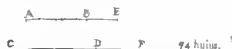
CK quadrato aũt ex BG ęquale applicetur KL, latitudinem faciens KM. totũ igitur CL eſt ęquale quadratis ex AG GB. ac propterea CL eſt mediũ, & ad rationalẽ CD applicatum eſt, latitudinem faciens CM. ergo CM rationalis eſt, & ipſi CD longitudine incommenſurabilis. Quoniam igitur CL eſt æquale quadratis ex AG GB, quorum CE æquale eſt quadrato ex AB; erit reliquum FL æquale ei, quod bis AG GB continetur. atque eſt quod bis cõtinetur AG GB medium. ergo & FL eſt medium, & ad rationalem FE applicatum eſt, latitudinem faciens FM. eſt igitur FM rationalis, & ipſi CD longitudine incommenſurabilis. & quoniam quadrata ex AG GB incommenſurabilia ſunt ei, quod bis AG GB continetur; atque eſt quadratis quidem AG GB ęquale parallelogrammum CL; ei vero, quod bis continetur AG GB æquale FL: erit CL ipſi LF incommenſurabile. ſed vt CL ad LF, ita eſt CM ad MF. quare CM ipſi MF incommenſurabilis eſt longitudine: & ſunt vtręque rationales. ergo CM MF rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & ob id CF eſt apotome. Dico & ſextam eſſe. Quoniã enim FL eſt ęquale ei, quod bis continetur AG GB, ſecetur FM bifariã in puncto N; & per N ipſi CD parallela ducatur NX. vtrũq; igitur parallelogrammorum FX NL eſt æquale rectangulo AGB. & quoniam AG GB potentia ſunt incommenſurabiles; erit quadratum ex AG incommenſurabile quadrato ex BG. ſed quadrato quidem ex AG eſt æquale parallelogrammum CH; quadrato autem ex BG æquale KL. ergo CH ipſi KL eſt incommenſurabile. vt autem CH ad KL, ita eſt CK ad KM. incommenſurabilis igitur eſt CK ipſi KM. quòd cum quadratorum ex AG GB medium proportionale ſit rectangulum AGB, ſitq; quadrato ex AG æquale CH, & quadrato ex GB æquale KL; rectanguloq; AGB æquale NL: erit, & parallelogrammorum CH KL medium proportionale NK. & eadem ratione CM plus poterit, quàm MF quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: & neutra ipſarum eſt commenſurabilis lõgitudine expoſitę rationali CD. ergo CF ſexta eſt apotome. quadratum igitur eius, quę cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſextam.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit AB R *V.* R 396 *plus* R 288 *minus* R *V.* R 396 *minus* R 288; *BG* R *V.* R 396 *minus* R 288; *& rationalis CD ſit* 6. *ſi vero ad CD applicetur parallelogrammum CH, latitudinem faciens CK; erit CK* R 11 *plus* R 8, *& ſi applicetur KL aequale quadrato ex GB, latitudinem faciens KM; erit KM* R 11 *minus* R 8, *& tota CM* R 44. *Rurſus ſi ad CD applicetur FX ęquale rectangulo AGB, quod latitudinem faciat FN, erit ea* R 3, *& tota FM* R 12. *ergo CF eſt* R 44 *minus* R 12, *quae eſt apotome ſexta.*

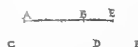
THEOREMA LXXX. PROPOSITIO. CIIII.

Recta linea apotomę longitudine cõmenſurabilis, & ipſa apotome eſt, atque ordine eadem.



Sit apotome AB; et ipſi AB longitudine cõmenſurabilis ſit CD. Dico CD apotomen eſſe, atque ordine eandem, quæ AB. quoniam enim apotome eſt AB, ſit ipſi congruens BE. ergo AE EB rationales ſunt potentia ſolum commẽ- 74 huius.
ſurabiles. & fiat proportio BE ad DF eadem, quę eſt AB ad CD. quare vt vna ad 12. quinti
vnam, ita erunt omnes ad omnes. eſt igitur vt AB ad CD, ita AE ad CF. commen-
ſurabilis autem eſt AB ipſi CD longitudine. ergo & AE ipſi CF longitudine com- 10 huius
menſurabilis erit, & BE ipſi DF. ſunt autem AE EB rationales potentia ſolum cõ- A
menſurabiles. ergo & EF FD rationales erunt potentia ſolum commẽſurabiles: ac B
propterea CD apotome eſt. Dico & ordine eandem eſſe. Quoniam enim eſt vt AE 74 huius.
ad CF, ita BE ad FD, erit permutãdo vt AE ad EB, ita CF ad FD. vel igitur AE plus

 poteſt,



poteſt, quàm EB quadrato rectę lineę ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: & ſiquidem commenſusabilis, & C F plus poterit, quàm FD quadrato rectæ lineę ſibi lõgitudine cõmenſutabilis: & ſi quidem AE commenſurabilis eſt longitudine expoſitę rationali; & CF expoſitæ rationali lõgitudine commenſurabilis erit. ſi vero EB eſt cõmenſurabilis, & DF cõmenſurabilis erit: & ſi neutra ipſarũ AE EB cõmenſurabilis eſt expoſitæ rationali longitudine, & neutra ipſarũ CF FD eidẽ longitudine erit cõmenſurabilis. quod ſi AE plus poſſit, quã EB quadrato rectę lineæ ſibi incõmenſurabilis longitudine; & CF plus poterit, quã FD quadrato rectę lineę ſibi lõgitudine incõmenſurabilis: & ſiquidem AE ſit cõmenſurabilis expoſitæ rationali lõgitudine, & CF eidẽ longitudine cõmenſurabilis erit. ſi uero BE, & DF: & ſi neutta ipſarũ AE EB, & neutra ipſarũ CF FD erit expoſitæ rationali lõgitudine cõmẽſurabilis. ergo CD apotome eſt, & ordine eadẽ, quę AB.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et BE ipſi DF.] *Quoniam enim eſt vt AE ad CF, ita AB ad CD, erit & reliqua BE ad DF, vt AE ad CF, hoc eſt ut AB ad CD. commenſurabilis igitur eſt & BE ipſi DF longitudine.*

10. huius

B Ergo & CF FD rationales erunt potentia ſolum commenſurabiles] *Nam cum ſit ut AE ad CF, ita BE ad DF, erit permutãdo vt AE ad EB, ita CF ad FD: ſuntq́; AE EB rationales potentia ſolũ cõmenſurabiles. ergo & CF FD rationales potentia ſolũ cõmenſurabiles erũt.*

10. huius.

THEOREMA LXXXI. PROPOSITIO. CV.

Recta linea mediæ apotomæ commenſurabilis, & ipſa mediæ apotome eſt, atque ordine eadem.



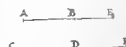
Sit mediæ apotome AB, & ipſi AB lõgitudine commenſurabilis ſit CD. Dico CD mediæ apotomen eſſe, & ordine eandem. Quoniam enim mediæ apotome eſt AB, ſit BE ipſi AB congruens. ergo AE EB medię ſunt potentia ſolum commenſurabiles: & fiat vt AB ad CD, ita BE ad DF. ſunt autem AE EB mediæ potentia ſolum commenſurabiles. ergo & CF FD mediæ potẽtia ſolũ cõmẽſurabiles erũt; ac propterea mediæ apotome eſt CD. oſtendendum eſt & ordine eandem eſſe, quę AB. Quoniam enim vt AE ad EB, ita CF ad FD; vt autem AE ad EB, ita quadratum ex AE ad rectangulum AEB; & vt CF ad FD, ita quadratum ex CF ad CFD rectangulum: erit & vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD. ſed quadratum ex AE cõmẽſurabile eſt quadrato ex CF. rectangulum igitur AEB rectangulo CFD eſt commenſurabile. & ſi quidem rationale eſt rectangulum AEB, & rectangulum CFD rationale erit. ſi vero rectangulum AEB medium eſt, & medium erit rectangulum CFD. mediæ igitur apotome eſt CD, atque ordine eadem, quæ AB.

75. 76. huius

Lem ad 25. huius.

THEOREMA LXXXII. PROPOSITIO. CVI.

Recta linea minori commenſurabilis, & ipſa minor eſt.



Sit minor AB, & ipſi AB commenſurabilis ſit CD. Dico & CD minorem eſſe. fiant enim eadem quæ prius & quoniam AE EB potentia ſunt incõmenſurabiles, & CF FD potentia incõmẽſurabiles erũt. eſt aũt vt AE ad EB, ita CF ad FD. quare & vt quadratũ ex AE ad quadratũ ex EB, ita quadratũ ex CF ad

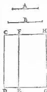
77. huius.

22 sexti.

quadratum

quadratum ex FD: & componendo, vt quadrata ex AE EB ad quadratum ex ED ita quadrata ex CF FD ad quadratum ex FD; & permutando. commensurabile autem est quadratum ex BE quadrato ex DF. ergo & compositum ex quadratis ipsarum AE EB composito ex quadratis CF FD commensurabile erit. sed compositũ ex quadratis AE EB est rationale. ergo & rationale erit compositum ex quadratis CF FD. Rursus quoniam est vt quadratum ex AE ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad rectangulum CFD, & permutando; commensurabile autem est quadratum ex AE quadrato ex CF erit & rectangulum AEB rectangulo CFD commensurabile. sed rectangulum AEB medium est. medium igitur & rectangulum CFD. quare CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale: quod autem ipsis continetur medium. ergo C D est minor. 77. huius

ALITER. Sit minor A, & ipsi A commensurabilis sit B. Dico B minorem esse. Exponatur enim CD rationalis: & quadrato ex A æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudinem faciens CE, apotome igitur quarta est CF. quadrato autem ex B æquale ad FE applicetur FG, latitudinem faciens FH. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato quidem ex A æquale est parallelogrammum CE, quadrato autem ex B æquale FG. ergo CE commensurabile est ipsi FG. vt autem CE ad FG, ita CF ad FH. commensurabilis igitur est CF ipsi FH longitudine. sed CF est apotome quarta. ergo & FH apotome quarta est; et spacium FG rationali, et apotoma quarta continetur. recta igitur linea spacium potens minor est. potest autem spacium FG ipsa B. ergo B est minor. 101 huius. 104 huius. 95 huius.



THEOREMA LXXXIII. PROPOSITIO CVII.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum rationali medium totum efficit, & ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

Sit cum rationali medium totum efficiens AB: et ipsi AB commensurabilis sit CD. Dico CD esse eam, quę cum rationali medium totum efficit. sit enim ipsi AB congruens BE. ergo AE EB potentia incommensurabiles sunt, facientes cõpositum quidem ex ipsarumquadratis medium; quod autem ipsis continetur rationale. et eadem construantur. similiter demonstrabitur, vt prius CF FD in eadem esse proportione, in qua AE EB: et compositum ex quadratis ipsarum AE EB commensurabile esse composito ex quadratis CF FD: rectangulum autem AEB rectangulo CFD commensurabile. quare et CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis CF FD, medium; quod autem ipsis continetur, rationale. ergo CD est quæ cum rationali medium totum efficit. 78 huius. 78 huius

A B E
C D F

ALITER. Sit cum rationali medium totum efficiẽ A, et ipsi A commensurabilis B. Dico B esse eam, quę cũ rationali medium totum efficit. Exponatur enim rationalis CD: et quadrato quidem ex A æquale parallelogrammum CE ad ipsam CD applicetur latitudinem faciens CF. ergo CF est apotome quinta: quadrato aũt ex B ęquale 102 huius.



FG ad

ipsam FE applicetur, latitudinem faciens FH. Quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato ex A æquale est parallelogrammum CE, quadrato autem ex B æquale FG. ergo CE est commensurabile ipsi FG; ob idque recta linea CF ipsi FH longitudine est commensurabilis. apotome autem quinta est CF. ergo & FH est apotome quinta; estque FE rationalis. si autem spacium contineatur rationali, & apotoma quinta, recta linea spacium potens est, quæ cum rationali medium totum efficit. sed ipsa B potest spacium FG. ergo B cum rationali medium totum efficiens est.

104 huius

96. huius.



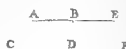
THEOREMA LXXXIIII.
PROPOSITIO CVIII.

Recta linea commensurabilis ei, quæ cum medio medium totum efficit, & ipsa cum medio medium totum efficiens est.

Sit cum medio medium totum efficiens AB: & ipsi AB commensurabilis sit CD. Dico CD esse eã, quę cum medio medium totum efficit. sit ipsi AB congruẽs BE, & eadem cõstruantur. ergo AE EB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum medium; quod autem ipsis continetur medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis. & sunt AE EB commensurabiles ipsis CF FD, vt ostensum est: & compositum ex quadratis AE EB commensurabile composito ex quadratis CF FD: rectangulumque AEB rectangulo CFD. ergo CF FD potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum medium; quod autem ipsis continetur medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. ergo CD est quę cum medio medium totum efficit.

79 huius.

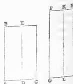
79. huius.



THEOREMA LXXXV. PROPOSITIO CIX.

Medio de rationali detracto, recta linea, quæ reliquum spacium potest, vna ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.

De rationali enim BC medium BD detrahatur. Dico eam, quæ reliquum spacium EC potest, vnam fieri ex duabus irrationalibus, vel apotomẽ vel minorem. Exponatur enim rationalis FG: & parallelogrammo quidem BC æquale GH ad FG applicetur; parallelogrammo autem BD æquale auferatur GK. reliquum igitur CF est æquale LH. Itaque quoniam rationale est BC, medium autem BD; atque est BC æquale GH, & BD ipsi GK; erit GH rationale; medium autem GK, & ad rationalem FG applicatum est. rationalis igitur est FH, & ipsi FG longitudine commensurabilis FK vero rationalis, & incommensurabilis ipsi FG longitudine. ergo FH ipsi FK longitudine incommensurabilis est, & HF FK rationales sunt, potentia solum commensurabiles; ac propterea HK est apotome. ipsi vero congruens



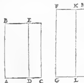
huius.
23 huius.

13 huius.
74 huius.

congruens KF. vel igitur HF plus potest, quàm FK quadrato rectę lineę sibi commen-
surabilis longitudine, vel incommensurabilis. possit primum quadrato rectæ lineæ
commensurabilis. atque est tota HF commensurabilis longitudine expositę ratio-
nali FG. ergo HK prima est apotome. recta autem linea, quæ potest spacium ratio- 1 tertiarum.
nali, & apotoma prima contentum est apotome. Ergo quæ potest LH hoc est CE diffin.
apotome est. quòd si HF plus possit, quàm FK quadrato rectę lineæ sibi incommen 92. huius.
surabilis longitudine; estq; tota HF expositæ rationali FG longitudine commensu-
rabilis; erit HK apotome quarta. & quę potest spacium rationali, & apotoma quar- 4 diffin ter-
ta contentum minor est. quæ igitur potest spacium LH, videlicet EC est minor. tiarum.
95 huius.

THEOREMA LXXXVI. PROPOSITIO CX.

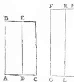
Rationali de medio detracto alię duę irrationales fiunt, vel medię apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.



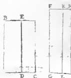
De medio enim BC rationale BD detra-
hatur. Dico rectā lineā, quæ reliquū spaciū
EC potest, vnā duarum irrationalium fieri
vel medię apotomen primam, vel eam, quę
cum rationali medium totum efficit. Expo-
natur enim rationalis FG, & ad ipsam simili
ter spacia applicentur; erit rationalis quidē 13 huius
FH, & ipsi FG longitudine incommensurabi 21 huius
lis; rationalis autem FK, & incommensurabi-
lis ipsi FG longitudine. ergo HF FK rationa
les sunt potentia solum commensurabiles; ac
propterea apotome est HK, & ipsi congruēs 74 huius
KF. vel igitur HF plus potest, quàm FK qua-
drato rectæ lineæ sibi longitudine commen-
surabilis, vel incommensurabilis. & si quidē
commensurabilis; atque est congruens FK commensurabilis expositæ rationalis F
G longitudine: erit HK apotome secunda. est autem FG rationalis. ergo quæ potest 2 diffi. tertia
spacium LH, hoc est CE, mediæ est apotome prima. quòd si HF plus potest, quàm rum.
FK quadrato rectæ lineę sibi longitudine incommensurabilis; atque est congruens 93 huius.
FK commensurabilis expositę rationali FG longitudine: erit HK apotome quinta. 5 diffi tertia
recta igitur linea potens spacium EC est quæ cum rationali medium totum efficit. rum.
99 huius.

THEOREMA LXXXVII. PROPOSITIO. CXI.

Medio de medio detracto, quod sit incommensurabile toti, reliquę duæ irrationales fiunt, vel medię apotome secunda, vel cum medio medium totum efficiens.



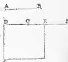
Detrahatur enim, vt in propositis figuris de me-
dio BC medium BD, quod sit incommensurabile to
ti. Dico rectam lineam, quæ potest spacium CE, vnā
esse ex duabus irrationalibus, vel medię apotomen
secundam, vel eam, quæ cum medio medium totum
efficit. Quoniam enim medium est vtrumque ipsorū
BC BD, & BC incommensurabile est ipsi BD, hoc
est GH ipsi GK; erit HF ipsi FK incommensurabilis
longitudine. ergo HF FK rationales sunt potentia 23 huius.
solum commensurabiles; & ob id apotome est HK, & ipsi congruens KF. itaque vel 74 huius.
HF plus



HF plus potest, quàm FK quadrato rectæ lineę sibi
longitudine commensurabilis, vel incommensurabi
lis: & si quidem commensurabilis, & neutra ipsarum
HF FK commensurabilis est expositæ rationali FG
3 diffi. tertiarum longitudine; erit HK apotome tertia. rationalis au-
tem est KL: & rectangulum rationali, & apotoma ter
94. huius. tia contẽtum irrationale est. ergo recta linea, quę ip-
sum potest, est irrationalis, & vocatur medię apoto-
me secunda. si vero HF plus potest, quàm FK quadra
to rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine,
& neutra ipsarum HF FK longitudine commensu-
6 diffi. tertium. rabilis est expositæ rationali FG; erit HK apotome
sexta. at recta linea potens quod rationali, & apoto-
97 huius. ma sexta cõtinetur est quæ cum medio medium totum efficit. ergo quæ potest spa-
cium LH, hoc est EC est cum medio medium totum efficiens.

THEOREMA LXXXVIII. PROPOSITIO. CXII.

Apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus.



Sit apotome AB. Dico AB non esse eandem,
quæ ex binis nominibus. sit enim, si fieri potest; ex
ponaturque rationalis DC, & quadrato ex AB æ-
quale rectangulum CE ad ipsam DC applicetur
latitudinem faciens DE. Quoniam igitur apoto-
98 huius. me est AB, erit DE apotome prima. sit ipsis con-
gruens EF. ergo DF FE rationales sunt potentia
1. diffi. tertiarum. solum commẽsurabiles: & DF plus potest, quàm
FE quadrato rectæ lineę sibi longitudine com-
mẽsurabilis: atq; est DF cõmẽsurabilis expositę ra
tionali CD lõgitudine. Rursus qm̃ ex binis nomi-
61. huius nibus est AB, erit DE ex binis nominibus prima. Diuidatur in nomina ad pũctũ G;
37 huius. sitq; DG maius nomẽ. ergo DG GE rationales sunt, potẽtia solũ cõmẽsurabiles: &
DG plus põt, quã GE quadrato rectæ lineæ sibi cõmẽsurabilis lõgitudine: & maior
12. huius DG longitudine commensurabilis est expositę rationali DC. quare DF ipsi DG
Ex demonstratis ad 17 huius. longitudine est commensurabilis. & reliquę igitur FG commensurabilis erit. Itaq;
quoniam DF commensurabilis est ipsi FG, atque est rationalis DF; erit & FG ratio-
nalis. Rursus quoniam DF commensurabilis est ipsi FG longitudine, atque est DF
ipsi FE incommensurabilis longitudine, erit & FG ipsi FE longitudine incommen-
surabilis: & sunt rationales. ergo GF FE rationales sunt potentia solum commensu
74 huius. rabiles; ac propterea apotome est EG. sed & rationalis. quod fieri non potest. ergo
apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus.

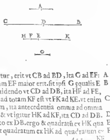
Apotome, & quę post ipsam sunt irrationales, neque medię, neque inter se eædẽ
23 huius. sunt: quadratum enim, quod à media fit, ad rationalem applicatum, latitudinem fa
cit rationalem, & ei, ad quam applicatur, longitudine incommensurabilem. quod
98 huius. autem ab apotoma fit ad rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen pri-
mam quod fit à mediæ apotoma prima ad rationalem applicatum latitudinem fa-
99 huius. cit apotomen secundam. quod fit à mediæ apotoma secunda ad rationalem appli-
100 huius. catum latitudinem facit apotomen tertiam. quod fit à minori ad rationalem appli
101. huius. catum latitudinem facit apotomen quartam. quod ab ea, quæ cum rationali mediũ
102. huius. totũ efficit ad rationalẽ applicatũ latitudinẽ facit apotomẽ quintã quod ab ea, quæ
103. huius cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apo
tomen sextam. Quoniam igitur dictę latitudines differunt tum à prima, tum inter
se se, a prima quidem, quòd rationalis sit, inter se vero, quod ordine non sint eædẽ;
manifestum est & ipsa irrationales inter se differentes esse. & ostensum est apotomẽ
non

non esse eandem, quæ ex binis nominibus. quadrata autem apotomæ & ea. sunt post apotomen ad rationalem applicata latitudines faciunt apotomas eiusde ordinis, cuius & illæ sunt, quarum quadrata applicantur. Similiter & quadrata eius, quæ est ex binis nominibus, & earum, quæ post ipsam sunt ad rationalem applicata latitudines faciunt eas, quæ ex binis nominibus eiusdem ordinis, cuius & illę sunt. ergo rectę lineæ, quæ sequuntur apotomen, & quæ sequuntur eam, quæ ex binis nominibus, inter se differunt, ita vt omnes sint numero tredecim, videlicet.

1 Media.
2 Quæ ex binis nominibus
3 Quę ex binis medijs prima
4 Quæ ex binis medijs secunda
5 Maior
6 Rationale ac medium potens
7 Bina media potens
8 Apotome
9 Mediæ apotome prima.
10 Mediæ apotome secunda.
11 Minor.
12 Cum rationali medium totum efficiens.
13 Cum medio medium totum efficiens.

THEOREMA LXXXIX. PROPOSITIO. CXIII.

Quadratum rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.



Sit rationalis A; ea, quę est ex binis nominibus BC, cuius maius nomen CD: & quadrato ex A æquale rectangulum sit quod B C EF continetur. Dico EF apotomen esse, cuius nomina commensurabilia sunt ipsis CD DB, & in eadem proportione, & adhuc EF eundem ordinem habere, quam habet BC. Sit enim rursus quadrato ex A æquale rectangulum, quod BD & G continetur. Itaque quoniam rectangulum contentum BC EF est ęquale ei, quod BD G continetur, erit vt CB ad BD, ita G ad EF: A
maior autem est CB, quàm BD. ergo & G quàm EF maior erit. sit ipsi G ęqualis E B
H. est igitur vt CB ad BD, ita HE ad EF. & diuidendo vt CD ad DB, ita HF ad FE,
fiat vt HF ad FE, ita FK ad KE. ergo & tota HK ad totam KF est vt FK ad KE. vt enim C
vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia
consequentia. sed vt FK ad KE, ita CD ad DB. & vt igitur HK ad KF, ita CD ad DB. D
cōmēsurabile aūt est quadratū ex CD quadrato ex DB. ergo & quadratū ex HK qua E
drato ex KF est commensurabile. atque est vt quadratum ex HK ad quadratum ex F

 KF

[r]ecta linea HK ad KE, quoniam tres rectæ lineæ HK KF KE deinceps proportionales sunt. commensurabilis igitur est HK ipsi
G KE longitudine. ergo & HE ipsi EK longitudine est commensurabilis. & quoniã quadratum ex A est æquale ei, quod HE BD continetur; rationale autem est quadratum ex A: erit & quod HE BD continetur rationale: & ad rationalem BD applicatum est.
21. huius rationalis igitur est HE, & ipsi BD longitudine commensurabilis; ideoq; & EK, quæ est incommensurabilis ipsi HE rationalis erit, & ipsi BD commensurabilis longitudine. Quoniam igitur est vt CD ad DB, ita FK ad KE; sunt autẽ CD DB potentia solum cõmensurabiles: & FK KE potentia solum commensurabiles erunt. rationalis autem est KE, & ipsi BD commensurabi-
H lis longitudine. quare & FK est rationalis, ipsiq; CD longitudine commensurabilis. sunt igitur FK KE rationales, & potentia solum commensurabiles: & idcirco EF apotome est. itaque vel CD plus potest, quàm DB quadrato rectæ lineę sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. & si quidem commensurabilis,
14. huius. etiam FK plus poterit, quàm KE quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. & si CD commensurabilis est expositæ rationali longitudine, & FK eidem commensurabilis erit: si autem BD, & KE. & si neutra ipsarum CD DB, & neutra ipsarum FK KE. Quòd si CD plus potest, quàm DB quadrato rectæ lineę sibi incommensurabilis longitudine, & FK plus poterit, quàm KE quadrato rectæ lineæ sibi lõgitudine incommensurabilis. & si BD, & KE. at si neutra ipsarum CD DB, & neutra ipsarum FK KE. ergo EF apotome est, cuius nomina FK KE commensurabilia sunt nominibus CD DB eius, quę est ex binis nominibus, & in eadem proportione, & eundem habet ordinem, quem CB.

F. C. COMMENTARIVS.

A Erit vt CB ad BD, ita G ad EF] *Ex 14 sexti.*

B Ergo & G, quàm EF maior erit] *Ex iis, quae à nobis demonstrata sunt ad 16 quinti.*

C Ergo & tota HK ad totam KF est vt FK ad KE] *Ex 12 quinti.*

D Commensurabile autem est quadratum ex CD quadrato ex DB] *Ex 37 huius, ponitur enim CB ea, quae ex binis nominibus.*

E Ergo et quadratum ex HK quadrato ex KF est commensurabile] *Ex 22 sexti, & decima huius.*

F Atque est vt quadratum ex HK ad quadratum ex KF, ita recta linea HK ad KE] *Ex corollario secundo 20 sexti.*

G Ergo & HE ipsi EK longitudine est commensurabilis] *Ex 16. huius.*

H Quare & FK est rationalis, ipsique CD longitudine commensurabilis] *Quoniam igitur est vt CD ad DB, ita FK ad KE, erit permutando vt KE ad DB, ita FK ad CD. sed KE est longitudine commensurabilis ipsi BD. ergo & FK ipsi CD commensurabilis erit longitudine. quòd cum FK KE potentia commensurabiles sint, sitq; rationalis KE, erit & FK rationalis, & ipsi CD longitudine commensurabilis.*

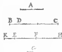
K Et idcirco EF apotome est] *Ex 74 huius.*

Sit A 2, CB R 12 plus 3, vt CD sit R 12, DB 3. & si quadratum ex A, quod est 4, applicetur ad DB latitudinẽ faciẽs G, erit G 1 $\frac{1}{3}$, cui equalis sit HE. fiat vt CB ad BD, ita HE, ad EF videlicet vt R 12 plus 3 ad 3, ita 1 $\frac{1}{3}$ ad aliũ. multiplicabimus igitur 3 per 1 $\frac{1}{3}$ producetur 4, & 4 diuidemus per R 12 plus 3, hoc est applicabimus 4 ad R 12 plus 3. quod quidẽ hoc modo fiet. multiplicetur R 12 plus 3 per apotomen ipsi respondentem, hoc est per R 12 minus 3. producetur 3. rursus multiplicetur 4 per eandem R 12 minus 3. producitur R 192 minus 12. quare ex 17 septimi 3 ad R 192 minus 12 proportionem habebit eandem, quam R 12 plus 3 ad 4. & ob id R 192 minus 12 ad 3 applicata latitudinem faciet eandem, qua 4, si applicetur ad R 12 plus 3. sed

3. sed R 192 minus 12 applicata ad 3 latitudinem facit R 21 $\frac{1}{3}$ minus 4. quadratum [illegible] a-tionalis 2, videlicet 4 ad eam, quae est ex binis nominibus secunda, hoc est ad R 12 plus 3 applicatum latitudinem facit R 21 $\frac{1}{3}$ minus 4, quae est secunda apotome, cuius nomina commensurabilia sunt ipsis nominibus CD DB, & in eadem proportione.

PROBLEMA XC. PROPOSITIO CXIIII.

Quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinem facit eam, quę ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, & in eadem proportione, & adhuc quæ ex binis nominibus fit eundem habet ordinem, quæ ipsa apotome.



Sit rationalis quidem A, apotome autem B D: & quadrato ex A æquale sit quod BD KH continetur, ita vt quadratum rationalis A ad BD applicatum latitudinem faciat KH. Dico KH ex binis nominibus esse, cuius nomina commẽsurabilia sunt nominibus ipsius BD, & in eadem proportione: & KH eundem habere ordinem, quem habet B D. sit enim ipsi BD
congruens DC. ergo BC CD rationales sunt poten- 94. huius.
tia solum commensurabiles: & quadrato ex A ęquale sit, quod BC, & G continetur. rationale autem est quadratum ex A. ergo quod BC G continetur est rationale; & ad rationalem BC
applicatum est. rationalis igitur est recta linea G, ipsiq; BC longitudine commen- 21. huius.
surabilis. itaque quoniam rectangulum contentum BC G est æquale ei, quod BD
KH continetur, erit vt CB ad BD, ita KH ad G. maior autem est CB, quam BD. er- 14. sexti.
go & KH, quàm G est maior. ponatur ipsi G ęqualis KE. commẽsurabilis igitur est Ex demonstratis ad 16.
KE ipsi BC longitudine. & quoniam est vt CB ad BD, ita HK ad KE, erit per cõuer- quinti.
sionem rationis vt BC ad CD, ita KH ad HE. fiat ut KH ad HE, ita HF ad FE. & re- 19. quinti.
liqua igitur KF ad FH est ut KH ad HE, hoc est vt BC ad CD. sed BC CD potentia solum sunt commensurabiles. ergo & KF FH potentia solum cõmensurabiles erũt.
& cum sit vt KH ad HE, ita KF ad FH: vt autem KH ad HE, ita HF ad FE, erit & ut 11. quinti.
KF ad FH, ita HF ad FE. quare & vt prima ad tertiam, ita quadratum ex prima ad Corr. 2. 20.
quadratum ex secunda. vt igitur KF ad FE, ita quadratum ex KF ad id, quod ex FH sexti.
quadratum. commensurabile autem est quadratum ex KF quadrato ex FH; sunt enim KF FH potentia solum commensurabiles. ergo & KF ipsi FE commensurabilis est longitudine: ac propterea FK ipsi KE longitudine commensurabilis. sed KE rationalis est, & ipsi B C longitudine commensurabilis. ergo & K F rationalis erit, & commensurabilis ipsi BC longitudine. & quoniã est vt BC ad CD, ita KF ad FH, erit permutando vt BC ad KF, ita DC ad FH. commensurabilis autem est B C ipsi KF. quare & CD ipsi FH est commensurabilis: suntq; B C C D rationales potentia solum commensurabiles. ergo & KF FH rationales potentia solum commensurabiles erunt. ex binis igitur nominibus est KH. & si quidem B C plus potest, quam CD quadrato rectę lineæ sibi lõgitudine commensurabilis, & KF plus poterit, quàm FH quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. & si BC longitudine commensurabilis est expositę rationali, & KF eidem commensurabilis erit. si vero CD est commensurabilis longitudine expositę rationali, erit & ipsa FH eidem commẽsurabilis; & si neutra ipsarum BC CD, & neutra ipsarum KF FH. at si BC plus potest, quàm CD quadrato rectę lineę sibi longitudine incommensurabilis, & KF plus poterit, quàm FH quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. & siquidem BC longitudine commensurabilis est expositę rationali, & KF eidem commensurabilis erit. si vero CD, & ipsa FH. quòd si neutra ipsarum BC CD, & neu-

[illegible]ipsarum KF FH. ex binis igitur nominibus est KH, cuius nomina KF FH commensurabilia sunt nominibus apotomæ BC CD; & in eadem proportione; & KH eundem tenet ordinem, quem ipsa BC.

F. C. COMMENTARIVS.

Sit A 2, ED ℞ 18 minus R 10. *& multiplicetur* R 18 *minus* ℞ 10 *per eam, quę ex binis nominibus ipsi respondet, videlicet per* R 18 *plus* R 10 *producitur* 8, *rursus multiplicetur ipsius A rationalis quadratum, quod est 4 per eandem, producitur* R 288 *plus* ℞ 160. *habebit igitur 8 ad* ℞ 288 *plus* ℞ 160 *proportionem eandem, quam* ℞ 18 *minus* ℞ 10 *ad 4 ex 17 septimi. quare si* ℞ 288 *plus* R 160 *applicetur ad 8 latitudinem faciet* ℞ 4 $\frac{1}{2}$ *plus* ℞ 2 $\frac{1}{2}$, *& eandem latitudinem faciet 4, si ad* R 18 *minus* ℞ 10 *applicetur. quadratum igitur rationalis 4 applicatum ad tertiam apotomen, videlicet ad* ℞ 18 *minus* R 10 *latitudinem facit eam, quae est ex binis nominibus tertia, hoc est* ℞ 4 $\frac{1}{2}$ *plus* R 2 $\frac{1}{2}$ *cuius nomina commensurabilia sunt apotomae nominibus, & in eadem proportione.*

THEOREMA XCI. PROPOSITIO. CXV.

Si ſpacium cõtinetur apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſint nominibus apotomę, & in eadem proportione; recta linea ſpacium potens eſt rationalis.



Spacium enim contineatur AB CD, videlicet apotoma AB, & CD, quę ſit ex binis nominibus, cuius maius nomen CE: & ſint nomina eius, quæ ex binis nominibus CE ED commenſurabilia nominibus apotomæ AF FB: & in eadẽ proportione; ſitq́; recta linea G potens ſpacium contentum AB CD. Dico ipſam G rationalem eſſe. exponatur enim rationalis H: & quadrato ex H æquale ad ipſam CD applicetur, latitudinem faciens KL. apotome igitur eſt KL, cuius nomina KM ML commenſurabilia ſint nominibus eius, quę eſt ex binis nominibus CE ED, & in aedem proportione. ſed CE ED commenſurabiles ſunt ipſis AF FB, atque in eadem proportione. eſt igitur vt AF ad FB, ita KM ad ML. & permutando vt AF ad KM, ita FB ad LM. quare & reliqua AB ad reliquam KL eſt vt AF ad KM. commenſurabilis autem eſt AF ipſi KM. ergo & AB ipſi KL eſt cõmenſurabilis. eſtq́; vt AB ad KL, ita rectangulum contentum CD AB ad id, quod continetur CD KL. commenſurabile igitur eſt rectangulum contentum CD AB rectangulo, quod CD KL continetur. ſed rectangulum contentum CD KL eſt ęquale quadrato ex H. ergo rectangulum, quod continetur CD AB quadrato ex H eſt commenſurabile. rectangulum autem, quod continetur CD AB eſt æquale quadrato ex G. ergo quadratũ ex G commenſurabile eſt quadrato ex H. atque eſt quadratum ex H rationale. rationale igitur eſt quadratum ex G; & idcirco ipſa G eſt rationalis; & poteſt quod CD AB continetur. Si igitur ſpacium contineatur apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſint nominibus apotomæ, & in eadẽ proportione, recta linea ſpacium potens eſt rationalis.

(Margin notes: 113. huius. — 19 quinti. — 10. huius. — 2. sexti.)

C O R O L L A R I V M.

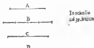
Ex iis manifeſto conſtat fieri poſſe, vt ſpaciũ rationale irrationalibus rectis lineis contineatur.

Sit apotome AB R 21 $\frac{1}{3}$ minus 4. ea vero, quae ex binis nominibus CD sit 12 plus 3. & multiplicetur R 21 $\frac{1}{3}$ minus 4 plus R 12 plus 3. fit R 256, quae est 16 minus 12, hoc est 4, quod est rationale, & eius radix 2 rationalis.

THEOREMA XCII. PROPOSITIO. CXVI.

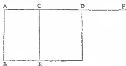
A media infinitæ irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

Sit media A. Dico ex ipsa A infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem esse. exponatur enim rationalis B. & rectangulo contento A B æquale sit quadratum ex C. irrationalis igitur est ipsa C nam quod rationali, & irrationali continetur irrationale est, & nulli earum, quę prius est eadem: non enim quadratum alicuius antecedentium ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rursus rectãgulo, quod BC continetur, æquale sit quadratum ex D. irrationale igitur est, quod fit ex D: & idcirco ipsa D est irrationalis, & nulli antecedentium eadem. neque enim quadratum alicuius earum, quæ prius sunt ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipsam C. Similiter & eodem ordine infinite protracto, manifestum est à media infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem esse.



In scholio ad 39. huius

ALITER. Sit media AC. Dico ex ipsa AC infinitas irrationales fieri, & nullam alicui priorum eandẽ esse. ducatur ipsi AC ad rectos angulos AB: sitque AB rationalis, & BC compleatur. irrationale igitur est BC, & quæ ipsum potest est irrationalis. possit autẽ ipsum recta linea CD. ergo CD irrationalis est, & nulli priorum eadem. non enim quadratum alicuius priorum ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rursus compleatur ED; erit ED irrationale; & recta linea ipsum potens irrationalis. possit ipsum recta linea DF. ergo DF irrationalis est, & nulli priorum eadem. nullius enim priorum quadratum, si ad rationalem applicetur, latitudinem efficit ipsam CD. ergo à media infinitę irrationales fiunt, & nulla alicui priorum est eadem.



THEOREMA XCIII. PROPOSITIO CXVII.

Propositum sit nobis ostendere in quadratis figuris diametrũ lateri incommensurabilem esse longitudine.

Sit quadratum ABCD, cuius diameter AC. Dico AC ipsi AB longitudine incõmensurabilem esse. si enim fieri potest, sit commensurabilis. Dico ex hoc sequi eundem numerum parem esse, & imparem. itaque manifestum est quadratum ex AC duplum esse quadrati ex AB. & quoniam AC commensurabilis est ipsi AB, habebit AC ad AB proportionem eam, quam habet numerus ad numerũ. habeat, quam

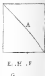
A
B

EF ad

... : sintq; EF, G numeri minimi eorum, qui eandem habent proportionem. non igitur vnitas est EF. si enim est vnitas,& habet ad G proportionem eam,quam AC ad AB; estq; AC maior, quàm AB: & EF vnitas, quàm G numerus maior erit.quod est absurdum.ergo EF non est vnitas. quare
C numerus sit necesse est. & quoniam vt AC ad AB, ita est EF ad G, erit & vt quadratum ex AC ad quadratum ex A B,ita quadratus ex EF ad eum,qui fit ex G quadratum. duplum autem est quadratum ex CA quadrati ex AB, ergo & quadratus ex EF quadrati ex G est duplus: ac propterea quadratus ex EF par est, & ipse EF par. si enim esset
D impars,& qui fit ab ipso quadratus impar esset, quoniam si impares numeri quomodocumque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar; & totus impar erit. ergo EF est par. secetur bifariam in H.& quoniam numeri EF G minimi sunt eorum, qui eandem habent proportio
E nem, inter se primi sunt: & est EF par. impar igitur est G: si enim esset par, numerus EF G binarius metiretur; omnis enim par dimidiam partem habet. atqui primi inter se sunt. quod fieri non potest. non igitur G est impar. ergo par. & quoniam FE
F duplus est ipsius EH, erit quadratus ex FE quadrati ex EH quadruplus. est autem
G quadratus ex EF duplus quadrati ex G. duplus igitur est quadratus ex G quadrati
H ex EH. ideoq; par est qui fit ex G quadratus. & ex iam dictis ipse G est par, sed & im
K par. quod fieri non potest. non igitur AC commensurabilis est ipsi AB longitudine. ergo est incommensurabilis.



ALITER. Sed & aliter ostendendum est incommensurabile esse quadrati diametrum ipsius lateri. sit enim pro diametro quidem A, pro latere autem B. Dico A ipsi B longitudine incommensurabilem esse. si enim fieri potest, sit commensurabilis. & rursus fiat vt A ad B, ita EF numerus ad ipsum G: sintq; minimi eorum, qui eandem habent pro-
24. septimi portionem. ergo EF G primi inter se sunt. Dico primum, G non esse vnitatem. si enim fieri potest, sit G vnitas. & quoniam est vt A ad B, ita EF ad G, erit & vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum: duplum autem est quadratum ex A quadrati ex B. ergo & quadratus ex EF quadrati ex G est duplus: atq; est G vnitas. binarius igitur est quadratus ex EF. quod fieri non potest. ergo G non est vnitas. numerus igitur. & quoniam est vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ita quadratus ex EF ad quadratum ex G. & conuertendo vt quadratum ex B ad quadratum ex A, ita quadratus ex G ad quadratum ex EF. sed quadratum ex B metitur quadratum ex A. ergo & qui fit ex G quadratus meti
L tur eum, qui fit ex EF; & propterea latus G ipsum EF latus metitur. metitur autem & se ipsum. ergo G numeros EF G metitur, primos inter se existentes. quod fieri minime potest. non igitur A ipsi B longitudine est commensurabilis. quare incommensurabilis sit necesse est.



Itaque inuentis longitudine incommensurabilibus rectis lineis, vt AB, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines ex duabus dimensionibus. nimirum superficies incommensurabiles inter se. si enim ipsarum AB mediam proportionalem
M sumamus rectam lineam C, erit vt A ad B, ita figura, quæ fit ex A ad eam, quæ ex C similem, & similiter descriptam, siue quadrata, si
N ue alia rectilinea similia, siue circuli, qui circa diametros AC describantur. quando quidem circuli inter se sunt, vt diametrorum quadrata. Inuenta igitur sunt spacia plana inter se incommensurabilia. ostensis autem his ostendemus etiam ex solidorum



rum contemplatione ipsa solida esse commensurabilia, & incommensurabilia inter
se se. nam si in quadratis ex AB, vel in rectilineis, quæ ipsis æqualia sint solida æque O
alta constituamus, siue parallelepipeda, siue pyramides, siue prismata, erunt ea
inter se, vti bases. & si quidem bases commensurabiles sint, erunt solida commensu-
rabilia; si vero incommensurabiles, & ipsa incommensurabilia erunt. sed & duobus P
circulis existentibus AB, si in ipsis conos ęque altos, siue Cylindros constituamus,
erunt inter se, vti ipsorum bases, hoc est vt AB circuli, & si quidem circuli commen
surabiles sint, cõmensurabiles erunt & coni inter se se, & Cylindri; si vero incommẽ
surabiles, & coni, & Cylindri incommensurabiles erunt. ex quibus perspicuum est
non solum in lineis, & superficiebus esse commensurabilitatem, & incommensurabi
litatem, sed & in solidis figuris.

F. C. COMMENTARIVS.

Manifestum est quadratum ex AC duplum esse quadrati ex AB] *Ex 47 primi.* A

Habebit AC ad AB proportionem eam, quam numerus habet ad numerum] *Ex 5. huius.* B

Et quoniam vt AC ad AB, ita est EF ad G; erit & vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum] *Quoniam enim est vt AC ad AB, ita EF ad G, erit et vt proportio AC ad AB duplicata, ita proportio EF ad G duplicata. sed vt proportio quidem AC ad AB duplicata, ita est quadratum ex AC ad quadratum ex AB ex corollario secundo 20. sexti; vt autem proportio EF ad G duplicata, ita est quadratum ex EF ad quadratum, ex G ex 11 octaui. ergo ex 11 quinti vt quadratum ex AC ad quadratum ex AB, ita erit quadratus ex EF ad eum, qui fit ex G quadratum.* C

Quoniam si impares numeri quomodocunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar, & totum impar erit] *Ex 23 noni. sequitur enim hoc ex 29 eiusdem.* D

Inter se primi sunt] *Ex 24 septimi.* E

Erit quadratus ex FE quadrati ex EH quadruplus] *Ex 11. octaui.* F

Duplus igitur est quadratus ex G quadrati ex EH] *Proportio enim quadrati ex FE ad quadratum ex EH, interiecto quadrato ex G, composita est ex proportione quadrati ex FE ad quadratum ex G, & proportione quadrati ex G ad quadratum ex EH. sed proportio quadrati ex FE ad quadratum ex EH est quadrupla: proportio autem quadrati ex FE ad quadratũ ex G est dupla. ergo & proportio quadrati ex G ad quadratum ex EH dupla erit.* G

Ideoq; par est, qui fit ex G quadratus] *Quoniam enim quadratus ex G duplus est quadrati ex EH, partem habet dimidiam, quare par necessario erit.* H

Et ex iam dictis ipse G est par] *Si enim sit impar, & quadratus ex ipso impar est ex 29 noni. sed & par. quod fieri non potest.* K

Et propterea latus G ipsum EF latus metitur] *Ex 14 octaui,* L

Erit vt A ad B, ita figura, quę fit ex A ad eam, quæ ex C similem, & similiter descriptam] *Ex corollario secundo vigesimae sexti.* M

Quandoquidem circuli inter se sunt, vt diametrorum quadrata] *Ostenditur id in secunda propositione duodecimi libri. vnde colligi potest hac siue sint Euclidis, siue alterius alieno loco posita esse.* N

Nam si in quadratis ex AB, vel in rectilineis, quę ipsis æqualia sint, solida ęque alta constituamus, siue parallelepipeda, siue pyramides, siue prismata, erunt ea inter se vti bases] *Ex 32 vndecimi, & ex 5. & 6. duodecimi,* O

Sed & duobus circulis existẽtibus AB, si in ipsis conos æque altos, siue Cylindros constituamus, erunt inter se, vti ipsorum bases] *Ex 11. duodecimi.* P

DECIMI LIBRI FINIS.

SCHOLIVM.

Antiqui planorum cognitionem à ſcientia ſolidorum diſtinxerunt. etenim illam geometriam appellarunt, vt etiam Plato oſtendit in politicis, hanc autem ſtereometriam. At vero Iuniores cum utriuſque ſcientiæ communis ſit cognitio, quæ circa magnitudines uerſatur, etiam communi nomine geometriam dixerunt, eas uelut unam coniungentes. Et quemadmodum in planis alia quidem erant rectilinea, alia uero circularia, & alia mixta, ut helices, ita in ſolidis, alia conſtant ex planis rectilineis, alia ex ſphæricis, alia ex mixtis, ut cylindrus & conus. Et ſphærica quidem ad terminum & finem pertinent; rectilinea uero, uel quæ ex rectilineis ſunt ad infinitum; mixta ad id, quod occultum eſt. & ſi aliquod eſt corpus, hoc & ſolidum eſt, non autem contra, ut in ijs, quæ dicta ſunt: hęc enim imaginabilia ſunt ſolida, non antitypa, hoc eſt dura, & reſiſtentia.

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBER VNDECIMVS ET SOLIDORVM PRIMVS.

CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.



DIFFINITIONES

I.



SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

II.

Solidi terminus est superficies.

III.

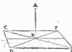
Recta linea ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in subiecto sunt plano rectos angulos efficit.

SCHOLIVM.

Si posset planum in rectas lineas resolui, ita dixisset. Quando ad omnes rectas lineas, ex quibus planum constat, rectos facit angulos, tunc & ad ipsum recta erit. Sed quoniam planum etiam infinite rectis lineis sectum in ipsas non resoluitur, contentus fuit linearum infinitate pro toto plano. contingentes autem addit, ut non parallelæ sint.

F. C. COMMENTARIVS.

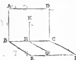
Sit recta linea AB ad subiectum planum CDEF perpendicularis, siue recta, & à puncto B ducantur quotcumque rectae lineae in eodẽ plano BC BD BE BF. erunt anguli CBA DBA EBA FBA recti. Quòd si anguli CBA DBA EBA FBA recti sint, dicemus rectam lineam AB ad subiectum planum CDEF perpendicularem, siue rectam esse.



IIII.

Planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineę in vno plano, alteri plano ad rectos angulos fuerint.

F. C. COMMENTARIVS.

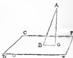


Sit planum ABCD ad planum BEFC rectū, sitq́; eorū cōis sectio BC, & in plano BEFC ducatur recta linea GH perpēdicularis ad ipsā BC. erit recta linea GH ad planū ABCD perpēdicularis, siue recta. At si recta GH, vel planū ABCD perpēdicularis sit, siue recta, erit ea ad BC cōem duorū planorū sectionē perpēdicularis. Et similiter cōtinget, si in alio plano ducatur KH perpēdicularis ad ipsā BC. ponatur autē nūc cōem duorū planorū sectionē rectā lineā esse, quod in sequentibus demonstrabitur.

V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, quando à sublimi termino lineę ad planum perpendiculari acta, à puncto facto ad terminum lineæ, qui est in plano, recta linea ducta fuerit, angulus acutus, qui ducta linea & stante continetur.

F. C. COMMENTARIVS.

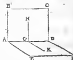


Sit recta linea AB inclinata ad subiectum planū CDEF: atque à puncto sublimi A ad idem planum perpendicularis ducatur AG, & BG iungatur. erit angulus ABG acutus, rectae lineae AB ad planum CDEF inclinatio.

VI.

Plani ad planum inclinatio est angulus acutus rectis lineis cōtentus, quę ad rectos angulos communi planorum sectioni ad vnum ipsius punctum in vtroque planorum ducuntur.

F. C. COMMENTARIVS.



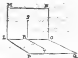
Sint duo plana inter se inclinata ABCD EADF, quorum cōmunis sectio AD, & sumpto in ipsa AD quouis puncto G ab eo ad rectos angulos in vtroque plano ducantur GH GK, erit angulus HGK inclinatio plani ABCD ad EADF planum.

VII.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, & alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

F. C.

Sint duo plana inter se inclinata ABCD EADF, de quibus proxime dictum est: sintq; alia duo plana inclinata LMNO PLOQ, quorum inclinatio angulus SRT: & sint anguli HGK SRT aequales. dicetur planum ABCD ad planum EADF similiter inclinatum, atque planum LMNO ad planum PLOQ.



VIII.

Plana parallela sunt, quę inter se non conueniunt.

IX.

Similes solidæ figurę sunt, quę similibus planis multitudine æqualibus continetur.

X.

Aequales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus est, plurium, quàm duarum linearum, quæ se se contingant, & non in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. vel solidus angulus est, qui pluribus, quàm duobus planis angulis comprehenditur, non existentibus in eodem plano, & ad vnum punctum constitutis.

SCHOLIVM.

Euclides quidem in inclinatione angulum vult esse: Stoici vero dicunt inclinationem esse angulum. sed recte Euclides. omnis enim angulus magnitudinum inclinatio est ad vnum punctum. hæc autem diffinitio imperfecta est. angulus enim quartę partis sphæræ pluribus quidem, quàm duabus superficiebus comprehenditur, sed non planis: & deinde conus ad verticem angulum solidum non efficit. nam si is est angulus: & coni uertex angulus erit. quare & ex duabus superficiebus & ex vna solidus angulus constabit. quod quidem verum est. melius igitur erit solidum angulum diffinire, inclinationem magnitudinis, vel magnitudinum ad vnum punctum. ἐν τῇ κλίσει συνεύσεις. συνεύσεων.

XII.

Pyramis est figura solida planis comprehensa, quæ ab vno plano ad vnum punctum constituitur.

XIII.

Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum duo, quæ opponuntur æqualia, & similia & parallela sunt; reliqua vero parallelogramma.

F. C. COMMENTARIVS.

Prismata dicuntur non solum, quae bases habent triangulares, vt opinatur Campanus, qui ea corpora seratilia appellat, sed quęcumque plana, quae opponuntur, siue triangula, siue quadrilatera, siue pentagona, siue plurilatera, & aequalia, & similia habent, reliqua vero parallelogrāma. quod ex ijs, quae tum in hoc libro, tum in sequenti traduntur, manifestissime apparet. Alia autem prismata Campanus improprie columnas lateratas vocat, quemadmodum & conos, pyramides rotundas, & Cylindros columnas rotundas.

XIIII.

Sphęra est figura comprehensa, quando circa manentem diametrum semicirculus conuersus restituatur rursus in eundem locum, à quo moueri cœpit.

XV.

Axis sphæræ est recta linea manens, circa quam semicirculus conuertitur.

XVI.

Centrum sphæræ est idem, quod & semicirculi centrum.

XVII.

Diameter sperę est recta linea quędam per centrum ducta, & ex vtraque parte à superficie sphærę terminata.

XVIII.

Conus est comprehensa figura, quando orthogonij trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum sunt, triangulum conuertatur, quoad rursus in eundem restituatur locum, à quo moueri cœpit. & si quidem manens recta linea ęqualis fuerit reliquo lateri, quod circa rectū angulū cōuertitur, conus orthogonius erit; si vero minor, ambligonius; & si maior, oxigonius.

XIX.

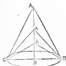
Axis coni est recta linea manens, circa quam triangulum conuertitur.

XX.

Basis vero circulus à conuersa recta linea descriptus.

SCHOLIVM.

Ostendendum quomodo conus orthogonius sit, vel angulum rectum ad verticem habeat.



Exponatur triangulum orthogonium ABC rectũ habens ABC angulum; & rectam lineam BC rectę AB æqualem. Dico ad punctum A rectum angulum constitui. producatur enim CB vsque ad D: ponaturq́; BD ipsi CB æqualis, & AD iungatur. Itaque quoniam AB est æqualis BC, erit & angulus BCA angulo BAC æqualis, & vterque ipsorũ dimidius recti, quòd rectus ponatur ABC. Eadem ratione & BAD est recti dimidius. totus igitur DAC angulus rectus est; & idcirco conus circa ABC descriptus est orthogonius; nimirũ recta linea AB manente: & circumducta AC quoad in eũdem locum restituatur, à quo moueri cœpit. circumductis igitur AC & CB, manente autem AB necesse est in conuersione rectam lineam AC congruere rectæ AD, cum CB ipsi BD sit æqualis: & circulus à puncto C descriptus basis erit coni, qui à triangulo ABC constituitur, & eius circuli diameter erit basis trianguli ADC, rectum habentis DAC angulum. Quòd si conus à vertice A ad basim vsque bifariam diuidatur, portionum superficies non aliud erunt, nisi triangulum ADC, quod est orthogonium. quare & coni uertex orthogonius erit. si vero angulus BAC sit maior dimidio recti, erit ob eandem caussam angulus quoque DAB dimidio recti maior, & DAC maior recto, videlicet obtusus; & conus ambligonius erit, vel ad verticem angulum obtusum habebit. si denique BC sit minor, quàm AB, erit angulus BAC minor dimidio recti. ergo ex ijs, quæ ostensa sunt, DAC angulus recto minor, hoc est acutus, & conus oxygonius erit.

F. C. COMMENTARIVS.

Euclides conos, & cylindros dumtaxat rectos diffiniuit, vel potius eorum ortum tradidit, nobis vero omnium vniuerse ex Apollonio, Serenoq; ortum explicare visum est.

EX APOLLONIO.

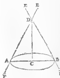
Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur, & manente puncto cõuertatur circa circuli circumferentiã, quousque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri; superficiem à recta linea descriptam, constantemq́ue ex duabus superficiebus ad verticem inter se aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit in infinitum producta; uoco Conicam superficiem, Verticem ipsius manens punctum, Axem rectam lineam, quæ per punctũ, et centrum circuli ducitur: Conum autem voco figuram contentam circulo &

& conicæ superficie, quę inter verticem, & circuli circumferentiam intercipitur. Verticem coni punctum, quod et superficiei conicæ vertex est. Axem rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum perducitur. Basim circulum ipsum.

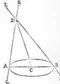
Conorũ rectos quidẽ voco, qui axes habẽt ad rectos angulos ipsis basibus. Scalenos vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habẽt.

Quem locum explicans Eutocius ita scribit.

Sit circulus A B, cuius centrum C: & punctum aliquod sublime D: iunctaque D B in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E F. Si igitur recta linea D B feratur continue in circuli A B circumferentia, quousque punctum B rursus in eum locum restituatur, à quo cœpit moueri: describet superficiem quandam, quę quidem constat ex duabus superficiebus, ad D punctum se se tangentibus. eam voco conicam superficiem; quę & augetur in infinitum, cum recta linea D B, ipsã describens in infinitum producatur. verticem superficiei dicit, punctum D: axem, rectam D C. conum vero appellat figuram cõtentam circulo A B, & ea superficie, quam D B sola describit. coni verticem punctum D: axẽ D C: & basim, A B circulum. At si D C ad circulum, fuerit perpendicularis, rectum vocat conum, sin minus, scalenum.



Describetur autem conus scalenus, quando à centro circuli linea erigatur, quae non sit perpendicularis ad circuli planum: à puncto vero lineae, quod est in sublimi ad circuli circumferentiam recta linea ducatur: & manente puncto circa ipsam conuertatur: comprehensa etenim figura conus erit scalenus. constat igitur lineam circumductam in conuersione quandoque maiorem; quandoque minoram, & quandoque aequalem fieri, ad aliud atque aliud circuli punctum.



XXI.

Cylindrus est comprehensa figura, quando orthogonij parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum sunt, parallelogrammum conuertatur, quousque rursus restituatur in eundem locum, à quo moueri cœpit.

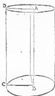
XXII.

Axis Cylindri est manens recta linea, circa quam parallelogrammum conuertitur.

XXIII.

Basis autem, circuli, qui à duobus è regione lateribus conuersis desćibuntur.

Sit parallelogrammum rectangulum ABCD, & latere AB manente intelligatur latus CD conuerti, quousq; ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri. erit iã descripta figura, cuius axis est AB recta linea manens, & basis circuli ipsi à punctis CD circa contra BA descripti.



EX SERENO.

Si duorum circulorum æqualium, & parallelorũ diametri semper inter se se parallelæ, & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & vnà circumferatur recta linea diametrorũ terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri cœpit: superficies, quę à circumlata recta linea describitur, Cylindrila superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, recta linea describente in infinitum producta. Cylindrus, figura, quæ circulis parallelis, & Cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur. Cylindri basis circuli ipsi. Axis recta linea, quæ per circulorum centra ducitur. Latus autem Cylindri linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius Cylindri, bases vtrasque contingit: quam & circumlatam describere superficiem Cylindri antea diximus. Cylindrorum recti quidem dicuntur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus. Scaleni autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

XXIIII.

Similes coni, & Cylindri sunt, quorum, & axes, & basium diametri eandem inter se proportionem habent.

F. C. COMMENTARIVS.

Similes conos & Cylindros omnes tum rectos, tum scalenos hoc modo diffiniemus.

Similes coni, & Cylindri sunt, quando per axes ductis planis ad rectos angulos basibus, communes sectiones eorum & basium cum axibus æquales angulos continentes, eandem inter se, quam axes, proportionem habent.

XXV.

Cubus est figura solida, sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida quattuor triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

XXVII.

Octaedrum est figura solida octo triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida, quæ duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & equiangulis continetur.

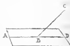
XXIX.

Icosaedrum est figura solida, quę viginti triangulis æqualibus, & equilateris comprehenditur.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

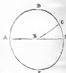
Rectæ lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quędam vero in sublimi.

Si enim fieri potest rectæ lineę AB pars quidem AB sit in subiecto plano, pars vero BC in sublimi. erit vtique recta linea quædam ipsi AB in directum continuata in subiecto plano.
A sitq; BD. duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD communis portio est AB, quod fieri non potest; recta enim linea cum recta linea non conuenit in pluribus punctis, quàm vno.
B alioqui rectæ lineę sibi ipsis congruēt. non igitur rectæ lineæ pars quædam est in subiecto plano, quędam vero in sublimi.



S C H O L I V M.

A Duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD cōmunis portio est AB, quod fieri non potest.] *Duabus enim rectis lineis non est communis portio. si enim fieri potest, sit duabus rectis lineis ABC ABD communis portio AB, & sumatur in recta linea ABC centrum quidem B, interuallum vero BA, & circulus AEF describatur. Quoniam igitur punctum B centrum est circuli AEF, & per B ducta est quędam recta linea ABC, erit AEF circuli diameter ABC. diameter autem circulum bifariam secat. ergo AEC semicirculus est. Rursus quoniam B centrum est AEF circuli, & per B recta linea quędam ducta est ABD, erit ABD circuli AEF diameter. ostensa autem est & ABC diameter eiusdem circuli, & semicirculi eiusdem circuli sunt aequales inter se. ergo AEC semicirculus semicirculo AED est aequalis, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur duabus rectis lineis communis portio est, sed differens: ac propterea neque fieri potest, vt terminatae rectae lineae alia recta linea in directum continuata sit ex ijs, quae ante ostensa sunt; quoniam duabus rectis lineis communis portio non est recta linea.*

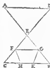


B Alioqui rectę lineę sibi ipsis congruent.] *Manifestum est congruentibus rectis lineis & earum fines inter se congruere. si autem hoc, duae rectae lineę eosdem fines habentes spatium continebunt. quod fieri non potest.*

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si duę rectæ lineæ se inuicem secent, in vno sunt plano, & omne triangulum in vno plano consistit.

Duę enim rectæ lineę AB CD se inuicem in puncto E secent. Dico ipsas AB CD in vno esse plano, & omne triangulum in vno plano consistere. Sumantur enim in ipsis EB EC quæuis puncta FG; iunganturq; CB FG, & FH GK ducantur. Dico primum EBC triangulum consistere in vno plano. Si enim trianguli EBC pars quidem FHC, vel GBK in subiecto plano est, reliqua vero in alio plano; erit & vnius linearum EB EC pars in subiecto plano; & pars in alio. Quod si trianguli ECB pars FG BG sit in subiecto plano, reliqua vero in alio, vtrarumq; rectarum linearum EC EB quędam pars erit in subiecto plano, quædam vero in alio. quod absurdũ esse ostendimus. Triangulum igitur EBC in vno est plano. in quo autem plano est BCE triangulum, in hoc est vtraque ipsarum EC EB: in quo autem vtraque ipsarum EC EB, in hoc & AB CD. ergo rectę lineę AB CD in vno sunt plano, & omne triangulum in vno plano consistit.



S C H O L I V M.

Propositum est ostendere rectas lineas, quę se mutuo secant in vno plano esse. quoniam autem hoc per triangulum ostenditur, illud apposuit, & omne triangulum in vno plano consistit.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si duo plana se inuicem secent, cõmunis ipsorum sectio recta linea erit.

Duo enim plana AB BC se inuicem secent, communis autem ipsorum sectio sit DB linea. Dico lineam DB rectam esse. si enim non ita sit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB, in plano autem BC recta linea DFB. erunt vtique duarum rectarũ linearum DEB DFB ijdem termini, & ipsę spacium cõtinebunt, quod est absurdum. non igitur DEB DFB rectæ lineæ sunt. Similiter ostendemus neque aliam quãpiam, quæ à puncto D ad B ducitur rectam esse, pręter ipsam DB, communem scilicet planorum AB BC sectionem. si igitur duo plana se inuicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit.

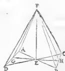


THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea duabus rectis lineis se inuicem secantibus in cõmuni sectione ad rectos angulos insistat, etiã ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta enim linea quædam EF duabus rectis lineis AB CD se inuicem secãtibus in E puncto, ab ipso E ad rectos angulos insistat. Dico EF etiam plano per AB CD

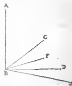
ducto ad rectos angulos esse. sumantur enim rectæ lineæ AE EB CE ED inter se æquales: per, E ducatur recta linea GEH vtcumque, & iungantur A D CB; deinde à quouis puncto F ducantur FA F G FD FC FH FB Et quoniam duæ rectæ lineæ A E ED duabus rectis lineis CE EB equales sunt, & 4.primi. angulos æquales continent, erit AD basis basi CB æqualis, & triangulum AED triangulo CEB æquale. ergo & angulus DAE æqualis est angulo EBC. est autem & angulus AEG equalis angulo BEH. Duo igitur triangula sunt AGE BEH duos angulos duobus angulis equales habētia, alterū alteri, & vnū latus AE vni lateri EB equale. quod est 26.primi. ad equales angulos. quare & reliqua latera reliquis lateribus equalia habebūt, ergo GE quidem est æqualis EH; AG vero ipsi BH. Quòd cum AE sit æqualis EB, com-4 primi. munis autem & ad rectos angulos FE; erit basis AF basi FB æqualis. Eadem quoque ratione & CF equalis erit FD. Preterea quoniam AD est æqualis CB, & AF ipsi FB; erunt duæ FA AD duabus FB BC æquales, altera alteri; & ostēsa est basis DF equa-8 primi. lis basi FC. angulus igitur FAD angulo FBC est æqualis. Rursus ostensa est AG æqualis BH. sed & AF ipsi FB est æqualis. duæ igitur FA AG duabus FB BH æqua-4.primi. les sunt, & angulus FAG æqualis est angulo FBH, vt demonstratum fuit. basis igitur GF basi FH est æqualis. Rursus quoniam GE ostensa est æqualis EH, communis autem FE; erunt duæ GE EF equales duabus HE EF; & basis HF est æqualis basi F G. angulus igitur GEF angulo HEF est æqualis, & idcirco rectus est vterque angulorum GEF HEF. ergo FE ad GH, vtcumque per E ductam rectos efficit angulos. Similiter ostendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & 3.diff. in subiecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autē ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas ipsam contingentes, & in eodem existentes plano rectos efficit angulos. quare FE subiecto plano ad rectos angulos insistit. at subiectum planum est quod per AB CD rectas lineas ducitur. ergo FE ad rectos angulos erit ducto per AB CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis se inuicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.



THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea tribus rectis lineis se se tangentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in vno plano erunt.

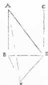
Recta enim linea quædam AB tribus rectis lineis BC BD BE in contactu B ad rectos angulos insistat. Dico BC BD BE in vno plano esse. non enim, sed si fieri potest, sint BD BE quidē in subiecto plano, BC vero in sublimi, 3 huius. & planum per AB BC producatur. cōmunē vtique sectionem in subiecto plano faciet rectam lineam. faciat BF. in vno igitur sunt plano per AB BC ducto tres rectę lineæ AB BC BF. & quoniam AB vtrique ipsarum BD BE Ex antecedente. ad rectos angulos insistit, & ducto per ipsas DB BE plano ad rectos angulos erit. planum autem DB BE est subiectum planum. ergo A 3 diff. B ad subiectum planum recta est. quare & ad omnes rectas lineas ipsam contingentes



res, quæ in eodem plano sunt, rectos faciet angulo; sed ipsam tangit BF in subiecto existens plano. ergo angulus ABF rectus est. ponitur autem & ABC angulus rectus. æqualis igitur est angulus ABF angulo ABC, & in eodem sunt plano; quod fieri non potest. recta igitur linea BC non est in plano sublimi. quare tres rectæ lineæ BC BD BE in vno sunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis se se tangẽtibus in cõmuni sectione ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in vno plano erunt.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si duę rectæ lineę eidem plano ad rectos angulos fuerint, illę inter se se parallelæ erunt.



Duæ enim rectæ lineæ AB CD subiecto plano sint ad rectos angulos. Dico AB ipsi CD parallelam esse. occurrant enim subiecto plano in punctis BD, iungaturq; BD recta lineã, cui ad rectos angulos in subiecto plano ducatur DE, & posita DE ipsi AB ęquali, iũgantur BE AE AD. Quoniam igitur AB recta est ad subiectum planum, & ad omnes rectas lineas, quę ipsam cõtingunt, & in subiecto sunt plano, rectos angulos efficiet. contingit autem AB vtraque ipsarum BD BE existens in subiecto plano. ergo vterque angulorum ABD ABE rectus est. Eadem ratione rectus etiam est vterq; ipsorum CDB CDE. & quoniam AB ęqualis est ipsi DE, cõmunis autem BD, erunt duæ AB BD duabus ED DB æquales, & rectos angulos continent. basis igitur AD basi BE est æqualis. rursus quoniam AB est æqualis DE, & AD ipsi BE, duę AB BE duabus ED DA æquales sunt, & basis ipsarum AE communis. ergo angulus ABE angulo EDA est ęqualis. sed ABE rectus est. rectus igitur & EDA; & idcirco ED ad DA est perpendicularis. sed & perpendicularis est ad vtramque ipsarum BD DC. quare ED tribus rectis lineis BD DA DC in contactu ad rectos insistit angulos. tres igitur rectæ lineę BD DA DC in vno sunt plano. in quo autem sunt BD DA, in hoc & AB: omne enim triangulum in vno est plano. ergo AB BD DC in vno plano sint necesse est, atque est vterque angulorum ABD BDC rectus. parallela igitur est AB ipsi CD. quare si duæ rectæ lineæ eidẽ plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se se parallelæ erunt.

Diff. 3. · 4. primi. · 8. primi. · Ex antecedente. · 2. huius. · 28. primi.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si duę rectæ lineę parallelæ sint, sumantur autem in vtraque ipsarum quælibet puncta; quę dicta puncta coniungit recta linea in eodem erit plano, in quo & parallelę.



Sint duæ rectę lineæ parallelæ AB CD, & in vtraque ipsarum sumantur quælibet puncta EF. Dico rectam lineam quæ puncta E F cõiungit, in eodem plano esse, in quo sunt parallelę. non enim, sed si fieri potest, sit in sublimi, vt EGF, & per EGF planũ ducatur, quod in subiecto plano sectionem faciet, rectam lineam. faciat vt EF. ergo duæ rectæ lineæ EGF EF spacium continebunt, quod fieri non potest. non igitur quæ à puncto E ad F ducitur recta linea in sublimi est plano, quare erit in eo, quod per AB CD parallelas transit. si igitur duæ rectæ lineæ parallelę sint, & reliqua, quæ sequuntur. quod oportebat demonstrare.

3. huius. · 10 com. no. primi lib.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

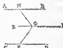
Si duę rectę lineæ parallelę sint, altera autem ipsarum plano alicui sit ad rectos angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.



Sint duę rectę lineæ parallelę AB CD, & altera ipsarum AB subiecto plano sit ad rectos angulos. Dico & reliquam CD eidem plano ad rectos angulos esse. occurrãt enim AB (Ex antecedente.) CD subiecto plano in punctis BD, & BD iungatur. ergo AB CD BD in vno sunt plano. Ducatur ipsi BD ad rectos angulos in subiecto plano DE & ponatur DE ipsi AB æqualis: iunganturq; BE AE AD. Et quoniam AB perpendicularis (3. diffi.) est ad subiectum planum, & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, suntq; in subiecto plano, perpendicularis erit. rectus igitur est vterque angulorum ABD ABE. (29 primi.) Quòd cũ in parallelas rectas lineas AB CD incidat BD, erũt anguli ABD CDB duobus rectis ęquales. rectus autem est ABD. ergo & CDB est rectus; ac propterea CD perpendicularis est ad BD. Et quoniam AB est ęqualis DE, communis autem BD, duæ AB BD duabus ED DB æquales sunt; & angulus ABD est æ- (4 primi.) qualis angulo EDB, rectus enim vterq; est basis igitur AD basi BE est ęqualis. Rursus quoniam AB æqualis est DE, & BE ipsi AD, erunt duę AB BE duabus ED DA (8. primi.) æquales, altera alteri; & basis earum communis AE. quare angulus ABE est æqualis angulo EDA. rectus autem est ABE. ergo & EDA est rectus, & ED ad DA per- (4. huius.) pendicularis. sed & perpendicularis est ad BD. ergo ED et ad planum per BD DA (3. diffi.) perpendicularis erit, & ad omnes rectas lineas, quę in eodem existentes plano ipsã contingunt, rectos faciet angulos. At in plano per BA AD est DC, quoniam in pla- (2. huius.) no per BD DA sunt AB BD: in quo autem sunt AB BD in eodem est ipsa DC. quare ED ipsi DC est ad rectos angulos, ideoq; CD ad rectos angulos est ipsi DE. sed & CD ipsi DB. ergo CD duabus rectis lineis DE DB se mutuo secantibus in cõmu- (4. huius.) ni sectione D ad rectos angulos insistit; ac propterea plano per DE DB est ad rectos angulos. planum autem per DE DB est subiectum planum. ergo CD subiecto plano ad rectos angulos erit.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

Quæ eidem rectę lineę sunt parallelę, non existentes in eodem, in quo ipsa plano; etiam inter se parallelæ erunt.

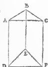


Sit enim vtraque ipsarum AB CD parallela ipsi EF, non existentes in eodem, in quo ipsa, plano. Dico AB ipsi CD parallelã esse. sumatur in EF quodvis punctum G, à quo ipsi EF in plano quidem per EF AB transeunte ad rectos angulos ducatur GH; in plano autem transeunte per FE CD rursus ducatur ipsi EF ad rectos angulos GK. Et quoniam EF ad vtramque ipsarum GH GK est perpendicularis, (4. huius.) erit EF etiam ad rectos angulos plano per GH GK (Ex antecedente.) transeunte. atque est EF ipsi AB parallela ergo & AB plano per HGK ad rectos angulos est. Eadem ratione & CD plano per HGK est ad rectos angulos. vtraq; igitur (6. huius.) ipsarum AB CD plano per HGK ad rectos angulos erit. Si autem duę rectæ lineę eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ erunt inter se se, ergo AB ipsi CD est parallela.

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Si duæ rectæ lineæ se se contingentes duabus rectis lineis se se contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ enim rectę lineæ se se contingentes AB BC duabus rectis lineis DE EF se se contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano. Dico angulum ABC angulo DEF ęqualem esse. Assumantur enim BA BC ED EF inter se æquales: & iungantur AD CF BE AC DF. Quoniam igitur BA ipsi ED æqualis est & parallela, erit & AD æqualis & parallela ipsi BE. Eadē ratione & CF ipsi BE ęqualis & parallela erit. 33 primi. Vtraque igitur ipsarum AD CF ipsi BE ęqualis est & parallela. Quę autem eidem rectę lineę sunt parallelę, nō existentes in eodem, in quo ipsa plano; & inter se parallelę erūt. Ex antecedente. ergo AD parallela est ipsi CF, & æqualis. atque ipsas coniungunt AC DF. & AC igitur ipsi DF æqualis est & parallela. 33 primi. & quoniā duæ rectę lineę AB BC duabus DE EF æquales sunt, & basis AC est æqualis basi DF; erit angulus ABC angulo DEF ęqualis. 8 primi. si igitur duæ rectæ lineæ se se contingentes duabus rectis lineis se se contingētibus sint parallelę, non autem in eodem plano, ęquales angulos continebunt. quod oportebat demonstrare.



S C H O L I U M.

CONVERSUM. Si fuerint duo anguli æquales, contenti rectis lineis in eodem plano non existentibus, & earum vna parallella sit uni continentium ęqualem angulum; & reliqua reliquæ parallela erit.

F. C. COMMENTARIVS.

Sint duo anguli aequales ABC DEF: & rectae lineae AB BC angulum ABC continentes nō sint in eodem plano, in quo DEF. sit autem DE parallela ipsi AB. Dico & EF ipsi BC parallelam esse. Si enim nō est EF parallela ipsi BC, erit alia ipsi parallela, sit EG. Itaque quoniam duae rectae lineae sese contingentes AB BC duabus rectis lineis sese cōtingentibus DE EG sunt parallelae, nō autem in eodem plano; aequales angulos continebunt. ergo angulus DEG angulo ABC est aequalis. Sed et angulus DEF ponitur aequalis angulo ABC. angulus igitur DEF angulo DEG aequalis erit, minor maiori, quod fieri non potest. non igitur EG parallela est ipsi BC. similiter ostendemus neque aliam vllam eidem BC parallelam esse pręter ipsam EF. ergo EF ipsi BC est parallela. quod demonstrare oportebat.

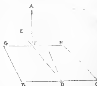


PROBLEMA I. PROPOSITIO XI.

A dato puncto sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem pūctum sublime A, datum autem subiectum planum. oportet a puncto A ad subiectum planum perpendicularem rectam lineā ducere. In subiecto enim plano ducatur quędam recta linea vt cumq; BC, & à puncto A ad B

C per



C perpendicularis agatur A D. Si quidem igitur AD perpẽdicularis sit etiam ad subiectum planum; factum iam erit, quod proponebatur: sin mi-
11 primi. nus, ducatur à puncto D ipsi B C in
12 primi. subiecto plano ad rectos angulos D E. & à pũcto A ad DE perpendicularis ducatur AF. deniq; per F ducatur GH ipsi BC parallela. Et quõ BC vtrique ipsarum DA DE est ad rectos an-
4. huius. gulos, erit & B C ad rectos angulos plano per ED DA transeunti, atq; est ipsi parallela GH. Si aũt sint duæ rectæ lineę parallelæ, quarum vna pla-
8 huius. no alicui sit ad rectos angulos, & reliqua eidẽ plano ad rectos angulos erit. quare
3 diffi. & GH plano per ED DA transeunti ad rectos angulos est: ac propterea ad omnes rectas lineas, quę in eodem plano existentes ipsam contingunt, est perpendicularis. contingit aũt ipsam AF existẽs in plano per ED DA. ergo G H perpendicularis est ad F A. & ob id F A est perpẽdicularis ad GH est autem AF & ad DE perpẽdicularis. ergo AF perpendicularis est ad vtrãq; ipsarum HG DE. si autem recta linea duabus rectis lineis sese contingentibus in cõmuni sectione ad rectos angulos
4 huius. insistat, etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos erit. quare FA plano per E D GH ducto est ad rectos angulos. planum autem per ED GH est subiectum planum. ergo AF ad subiectum planum est perpẽdicularis. A dato igitur puncto sublimi A ad subiectum planum perpendicularis recta linea ducta est AF. quod facere oportebat.

PROBLEMA II. PROPOSITIO. XII.

Dato plano à puncto, quod in ipso datum, est ad rectos angulos rectam lineam constituere.



Sit datum quidem planum subiectum, punctum autẽ, quod in ipso sit A. oportet à puncto A subiecto plano ad rectos angulos rectã lineam constituere. Intelligatur ali-
Ex antecedente. quod punctũ sublime B, à quo ad subiectũ planum agatur perpendicularis B C; & per A ipsi BC parallela ducatur AD. Quõ igitur duę rectæ lineæ parallelæ sunt A D CB, vna autem ipsarum B C subiecto plano est ad rectos
8 huius. angulos, & reliqua AD subiecto plano ad rectos angulos erit. Dato igitur plano à puncto, quod in ipso est datum ad rectos angulos recta linea constituta est. quod facere oportebat.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XIII.

Dato plano à pũcto, quod in ipso est, duæ rectę lineæ ad rectos angulos non constituentur ex eadem parte.



Si enim fieri potest, dato plano à puncto quod in ipso est A, duæ rectę lineę AB AC ad rectos angulos constituantur ex eadem
3. huius. parte: & ducatur planũ per BA AC, quod A faciet sectionem per A in subiecto plano rectam lineam. faciat DAE. ergo rectæ lineæ AB AC DAE in vno sunt plano. Et quoniam CA subiecto plano ad rectos angulos
3 diffi. est, & ad omnes rectas lineas, quę in subie-

cto plano existentes ipsam contingunt, rectos faciet angulos. contingit autem ipsam DAE, quę est in subiecto plano. angulus igitur CAE rectus est. Eadem ratione & rectus est BAE. ergo angulus CAE ipsi BAE est æqualis, & in vno sunt plano, quod fieri non potest. Non igitur dato plano à puncto, quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ex eadē parte. quod demonstrare oportebat. B

F. C. COMMENTARIVS.

Et ducatur planum per BA AC] *Sunt enim ex secunda huius rectae lineae BA AC in vno plano.* A

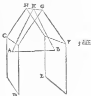
SCHOLIVM.

Quod fieri non potest] *Essent enim & parallelae, eidem plano ad rectos angulos existentes; & inter se conuenirent. quod est absurdum, parallelae autem essent ex sexta huius.* B

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIIII.

Ad quæ plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

Recta enim linea quædam AB ad vtrumque ipsorum planorum CD EF sit perpendicularis. Dico ea plana parallela esse. si enim non ita sit, producta conuenient inter se, cōueniāt; & cōem sectionē faciāt rectā lineā GH; & in ipsa GH sumpto quouis pūcto K, iungantur AK BK. Qm igitur AB perpēdicularis est ad EF planū, erit & perpēdicularis ad ipsā BK rectā lineā in plano EF producto existētē. quare angulus ABK rectus est. Eadē ratione & BAK est rectus: ideoque trianguli ABK duo anguli ABK BAK duobus rectis sunt æquales, quod fieri non potest. non igitur plana CD EF producta inter se conuenient. quare CD EF parallela sint necesse est. Ad quę igitur plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. quod demonstrare oportebat.



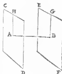
3 diff.

SCHOLIVM.

CONVERSVM. Si duo plana parallela fuerint, recta linea, quæ ad vnum ipsorum est perpendicularis, etiam ad reliquum perpendicularis erit.

F. C. COMMENTARIVS.

Sint duo plana parallela CD EF, & recta quędam linea AB ad planum CD sit perpendicularis. Dico AB etiam ad planum EF perpendicularem esse. Si enim non est perpendicularis, ducatur in plano EF recta linea BG ad eas partes in quibus angulum facit recto minorem: & per AB BG aliud planum ducatur, cuius & plani CD communis sectio sit recta linea AH. Et quoniam angulus ABG est acutus, productis planis conuenient tandem inter sese rectae lineae BG AH. quare & ipsa plana conuenient. atqui parallela ponuntur. quod fieri non potest. non igitur AB ad planum EF non est perpendicularis. ergo perpendicularis sit necesse est. quod demonstrandum proposuimus.



THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XV.

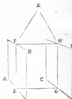
Si duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipſas tranſeunt plana parallela erunt.



Duæ enim rectæ lineę ſeſe tangētes AB BC duabus rectis lineis ſeſe tangētibus DE EF parallelæ ſint, & non in eodem plano. Dico plana quæ per AB BC DE EF tranſeunt, ſi producantur, inter ſe non conuenire. Ducatur enim à puncto B ad planum, quod per DE EF tranſit perpendicularis BG, quę plano in puncto G occurrat; & per G ducatur ipſi quidem ED parallela GH; ipſi vero EF parallela GK. Itaque
3 diff. quoniam BG perpendicularis eſt ad planum per DE EF; & ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, & in eodem ſunt plano, rectos faciet angulos. contingit autem ipſam vtraque earum GH GK, quę eſt in eodem plano. rectus igitur eſt v-
29. primi. terque angulorum BGH BGK. Et quoniam BA parallela eſt ipſi GH, anguli GBA BGH duobus rectis ſunt ęquales. rectus autem eſt BGH. ergo et GBA rectus erit; ideoq; GB ad BA eſt perpendicularis. Eadem ratione & GB eſt perpendicularis ad BC. cum igitur recta linea BG duabus rēctis lineis BA BC ſe inuicem ſecanti-
2. huius. bus ad rectos angulos inſiſtat, erit BG etiam ad planum per AB BC ductum perpendicularis. & ob eandem cauſſam BG eſt perpendicularis ad planum per HG GK. ſed planum per HG GK eſt illud, quod per DE EF tranſit. quare BG ad planū; quod tranſit per DE EF eſt perpendicularis. oſtenſa autem eſt BG etiam perpendicularis ad planū per AB BC. atq; eſt ad planū per DE EF perpēdicularis ergo BG perpēdicularis eſt ad vtrūq; planorū, quæ per AB BC DE EF trāſeūt. Ad quæ
Ex antecedente. vero plana eadē recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt. parallelū igitur eſt planū per AB BC plano per DE EF. Quare ſi duæ rectæ lineæ ſe ſe tangentes duabus rectis lineis ſe ſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano, & quæ per ipſas tranſeunt plana parallela erunt. quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XVI.

Si duo plana parallela ab aliquo plano ſecentur, communes ipſorum ſectiones parallelę erunt.

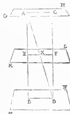


Duo enim plana parallela AB CD à plano aliquo EFGH ſecentur: communes autem ipſorū ſectiones ſint EF GH. Dico EF ipſi GH parallelam eſſe. ſi enim non eſt parallela, productæ EF GH inter ſe conuenient, vel ad partes FH, vel ad partes EG. producantur prius, vt ad FH; & conueniant in K. Quoniam igitur EFK eſt in plano AB, & omnia quæ in EFK ſumuntur puncta in eodem plano erunt. vnum autem punctorum, quæ ſunt in EFK, eſt ipſum K punctum. ergo K eſt in plano AB. Eadem ratione & K eſt in CD plano. ergo plana AB CD producta inter ſe cōuenient. non conueniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur EF GH rectę lineę productę conuenient ad partes FH. ſimiliter demonſtrabimus neque ad partes EG conuenire, ſi pro

ducantur. quæ autem neutra ex parte conueniunt parallelę sunt. ergo EF ipsi GH est parallela. si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XV. PROPOSITIO. XVII.

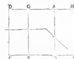
Si duæ rectę lineę à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur.



Duæ enim rectæ lineę AB CD à parallelis planis GH KL MN secentur in punctis A E B C F D. Dico vt AE recta linea ad ipsam EB, ita esse CF ad FD. Iungantur enim AC BD AD & occurrat AD plano KL in puncto X: & EX XF iungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL MN à plano EBDX secantur, communes ipsorum sectiones EX BD parallelę sunt. Ex antecedente. Eadem ratione quoniam duo plana parallela GH KL à plano AEFC secantur, communes ipsorũ sectiones AC FX sunt parallelæ. Et quoniã vni laterum trianguli ABD, videlicet ipsi BD parallela ducta est EX, vt AE ad EB, ita erit AX ad XD. 2. sexti. Rursus quoniam vni laterum trianguli ADC, nempe ipsi AC parallela ducta est XF, erit vt AX ad XD, ita CF ad FD. ostensum autem est & vt AX ad XD, ita esse AE ad EB. 11. quinti. & vt igitur AE ad EB, ita est CF ad FD. Quare si duę rectę lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.



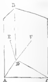
Recta enim linea quædam AB subiecto plano sit ad rectos angulos. Dico & omnia plana, quæ per ipsam AB transeunt, subiecto plano ad rectos angulos esse. producatur enim per AB planum DE, sitq; plani DE, & subiecti plani communis sectio CE: & sumatur in CE quod vis punctum F; à quo ipsi CE ad rectos angulos in DE plano ducatur FG. Quoniam igitur AB ad subiectũ planum est perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quę ipsam contingunt, & in 3 diff. eodem sunt plano perpendicularis erit. quare ẽt ad CE est perpendicularis. angulus igitur ABF rectus est. sed & GFB est rectus. ergo AB parallela est ipsi FG. est autem AB subiecto plano ad rectos angulos. & FG igitur eidẽ plano ad rectos an- 8 huius. gulos erit. 4 diff. At planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductę rectæ lineæ in vno planorum reliquo plano ad rectos angulos sint: & communi planorum sectioni CE in vno plano DE ad rectos angulos ducta FG, ostensa est subiecto plano ad rectos esse angulos. ergo planum DE rectũ est ad subiectum planum. similiter demonstrabuntur, & omnia quę per AB trãseũt plana subiecto plano recta esse. si igitur recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Si duo plana se inuicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos, & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo enim plana se inuicem secantia AB BC subiecto plano sint ad rectos angulos: communis autem ipsorum sectio sit BD. Dico BD subiecto plano ad rectos angulos esse. Non enim, sed si fieri potest; non sit BD ad rectos angulos subiecto plano; & à puncto D ducatur in plano quidem AB, ipsi AD rectæ lineæ ad rectos angulos DE: in plano autē BC ducatur ipsi CD ad rectos angulos DF. Et quoniam planum AB ad subiectum planum rectum est, & communi ipsorum sectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta est DE, erit DE ad subiectum planum perpendicularis. simi liter ostendemus & DF perpendicularem esse ad subiectum planū. quare ab eodē puncto D subiecto plano duę rectæ li neę ad rectos angulos constitutę sunt ex eadem parte, quod fieri non potest. non igitur subiecto plano à puncto D ad rectos angulos constituentur aliæ rectæ lineæ, preter ipsam DB, communem planorum AB BC sectionem. Ergo si duo plana se inuicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos, & communis ipsorum sectio eidē plano ad rectos angulos erit. quod oportebat demonstrare.

13. huius.



F. C. COMMENTARIVS.

Ex proxime demonstratis apparet conuersum antecedentis theorematis, nempe hoc.

Si omnia, quæ per aliquam rectam lineam plana producuntur, cuipiam plano ad rectos fuerint angulos, & recta linea eidem plano ad rectos angulos erit.

Fit enim recta linea dictorum planorum communis sectio. quare cum ea plana plano cuipiam ad rectos angulos esse ponantur, & recta linea quæ ipsorum communis sectio est eidem plano ad rectos angulos erit.

Conuersum vero præsentis theorematis apparet ex antecedente. quod huiusmodi est.

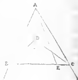
Quorum planorum se se mutuo secantium communis sectio alicui plano ad rectos fuerit angulos, & secantia plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Communis enim planorum sectio est recta linea, per quam dicta plana transeunt. quod cum recta linea plano cuipiam ad rectos fuerit angulos, & ipsa plana eidem ad rectos angulos erunt.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO. XX.

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo maiores sunt, quomodocumq; sumpti.

Solidus enim angulus ad A tribus angulis planis BAC CAD DAB contineatur. Dico angulorum BAC CAD DAB duos quoslibet reliquo maiores esse, quomodocumque sumptos. si enim BAC CAD DAB anguli inter se ęquales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo maiores esse, quomodocumque sumptos. Sin



minus,ſit maior BAC.& ad rectam lineam AB,& ad punctum in ipſa A conſtituatur angulo DAB in plano per BA AC tranſeũte,æqualis angulus BAE; ponaturq; ipſi AD æqualis AE;& per E ducta BEC ſecet rectas lineas AB AC in punctis BC & DB DC iungantur. Itaque quoniam DA eſt æqualis AE, communis autem AB, duę DA AB duabus BA AE æquales ſunt:& angulus DAB æqualis eſt angulo BAE. baſis igitur DB baſi BE eſt æqualis. Et quoniam duę DB DC ipſa BC maiores ſunt, quarum DB æqualis oſtenſa eſt ipſi BE, erit reliqua DC quàm reliqua EC maior. Quod cum DA ſit ęqualis AE, communis autem AC & baſis DC maior, baſi EC; erit angulus DAC angulo EAC maior. oſtenſus autem eſt & DAB angulus æqualis ipſi BAE. quare DAB DAC anguli angulo BAC maiores ſunt. ſimiliter demonſtrabimus & ſi duo quilibet alij ſumantur, eos reliquo eſſe maiores. ſi igitur ſolidus angulus tribus angulis planis cõtineatur, duo quilibet reliquo maiores ſunt, quomodocumque ſumpti. quod demonſtrare oportebat. 32. primi. 4. primi. 2. primi.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

Omnis ſolidus angulus minoribus, quàm quattuor rectis angulis planis continetur.



Sit ſolidus angulus ad A planis angulis BAC CAD DAB côtẽtus. Dico angulos BAC CAD DAB quattuor rectis eſſe minores. ſumãtur enim in vnaquaq; ipſarũ AB AC AD quęuis pũcta B C D,& BC CD DB iũgãtur. Quoniam igitur ſolidus angulus ad B tribus angulis planis cõtinetur CBA ABD CBD, duo quilibet reliquo maiores ſunt. anguli igitur CBA ABD angulo CBD ſunt maiores. Eadem ratione & anguli quidẽ BCA ACD maiores ſunt angulo BCD; anguli vero CDA ADB maiores angulo CDB. quare ſex anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB tribus angulis CBD BCD CDB ſunt maiores. ſed tres anguli CBD BDC DCB ſunt ęquales duobus rectis. Sex igitur anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB duobus rectis maiores ſunt. Quòd cũ ſingulorũ triãgulorum ABC ACD ADB tres anguli ſint ęquales duobus rectis, erunt triũ triangulorum nouem anguli CBA ACD BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD ęquales ſex rectis quorũ ſex anguli ABC BCA ACD CDA ADB DBA duobus rectis ſunt maiores reliqui igitur BAC CAD DAB tres anguli, qui ſolidum continent angulum quattuor rectis minores erunt. Quare omnis ſolidus angulus minoribus, quàm quattuor rectis angulis planis continetur. quod oportebat demonſtrare.

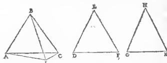
THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Si ſint tres anguli plani, quorum duo reliquo ſint maiores, quomodocumque ſumpti, contineant autem ipſos rectæ lineæ æquales fieri poteſt, vt ex ijs, quæ rectas æquales coniungunt triangulum conſtituatur.

Sint tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo ſint maiores, quomodocumque ſumpti videlicet anguli quidem ABC DEF maiores angulo GHK; anguli vero DEF GHK maiores angulo ABC & præterea anguli GHK ABC angulo DEF: maiores ſint: æquales rectæ lineæ AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK iungãtur. Dico fieri poſſe, vt ex æqualibus ipſis AC DF GK triangulũ cõſtituatur; hoc eſt ipſarũ AC DF GK duas quaslibet reliqua eſſe maiores, quomodocumque ſumptas. ſi quidẽ igitur anguli ABC DEF GHK inter ſe æquales ſint, manifeſtũ



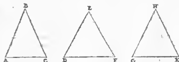
est & æqualibus factis AC DF GK ex equalibus ipsis triangulum constitui posse.
23 primi. sin minus, sint inæquales, & ad rectam lineam HK, atque ad punctum in ipsa H, an
gulo ABC equalis angulus constituatur KHL, & ponatur vni ipsarum AB BC DE
EF GH HK æqualis HL: & GL KL iungantur. Itaque quoniam duę AB BC dua-
4.primi. bus KH HL æquales sunt, & angulus ad B angulo KHL æqualis, erit basis AC equa
lis basi KL. Et quoniam anguli ABC GHK angulo DEF sunt maiores, æqualis au-
tē est angulus A B C angulo K H L : erit G H L angulo D E F maior. Quòd cum
duæ GH HL duabus DE EF æquales sint, & angulus GHL angulo, qui ad E maior,
24 primi. basis GL basi DF maior erit. Sed GK KL ipsa GL sunt maiores. multo igitur maio
20.primi. res sunt GK KL ipsa DF. est autem KL æqualis AC. ergo AC GK reliqua DF sunt
maiores. similiter demonstrabimus, & ipsas quidem AC DF maiores esse GK, ipsas
uero GK DF maiores AC. fieri igitur potest vt ex æqualibus ipsis AC DF GK triā
gulum constituatur.



ALITER. Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo
sint maiores, quomodocumque sumpti: cōtineant autem ipsos æquales rectæ lineę
AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK iungantur. Dico fieri posse, vt ex ęqua-
libus ipsis AC DF GK triangulum constituatur: hoc est rursus duas reliqua maio
res esse, quomodocumque sumptas. si igitur rursus anguli ad B E H sint æquales,
& AC DF GK æquales erunt, & duę reliqua maiores. sin minus, sint inæquales an-
24.primi. guli ad B E H, & maior qui est ad B vtroque ipsorum qui ad E H. maior igitur
est & recta linea AC vtraque ipsarum DF GK. & manifestum est ipsam AC vnà cū
altera ipsarum DF GK reliqua esse maiorem. Dico & DF GK ipsa AC maiores es-
23 primi. se. constituatur ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea B, angulo GHK æqualis
angulus ABL, & vni ipsarum AB BC DE EF GH HK ponatur æqualis BL, & AL
LC iungantur. Quoniam igitur duę AB BL duabus GH HK æquales sunt, altera al
teri, & angulos æquales continent; erit basis AL basi GK æqualis. & quoniam angu-
li ad E H angulo ABC maiores sunt, quorum angulus GHK est æqualis ipsi ABL;
erit reliquus qui ad E angulo LBC maior. Quòd cum duę LB BC duabus DE EF
24 primi. æquales sint, altera alteri, & angulus DEF angulo LBC maior, basis DF basi LC ma
ior erit. ostensa est autem GK ęqualis AL. ergo DF GK ipsis AL LC sunt maiores.
sed AL LC maiores sunt ipsa AC. multo igitur DF GK ipsa AC maiores erunt. qua
re rectarum linearum AC DF GK duę reliqua maiores sunt, quomodocumque
sumptę, ac propterea fieri potest, vt ex ęqualibus ipsis AC DF GK triangulum con
stituatur. quod oportebat demonstrare.

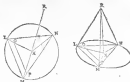
PROBLEMA III. PROPOSITIO XXIII.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sint maiores, quomodocumque sumpti, solidum angulum constituere. oportet autem tres angulos quattuor rectis esse minores.



Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK; quorum duo reliquo sint maiores, quomodocumq; sumpti. sintq; tres anguli quattuor rectis minores. oportet ex æqualibus ipsis ABC DEF GHK solidum angulum constituere. abscindãtur æquales AB BC DE EF GH HK; & AC DF GK iungãtur. fieri igitur põt, vt ex æqualibus ipsis AC DF GK constituatur triangulum. Itaque constituatur LMN, ita vt AC quidem sit æqualis LM, DF vero ipsi MN: & pręterea GK ipsi LN: & circa LMN triangulum circulus LMN describatur: sumaturq; ipsius cẽtrum X; quod vel erit intra triangulũ LMN, vel in vno eius latere, vel extra. Sit primũ intra: sitq; X. & LX MX NX iungãtur. Dico AB maiorem esse ipsa LX. Si enim non ita sit, vel AB erit ęqualis LX, vel ea minor. Sit primum æqualis. Quoniam igitur AB est ęqualis LX, atque est AB ipsi BC æqualis; erit LX ęqualis BC; est autem LX æqualis XM. duæ igitur AB BC duabus LX XM æquales sunt: altera alteri; & AC basis basi LM ęqualis ponitur. quare angulus ABC angulo LXM est ęqualis. Eadem ratione & angulus quidẽ DEF est æqualis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL. Tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL ęquales sunt. Sed tres LXM MXN NXL quattuor rectis sunt æquales. ergo & tres ABC DEF GHK æquales erunt quattuor rectis. atqui ponuntur quattuor rectis minores, quod est absurdum. non igitur AB ipsi LX est æqualis. Dico præterea neque AB minorem esse ipsa LX. si enim fieri potest, sit minor, & ponatur ipsi quidem AB ęqualis XO, ipsi vero BC æqualis XP, & OP iungatur. Quoniam igitur AB est æqualis BC, & XO ipsi XP ęqualis erit. ergo & reliqua OL reliquę PM est æqualis, at propterea LM parallela est ipsi OP; & LMX triangulum triangulo OPX æquiangulum. est igitur vt XL ad LM, ita XO ad OP, & permutando vt LX ad XO, ita LM ad OP. maior autem est LX, quàm XO. ergo & LM quam OP est maior. Sed LM posita est æqualis AC. & AC igitur quàm OP maior erit. Itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus OX XP ęquales sunt, & basis AC maior basi OP; erit angulus ABC angulo OXP maior. Similiter demonstrabimus & DEF angulum maiorẽ esse angulo MXN, & angulum GHK angulo NXL. Tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM

Ex antecedente. 22.primi.



5 quarti.

8.primi.

Corol 15 primi.

2.sexti.

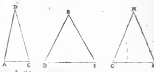
4.sexti.

25 primi.

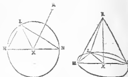
MXN

MXN NXL sunt maiores. At anguli ABC DEF GHK quattuor rectis minores ponuntur. multo igitur anguli LXM MXN NXL minores erunt quattuor rectis. Sed
Coro. 15 primi & equales: quod est absurdum. non igitur AB minor est, quàm LX. ostensum autem
12. huius. est neque esse æqualem. ergo maior sit necesse est. constituatur à puncto X circuli LMN plano ad rectos angulos XR, & excessui, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, ponatur equale quadratum quod fit ex RX, & RL RM RN iungantur.
3 diffi. Quoniam igitur RX perpendicularis est ad planum LMN circuli, & ad vnamquamque ipsarum LX MX NX erit perpendicularis. Et quoniam LX est æqualis
4 primi. XM, communis autem & ad rectos angulos XR, erit basis LR æqualis basi RM. Eadem ratione & RN vtrique ipsarum RL RM est equalis. Tres igitur rectæ lineę RL RM RN inter se æquales sunt. Et quoniam quadratum XR ponitur ęquale excessui, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB quadratis
47. primi. ex LX XR æquale. quadratis autem ex LX XR ęquale est quadratũ ex RL; rectus enim angulus est LXR. ergo quadratum ex AB quadrato ex RL æquale erit; ideoq; AB ipsi RL est ęqualis. sed ipsi quidem AB æqualis est vnaquæque ipsarum BC DE EF GH HK; ipsi vero RL æqualis vtraque ipsarum RM RN. vnaquæque igitur ipsarum AB BC DE EF GH HK vnicuique ipsarum RL RM RN est æqualis. Quòd cum duæ LR RM duabus AB BC ęquales sint, & basis LM ponatur
8 primi. æqualis basi AC; erit angulus LRM æqualis angulo ABC. Eadem ratione & angulus quidem MRN angulo DEF, angulus autem LRN angulo GHK est æqualis. ex tribus igitur angulis planis LRM MRN LRN, qui ęquales sunt tribus datis ABC DEF GHK solidus angulus constitutus est ad R, qui angulis LRM MRN LRN continetur.

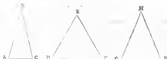
Sed sit centrum circuli in vno laterum trianguli, videlicet in MN, quod sit X, & XL iungatur. Dico rursus AB maiorem esse ipsa LX. Si enim non ita sit, vel AB est æqualis LX vel ipsa minor. sit primum æqualis. duę igitur AB BC, hoc est DE EF



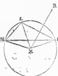
duabus MX XL, hoc est ipsi MN æquales sunt. sed MN ponitur ęqualis DF. ergo DE EF
20 primi. ipsi DF sunt ęquales. quod fieri non potest. non igitur AB est æqualis LX. similiter neq; minor. multo enim magis id quod fieri non potest, sequeretur. ergo AB ipsa LX maior est. & similiter si excessui quo quadratũ ex AB superat quadratũ ex LX ęquale ponatur, vt quadratum ex RX. & ipsa RX circuli plano ad rectos angulos constituatur, fiet problema.



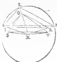
Sed sit centrum circuli extra triangulum LMN, quod sit X, & LX MX NX iungantur. Dico & sic AB ipsa LX maiorem esse. si enim non ita sit, vel æqualis erit, uel minor. sit primum æqualis. ergo duæ AB BC duabus MX XL ęquales sunt, altera alteri;
8 primi & basis AC est æqualis basi ML. angulus igitur ABC æqualis est angulo MXL. Eadem



dem ratione & GHK angulus ipſi LXN eſt ęqualis; ac propterea totus MXN ęqualis duobus ABC GHK. ſed & anguli ABC GHK angulo DEF maiores ſunt. & angulus igitur MXN ipſo DEF eſt maior. Et quoniam duæ DE EF duabus MX XN æquales ſunt, & baſis DF, ęqualis baſi MN, erit MXN angulus angulo DEF æqualis. oſtenſus autem eſt maior, quod eſt abſurdum. non igitur AB eſt æqualis LX. deinceps vero oſtendemus neque minorem eſſe. quare maior neceſſario erit. & ſi rurſus circuli plano ad rectos angulos cōſtituamus XR, & ipsā ęqualē ponamus lateri quadrati eius, quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX, problema conſtituetur. Itaque dico neque minorem eſſe AB ipſa LX. ſi enim fieri poteſt, ſit minor; & ipſi quidem AB ęqualis ponatur XO, ipſi vero BC ęqualis XP, & OP iungatur. Quoniam igitur AB ipſi BC eſt æqualis, erit ex XO æqualis XP. ergo & reliqua OL reliquæ PM ęqualis. parallela igitur eſt LM ipſi PO, & triangulum LMX triangulo PXO æquiangulum. quare vt XL ad LM, ita XO ad OP: & permutando vt LX ad XO, ita LM ad OP. maior autem eſt LX quàm XO. ergo LM quàm OP eſt maior, ſed LM eſt æqualis AC. & AC igitur quàm OP maior erit. Itaque quoniam duę AB BC duabus OX XP ſunt ęquales, altera alteri; & baſis AC maior eſt baſi OP; erit angulus ABC angulo OXP maior. ſimiliter & ſi XR ſumatur ęqualis vtriq; ipſarum XO XP, & iungatur OR, oſtendemus angulum GHK angulo OXR maiorem. conſtituatur ad rectam lineam LX, & ad punctum in ipſa X angulo quidem ABC æqualis angulus LXS, angulo autem GHK ęqualis LXT, & ponatur vtraque XS XT ipſi OX æqualis iunganturq; OS OT ST. Et quoniam duæ AB BC duabus OX XS æquales ſunt, & angulus ABC ęqualis angulo OXS, erit baſis AC, hoc eſt LM baſi OS æqualis. Eadem ratione & LN eſt æqualis ipſi OT. Quòd cum duæ ML LN duabus OS ST ſint æquales, & angulus MLN maior angulo SOT, erit et baſis MN baſi ST maior. ſed MN eſt æqualis DF. ergo et DF quam ST maior erit. Quoniam igitur duæ DE EF duabus SX XT æquales ſunt, et baſis DF maior baſi ST, erit angulus DEF angulo SXT maior. æqualis autē eſt angulus SXT angulis ABC GHK. ergo DEF angulus angulis ABC GHK maior eſt. ſed et minor, quod fieri non poteſt.







2 sexti.
4 sexti.



25 primi.

4 primi.

42 primi.

25 primi.

LEMMA

L E M M A.

Quo autem modo sumatur quadratum ex RX æquale ei, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, ita ostendemus.

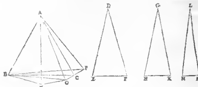


Exponâtur rectę lineæ AB LX, sitq; maior AB, & in ipsa describatur semicirculus A C B, in quo aptetur recta linea AC ipsi LX æqualis, & BC iungatur. Itaque quoniam in semicirculo ABC angu-
31 tertii. lus est AGB, erit A C B rectus. quadratum igitur
47.primi. quod fit ex AB ęquale est, & quadrato quod ex A C, & ei, quod ex C B. ergo quadratum ex A B superat quadratum ex AC, quadrato ex CB. æqualis autem est AC ipsi LX. quadratum igitur ex AB superat quadratum ex LX, quadrato ex C B. Quare si ipsi CB æqualem sumamus XR, quadratum ex AB superabit quadratum ex LX, eo quod fit ex R X quadrato.

S C H O L I V M.

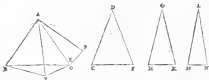
P R O P O S I T I O I.

Si fuerint quotlibet anguli plani, quorũ vno reliqui sint maiores quomodocumque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineę æquales. Dico & rectarum linearum angulos subtendentium, vna reliquas maiores esse quomodocumque sumptas: hoc est fieri posse, vt ex iis, quæ rectas lineas coniungunt multorum laterum figura constituatur.

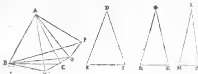


Vt si dati fuerint quattuor anguli ad puncta A D G L, quorum tres reliquo sint maiores quomodocumq; sumpti. æquales autem sint rectæ lineæ BA AC ED DF HG GK ML LN. & iungantur BC EF HK MN. Dico ipsarum BC EF HK MN tres reliqua maiores esse, quomodocumque sumptas. si enim æquales sint anguli ad puncta A D G L, & latera BC EF HK MN ęqualia erunt. & manifestum est tres vna reliqua esse maiores, quomodocumque accipiâtur. si vero inęquales sint, sit ma-
24 primi. ior qui ad A. basis igitur BC singulis ipsarum EF HK MN maior est. quare BC cũ vna earum reliquis quibuslibet est maior & cum duabus reliqua multo maior erit. Dico etiam EF HK MN ipsa BC maiores esse. Quoniam enim angulus ad A ma-
23 primi. ior est singulis ipsorum D G L, constituatur ad BA rectam lineam, & ad pũctum in ipsa A angulo, qui ad D æqualis angulus BAX, & ad rectam lineam AX, & ad pũctũ in ipsa A angulo, qui ad G æquali cõstituto angulo XAO, vel AO cadet intra lineã AC, vel in ipsam, vel extra ipsam. Cadat primũ intra, & ad rectam lineam OA, & ad

& ad punctum in ipsa A angulo qui ad L equalis fiat angulus OAP. cadet AP extra lineam AC, propterea quòd tres anguli D G L reliquo sunt maiores. & ipsis AB AC equales ponatur AX AO AP: iungātur q; BX XO BO OP BP. Qm̄ igitur due BA AP duabus BA AC sunt æquales, angulus aūt BAP maior est angulo BAC; erit & BP basis basi AC maior. Sed ipsa BP maiores sunt BO OP. quare BO OP ipsa BC sunt multo maiores. suntq; BX XO maiores, quàm BO. ergo BX XO OP mul- 24 primi.



to maiores sunt ipsa BC. atque est BX quidem equalis ipsi EF, quoniam & angulus BAX æqualis est angulo EDF, XO vero est equalis HK, & OP ipsi MN. quare EF HK MN ipsa BC multo maiores erunt. Sed recta linea, quæ cum AX continet angulum æqualem angulo G cadat in ipsam AC, vt in secunda figura: & BX XC CP iungantur. Itaque quoniam BX XC ipsa BC maiores sunt, & sunt BX XC CP æquales ipsis EF HK MN, erunt EF HK MN ipsa BC multo maiores. Denique recta linea AO, quæ cum AX continet angulum angulo G æqualem, cadat extra AC, ut in tertia figura: ponaturq; æqualis ipsi AP: & iungantur BP BO OP BX XO. Quoniam 4. primi.

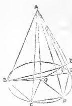


igitur duæ BA AP duabus BA AC æquales sunt, angulus autem BAP maior est angulo BAC; erit BP quàm BC maior. Rursus quoniam BO OP maiores sunt quā BP; & BX XO maiores quàm BO; erunt BX XO OP quàm BP multo maiores. Sed BP est maior BC. quare BX XO OP multo maiores sunt ipsa BC: sūtq; BX XO OP ipsis EF HK MN æquales. ergo EF HK MN ipsa BC multo maiores sunt. Et quoniam tres reliqua maiores sunt, quomodocumque sumptæ, fieri potest, vt ex ipsis quadrilaterum ipsam constituatur. 24 primi.

P R O P O S I T I O II.

Si in aliquod planū à quodam sublimi puncto æquales rectę lineę cadant, in circuli erunt circumferentia, & quæ à dicto puncto ad centrum circuli ducitur ad circulum perpendicularis erit.

A' puncto enim A in subiectum planum æquales rectæ lineæ cadāt AB AC AD AE ad puncta B C D E. Dico ea puncta in circuli circumferentia esse. Iungantur enim in subiecto plano BC CD DE EB, & circa BCD triā gulum circulus describatur BCDF, ergo puncta BCD in circuli circumferentia sunt. Dico etiam ipsum E in circumferētia esse. non enim, sed si fieri potest, vel extra vel intra cadat. & primum cadat extra, & sumpto circuli centro G, ab eo ad puncta B C D E rectę lineæ ducantur GB GC GD GE, vt GE circulum in puncto F secet, & iungantur AE AG. Quoniā igitur AB ipsi AC est æqualis, est autem & BG ęqualis CG: duæ AB BG duabus AC CG æquales sunt. & basis AG est vtrique communis.



8.primi. angulus igitur ABG angulo ACG est æqualis,
triangulumq; triangulo, & reliqui anguli reliquis angulis æquales. ergo angulus
AGB æqualis est angulo AGC. Eadem ratione & angulus AGC angulo AGD æ-
qualis erit. Quòd cum AG ad plures quàm duas rectas lineas in eodem existentes
4.huius. plano rectos angulos efficiat, ad planum quod per ipsas ducitur perpendicularis
erit. quare ad circulum ipsum. Itaque quoniam GD ipsi GF est æqualis, communis
4.primi. autem & ad rectos angulos GA; erit basis AD basi AF ęqualis. ergo & vnaqueque
16 primi. ipsarum AB AC AE æqualis est ipsi AF. Et quoniam angulus AFE maior est re-
cto AGF, quòd exterior sit, erit angulus AEF recto minor. trianguli igitur AEF an-
19 primi. gulus qui est ad F maior est angulo qui ad E. quare & latus AE maius est latere AF.
sed & ostensum est æquale. quod est absurdum. non igitur punctum E extra circuli
circumferentiam cadit. similiter ostendemus neque cadere intra. ducentes enim ad
ipsum rectam lineam, & ad circumferentiam protendentes, rursusq; ab A ad dictū
punctum rectam lineam iungentes, ostēdemus ipsam & ęqualem esse, & minorem.
quod est absurdum. At si neque extra cadit, neq; intra; relinquitur vt in ipsam cir-
cumferentiam cadat. ergo AB AC AD AE in circuli sunt circumferentia, & AG
ad ipsum circulum est perpendicularis. quod demonstrare oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est omnis anguli solidi, qui æquicruribus planis continetur, basim ipsam in circulo describi.

PROPOSITIO III.

Ex planis quotlibet datis angulis, quorum vno reliqui sint maiores quomodocūq; sumpti, solidū angulū cōstituere. oportet aūt datos angulos quattuor rectis esse minores.

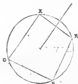


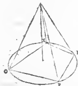
Sint dicti anguli BAC EDF HGK MLN. oportet ex angulis qui sunt ad puncta A D G L solidum angulum constituere. sumantur æquales rectæ



lin eæ, quæ ipsos angulos continent,& iungantur BC EF HK MN. æquicruria igitur sunt triangula, quæ vno quouis angulo reliquos maiores habent, quomodocumque sumptos. ergo BC EF HK MN quadrilaterum efficiet. fiat & sit X O P R. Et quoniã oportet ex æquicruribus triangulis B AC EDF HGK MLN solidum angulum constituere: omnis autem solidi

Ex corol. antecedent.





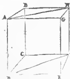
anguli, qui æquicruribus triangulis continetur basim circumscribit circulus; & anguli solidi contenti triangulis BAC EDF HGK MLN, basim circulus circumscribet. dicti vero anguli basis constat ex basibus ipsorum triangulorum, videlicet XO PR ergo quadrilaterum XOPR circulus circũscribit. Et deinceps eadem construentes iis, quæ dicta sunt in angulo solido pro basi triangulum habente propositum efficiemus.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIIII.

Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia & parallelogramma erunt.

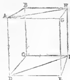
Solidum enim CDGH parallelis planis AC GF AH DF FB AE contineatur. Dico opposita eius plana, & æqualia & parallelogramma esse. Quoniam enim duo plana parallela BG CE, à plano AC secantur, communes ipsorum sectiones parallelæ sunt. ergo AB ipsi CD est parallela. Rursus quoniã duo plana parallela BF AE secantur à plano AC, cõmunes ipsorum sectiones parallelæ sunt. parallela igitur est AD ipsi BC ostẽsa autem est & AB parallela CD. ergo AC parallelogrammum erit. similiter demonstrabimus, & vnumquodque ipsorum DF F G GB BF AE parallelogrammum esse. Iũgantur AH DF Et quoniam parallela est AB quidem ipsi DC; BH vero ipsi CF, erunt duę AB BC se se tangentes duabus DC CF se se tangentibus parallelæ, & non in eodem plano. quare ęquales angulos continebunt. angulus igitur ABH an- 10. huius.

16. huius.



 gulo

gulo DCF est æqualis. Et quoniam duę AB BH duabus DC CF ęquales sunt, & angu-
34 primi. lus ABH æqualis angulo DCF, erit basis A
4. primi. H basi DF ęqualis: & ABH triãgulum æqua
le triangulo DCF. Quòd cum ipsius quidem
41 primi. ABH triãguli duplũ sit BG parallelogrãmũ; ipsius vero DCF trianguli duplum parallelogrãmũ CE: erit BG parallelogrãmũ æquale parallelogrãmo CE. similiter demonstrabimus & AC parallelogrammum parallelogrammo GF, & parallelogrammum AE parallelogrammo BF æquale esse. Si igitur solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia & parallelogramma sunt, quod oportebat demonstrare.



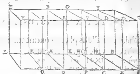
F. C. COMMENTARIVS.

COROLLARIVM.

Ex iam demonstratis constat, si solidum parallelis planis contineatur opposita
c. diff. sexti. ipsius plana, & æqualia esse, & similia, quippe quę & singulos angulos ęquales, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXV.

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit vt basis ad basim, ita solidum ad solidum.



Solidũ enim parallelepipedum ABCD plano YE secetur, oppositis planis RA DH parallelo. Dico vt AEFΦ basis ad basim EHCF, ita esse ABFY solidum ad solidũ EGCD. producatur enim AH ex vtraq; parte, & ponantur ipsi quidem EH æquales quotcumque HM MN; ipsi uero AE æquales quotcumque AK KL, & compleantur parallelogramma LO KΦ HX MS, & solida LP KR DM MT. Quoniam
1. sexti. igitur æquales inter se sunt LK KA AE rectæ lineæ; erunt & parallelogramma LO
Ex antecedente. KΦ AF inter se æqualia: itemq; æqualia inter se parallelogramma KX KB AG, & adhuc parallelogramma LΨ KP AR inter se æqualia; opposita enim sunt. Eadem ratione & parallelogramma EC HX MS ęqualia inter se; itemq; parallelogramma HG HI IN inter se æqualia: & insuper parallelogramma DH MΩ NT. tria igitur plana solidorum LP KR AY tribus planis æqualia sunt. sed tria tribus oppositis sunt æqualia. ergo tria solida LP KR AY inter se æqualia erunt. Eadem ratione & tria solida ED DM MT sunt æqualia inter se. quotuplex igitur est basis LF ipsius AF basis, totuplex est & LY solidum solidi AY. Et eadem ratione quotuplex est NF basis ipsius basis HF, totuplex est & solidum NY ipsius HY solidi: & si basis LF est

est æqualis basi NF, & solidum LY solido NY ęquale erit. & si basis LF superat NF basim, & LY solidum solidum NY superabit, & si minor, minus. quattuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus AF FH, & duobus solidis AY YH sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem AF, & AY solidi, videlicet basis LF, & solidum LY. basis vero HF, & HY solidi, nempe basis NF & solidum NY. & demõstratum est si basis LF superat basim NF, & LY solidum solidum NY superare, & si ęqualis æquale, & si minor minus. est igitur vt AF basis ad basim FH, ita AY solidũ ad solidum YH Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis planis parallelo; erit vt basis ad basim, ita solidũ ad solidũ. quod oportebat demonstrare.

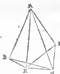
F. C. COMMENTARIVS.

Quod si solidum parallelepipedum secetur plano basibus parallelo; erit solidum ad solidum, vt altitudo ad altitudinem.

Hoc enim nos demonstrauimus in libro de centro grauitatis solidorum propositione XVIII.

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO. XXVI.

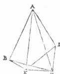
Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem solidum angulum constituere.





Sit data quidem recta linea AB, datum autem in ipsa pũctum A, & datus solidus angulus ad D, qui EDC EDF FDC angulis planis cõtineatur. oportet ad datam rectam lineã AB, & ad datum in ipsa punctum A, dato angulo solido ad D æqualẽ solidum angulum constituere. sumatur enim in linea DF quod vis punctum F, à quo ad planum per ED DC transiens ducatur perpendicularis FG, 11. huius.
& plano in puncto G occurrat; iungaturq; DG, & ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, angulo quidem EDC æqualis angulus constituatur BAL; 23 primi
angulo autem EDG constituatur æqualis BAK deinde ipsi DG ponatur ęqualis AK, & à puncto K plano per BAL ad rectos angulos erigatur KH; ponaturq; ipsi GF 12. huius.
ęqualis KH, & HA iungatur. Dico angulum solidum ad A, qui angulis BAL BAH HAL continetur, æqualem esse solido angulo ad D angulis EDC EDF FDC contẽto. sumantur enim æquales rectę lineæ AB DE, & iungantur HB KB FE GE Quoniam igitur FG perpendicularis est ad subiectũ planum; & ad omnes rectas lineas, 3 diff.
quę ipsam contingunt, suntq; in subiecto plano rectos faciet angulos. Vterque igitur angulorũ FGA FGD FGE rectus est. Eadẽ ratione, & vterq; ipsorum HKA HKB est rectus. Et quoniam duę KA AB duabus GD DE ęquales sunt altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis BK basi EG ęqualis. est autem & KH ęqualis 4 primi.
GF, atque angulos rectos continent. ęqualis igitur et HB ipsi FE. Rursus quoniam duæ AK KH duabus DG GF æquales sunt, et rectos continent angulos; erit basis 4 primi.
AH basi DF æqualis: estq; AB æqualis DE. duę igitur HA AB duabus FD DE sunt ęquales; et basis HB est ęqualis basi FE. ergo angulus BAH angulo EDF ęqualis 8 primi.
erit. Eadem ratione et angulus HAL angulo FDC est æqualis, quandoquidem si assumamus æquales AL DC, et iungamus KL HL GC FC, quoniam totus BAL est ęqualis

æqualis toti EDC, quorum BAK ipsi EDG ponatur æqualis; erit reliquus KAL æqualis reliquo GDC. Et quoniã duæ KA AL duabus GD DC æquales sunt, et angulos æquales continent;
4 primi. basis KL basi GC æqualis erit. est autem et KH æqualis GF. duæ igitur LK KH duabus DC GF sunt æquales; angulosq; rectos continent. ergo basis HL æqualis est basi FC. Rursus quoniam duæ HA AL duabus FD
8 primi. DC æquales sunt, & basis HL æqualis basi FC; erit angulus HAL æqualis angulo FDC. atque est angulus BAL æqualis angulo EDC æqualis. Ad datam igitur rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualis angulus solidus constitutus est. quod facere oportebat.

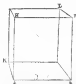


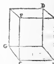


PROBLEMA V. PROPOSITIO XXVII.

A data recta linea dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Sit recta quidẽ linea AB; datum vero solidũ parallelepipedum CD. oportet à data recta linea AB dato solido parallelepipedo CD simile, & similiter positũ solidum parallelepipedum
Ex antecedente. describere. constituatur enim ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A angulo solido ad C æqualis angulus, qui angulis BAH HAK KAB continetur, ita vt angulus quidem BAH æqualis sit angulo ECF, angulus vero BAK angulo ECG, & adhuc angulus KAH angu-
12. sexti. lo GCF, & fiat vt EC ad CG, ita BA ad AK; vt autem GC ad CF, ita KA ad AH. ergo ex æquali vt EC ad CF, ita erit BA ad AH. compleatur parallelogrammum BH, & AL solidum. Quoniam igitur est vt EC ad CG, ita BA ad AK, & circa æquales an-
1. diffi. sexti. gulos ECG BAK latera sunt proportionalia; erit parallelogrammum KB parallelogrammo GE simile. Eadem quoque ratione parallelogrammum KH simile est parallelogrammo GF, & parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur pa-
24 huius rallelogrãma solidi AL tribus parallelogrãmis solidi CD similia sunt. sed tria tribus oppositis sunt æqualia, & similia Ergo totũ AL solidum toti solido CD simile erit. A data igitur recta linea AB dato solido parallelepipedo CD simile, & similiter positum solidum parallelepipedum AL descriptum est. quod facere oportebat.



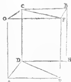


THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVIII.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum

positorum planorum ab ipso plano bifariam secabitur.

Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF secetur per diagonales oppositorũ planorum, videlicet CF DE. Dico solidum AB à plano CDEF bifariam secari. Quoniam enim æquale est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero ADE triangulo DEH; est autem & CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale, oppositum enim est, & parallelogrammum GE æquale parallelogrammo C H: erit prisma contentum duobus triangulis C GF ADE, & tribus parallelogrammis GE AC CE æquale prismati, quod continetur duobus triangulis CFB DEH, & tribus parallelogrammis CH BE CE; etenim æqualibus planis, & numero & magnitudine continentur. ergo totum AB solidum à plano CDEF bifariã secatur. quod demonstrare oportebat.

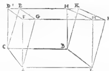


THEOREMA XXIIII. PROPOSITIO XXIX.

Solida parallelepipeda, quę in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum stãtes A F AG LM LN CD CE BH BK sint in eisdem rectis lineis FN D K. Dico solidum CM solido CN ęquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est vtrumque ipsorum CH CK; erit CB vtrique ipsarum DH EK æqualis, ergo & DH est æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE ęqualis est reliquæ HK. quare & DEC triangulum est ęquale triangulo HKB. parallelogrammum autẽ DG est æquale parallelogrammo HN. Eadem ratione & AFG triangulum ęquale est triangulo LMN est autem parallelogrammum CF parallelogrammo BM, & parallelogrammũ CG parallelogrammo BN æquale: opposita enim sunt. ergo & prisma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD D G GC est æquale prismati, quod duobus triangulis LMN HBK, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur solidum, cuius basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi GEHM. ergo totum CM solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo CN est ęquale. solida igitur parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. quod demonstrare oportebat.

34. primi.
1 sexti.
24. huius.



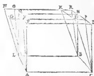
THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXX.

Solida parallelepipeda, quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint

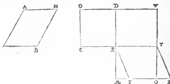
Sint in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN, & eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE BH BK non sint in eisdem rectis lineis. Dico solidũ CM solido CN ęquale esse. producatur enim NK DH & GE FM, coueniantq; inter se in punctis RX: & adhuc producantur FM GE ad O P puncta: & AX LO CP BR iungantur. solidum CM, cuius basis quidē ACBL parallelogrammum, oppositum autem ipsi FDHM est æquale solido CO, cuius basis parallelogrammum ACBL, & ei oppositũ X P R O, in eadem enim sunt basi ACBL, & ipsorum stantes AF AX LM LO CD CP BH BR sunt in eisdem rectis lineis FO DR. Sed solidum CO, cuius basis quidem parallelogrãmum ACBL, oppositum autem ipsi XPRO est æquale solido CN, cuius basis ACBL parallelogrã mum, & ipsi oppositum GE KN. etenim in eadem sunt basi ACBL, & eorum stantes AG AX CE CP LN LO BK BR sunt in eisdem rectis lineis GP NR. quare & CM solidum solido CN æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quæ in eadē sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdē rectis lineis, inter se sunt ęqualia. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente.



THEOREMA XXVI. PROPOSITIO. XXXI.

Solida parallelepipeda, quæ in æqualibus sunt basibus, & eadē altitudine inter se sunt æqualia.

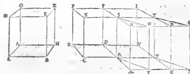


Sint in æqualibus basibus AB CD solida parallelepipeda AE CF, & eadē altitudine. Dico solidum AE solido CF æquale esse. sint autem primum stantes HK BE AG LM OP DF CΞ RS ad rectos angulos basibus AB CD: angulus autem ALB angulo CRD sit inæqualis, & producatur ipsi CR in directum RT: constituaturq; ad rectam lineam RT, & ad punctum in ipsa R, angulo ALB æqualis angulus RTY: & ponatur ipsi quidem AL æqualis RT, ipsi vero LB æqualis RY, & ad punctum Y ipsi RT parallela ducatur XY, compleaturq; basis RX, & ϯY solidum. quoniam igitur duæ TR RY duabus AL LB æquales sunt, & angulos continent æquales; erit parallelogrammum RX ęquale & simile parallelogrammo HL. Et quoniam rursus AL est æqualis RT, & LM ipsi RS, angulosq; ęquales continẽt, parallelogrammum Rϯ parallelogrammo AM æquale & simile erit. Eadem ratione LE parallelogrammum ipsi SY ęquale est & simile. tria igitur parallelogrãma solidi AE tribus parallelogrammis solidi ϯY æqualia & similia sunt. Sed & tria tribus

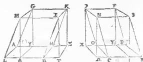
23 primi.

1. diff. sexti.

bus opposita & æqualia sunt & similia; totum igitur AE solidum parallelepipedũ 24 huius
toti solido parallelepipedo τY est æquale. producantur DR XY, conueniantq; inter se in puncto Ω, & per T ipsi DΩ parallela ducatur TQ; & producatur TQ OD, & conueniant in V, compleanturq; solida Ωτ RI. solidum igitur ΦΩ cuius basis est Rτ
parallelogrammum, oppositum autem ipsi Ωτ est æquale solido τY, cuius basis 29 huius
est Rτ parallelogrammum, & oppositum ipsi ϒΦ, in eadem enim sunt basi Rτ, & eadem altitudine, & eorum stantes RΩ RY TQ TX SZ SN Φτ τΦ in eisdẽ sunt rectis lineis ΩXZΦ. Sed solidum τϒ æquale est solido AE. ergo & τΩ solido AE est



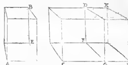
æquale. præterea quoniam parallelogrammum RYXT est æquale parallelogrammo ΩT, etenim in eadem est basi RT, & in eisdem parallelis RT ΩX. Sed parallelogrammum RYXT parallelogrammo CD est æquale, quoniam & ipsi AB; parallelogrammumq; ΩT æquale parallelogrammo CD. aliud autem parallelogrammum DT. est igitur vt CD basis ad basim DT, ita ΩT ad ipsam DT. Et quoniam
solidum parallelepipedum CI plano RF secatur planis oppositis parallelo; erit vt 25 huius
CD basis ad basim DT, ita solidum CF ad RI solidum. Eadem ratione quoniam solidum parallelepipedum ΩI secatur plano Rτ oppositis planis parallelo, vt ΩT basis ad basim CD, ita erit solidum Ωτ ad RI solidum. sed vt CD basis ad basim DT, ita basis ΩT ad ipsam TD. Vt igitur solidum CF ad RI solidum, ita solidum Ωτ ad solidum RI. Quòd cum vtrumque solidorum CF Ωτ ad solidum RI eandem
habeat proportionem, solidum CF solido Ωτ est æquale. solidum autem Ωτ osten- 9 quinti.
sum est æquale solido AE. ergo & AE ipsi CF æquale erit. sed non sint stantes AG HK BE LM CN OP DF RS ad rectos angulos ipsis AB CD basibus. Dico rursus solidum AE æquale esse solido CF. Ducãtur
à punctis K E G M P F N S ad subiectum pla- 8 huius
num perpendiculares KΞ ET GY MΦ PX Fτ NΩ SI, & plano in punctis Ξ T Y Φ X τ Ω I occurrãt, & iungantur ΞT YΦ XY TΦ Xτ XΩ ΩI τI.



æquale igitur est KΦ solidum solido PI; in æquali- Ex proxime
bus enim sunt basibus KM PS, & eadem altitudine; quorum stantes ad rectos angu- demonstratis.
los sunt basibus. sed KΦ solidum solido AE est æquale: solidum vero PI æquale soli- 30 huius
do CF. si quidem in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis. ergo & solidum AE solido CF æquale erit. Solida igitur parallelepipeda, quę in æqualibus sunt basibus, & eadem altitudine, inter se sunt æqualia. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO. XXXII.

Solida parallelepipeda, quę eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases.



Sint solida parallelepipeda AB CD, quæ eàdem altitudinem habeant. Dico inter se esse vt bases. hoc est vt AE basis ad basim CF, ita solidum AB ad CD solidum. applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammo AE ęquale FH, & à basi FH eadem altitudine ipsi CD solidum parallelepipedum GK compleatur. solidum igitur AB solido GK est æquale; in ęqualibus enim sunt basibus AE FH, & eadem altitudine. Itaque quoniam solidum parallelepipedum CK plano DG secatur, oppositis planis parallelo; erit vt HF basis ad basim FC, ita solidum HD ad DC solidum, atque est basis quidem FH basi AE æqualis: solidum vero GK æquale solido AB. est igitur & vt AE basis ad basim CF, ita solidum AB ad solidum CD. Quare solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases. quod demonstrare oportebat.

Ex antecedente

25 huius.

F. C. COMMENTARIVS.

Constat etiam solida parallelepipeda in eadem basi, vel in ęqualibus basibus constituta eam inter se proportionem habere, quam altitudines.

Quod nos demonstrauimus in libro de centro grauitatis solidorum, propositione XIX.

COROLLARIVM.

Ex his igitur & iam demonstratis sequitur prismata triãgulares bases habentia, quę vel in eisdem, vel æqualibus basibus constituũtur, & eadem altitudine inter se æqualia esse. Et insuper quæ eandem habent altitudinem inter se esse, vt bases. Et quę vel in eisdem vel æqualibus basibus constituuntur, inter se esse, vt altitudines.

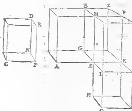
28 huius. *Sunt enim ea solidorum parallelepipedorum dimidia. per bases autem prismatis intelligimus non quascumque, sed alterum duntaxat oppositorum planorum similium & parallelorum, vt nũc in prismate triangularem basim habente, alterum triangulum, alioquin obstarent, quae in vltima proposit.one huius traduntur.*

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXIII.

Similia solida parallelepipeda inter se sunt in tripla proportione homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda AB CD; latus autem AE homologum sit lateri CF. Dico solidum AB ad CD solidum triplam proportionem habere eius, quã habet AE ad CF. producantur enim EK EL EM in directum ipsis AE GE HE: & ipsi quidem CF æqualis ponatur EK, ipsi vero FN ęqualis EL, & adhuc ipsi FR ęqualis EM, & KL parallelogrammum, & KO solidum compleatur Quoniam igitur duę KE EL duabus CF FN æquales sunt; sed & angulus KEL angulo CFN est ęqualis; quod & angulus AEG ipsi CFN ob similitudinem solidorum AB CD: erit & KL parallelogrammum simile parallelogrammo CN. Eadem ratione & parallelogrammum

mum KM æquale est & simile parallelogrammo CR, & adhuc parallelogrammum OE ipsi DF parallelogrammo. tria igitur parallelogramma solidi KO tribus parallelogrammis CD solidi æqualia & similia sunt. Sed tria tribus oppositis æqualia sũt & similia. totum igitur KO solidum æquale est & simile toti solido CD.



24 huius.

compleatur GK parallelogrãmũ, & a basibus quidẽ GK KL parallelogrãmis, altitudine vero eadẽ ipsi AB solida cõpleãtur AX LP. Et quũ ob similitudinẽ solidorũ AB CD est vt AE ad CF, ita EG ad FN, & EH ad FR; æqualis aũt FC ipsi EK, & FN ipsi EL, & FR ipsi EM: erit vt AE ad EK, ita GE ad EL, & HE ad EM sed vt AE quidẽ ad EK, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK: vt autem GE ad EL, ita GK ad KL: & vt HE ad EM, ita PE ad KM. & vt igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GK ad KL, & PE ad KM. sed vt AG quidem ad GK, ita AB solidum ad solidũ EX. vt autem GK ad KL, ita solidum XE ad PL solidum: & vt PE ad KM, ita PL solidum ad solidum KO. & vt igitur solidum AB ad solidum EX, ita EX ad PL, & PL ad KO. si autem quattuor sint magnitudines deinceps proportionales prima ad quartam triplam proportionem habet eius, quàm ad secundam. ergo & AB solidum ad solidum KO triplam habet proportionem eius, quam AB ad EX. sed vt AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, & AE recta linea ad ipsam EK. quare & AB solidum ad solidum KO triplam proportionem habebit eius, quã AE habet ad EK. æquale autem est solidum KO solido CD, & recta linea EK rectæ CF est æqualis. ergo & AB solidum ad solidum CD triplam habet proportionẽ eius, quam latus ipsius homologum AE habet ad CF homologum latus. quod demonstrare oportebat.

1 sexti.

Ex antecedente.

11 quinti. 11 diffi quinti.

Ex antecedente. 1 sexti.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, si quattuor rectæ lineæ proportionales fuerint, vt prima ad quartam, ita esse solidum parallelepipedum, quod fit à prima ad solidum, quod à secunda simile, & similiter descriptum; quoniam & prima ad quartam triplam proportionẽ habet eius, quam ad secundam.

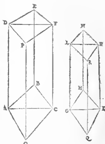
F. C. COMMENTARIVS.

Ex proxime demonstratis, sequitur prismata similia, quę triangulares bases habent in tripla esse proportione homologorum laterum.

Sint similia prismata triangulares bases habentia, & similiter posita AF GN, & prismatis quidem AF basis sit triangulum ABC, & quod ipsi opponitur DEF prismatis uero GN basis sit triangulum GHK, & ipsi oppositum LMN. Sit autem latus AB homologum lateri GH. Dico prisma AF ad prisma GN triplam habere proportionem eius, quam habet AB ad GH. Com-

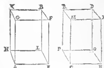
 pe- tur

pleantur enim solida parallelepipeda, & sit solidi quidē parallelepipedi AF basis quadrilaterum AECO, & ipsi oppositum quadrilaterū DEFP solidi vero parallelepipedi GN basis sit quadrilaterū GHKQ, & quod ipsi opponitur LMNR. Itaque qm̄ prisma AF ponitur simi-
9 diff. huius *le prismati GN, erit parallelogrammm ABED*
24. huius. *simile parallelogrammo GHML. quare & ipsi oppositum parallelogrāmum OCFP simile erit parallelogrammo QKNR. & eadem ratione demonstrabitur parallelogrammum AOPD simile ipsi GQRL. solidum igitur parallelepipedum AF simile est solido parallelepipedo GN. similia autem solida parallelepipeda in tripla sint proportione homologorū laterū. quare & ipsorum dimidia in eadē proportione erūt. prisma igitur AF ad prisma GN triplā proportionē habebit eius, quam habet AB ad GH. quod oportebat demonstrare.*



THEOREMA XXIX.
PROPOSITIO XXXIIII.

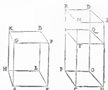
Aequalium solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent: & quorum solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt æqualia.



Sint æqualia solida parallelepipeda AB CD. Dico ipsorum bases ex contraria parte altitudinibus respōdere: hoc est vt EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Sint enim primū stantes AG EF LB HK CM NX OD PR ad rectos angulos basibus ipsorū. Dico ut EH basis ad basim NP, ita esse CM ad AG. Si igitur basis EH basi NP sit ęqualis, est autem & AB solidum æquale solido CD; erit & CM æqualis ipsi AG. si enim basibus EH NP æqualibus existentibus non sint AG CM altitudines ęquales, neque AB solidum solido CD æquale erit. ponitur autem æquale. non igitur inæqualis est altitudo CM altitudini AG. ergo æqualis sit necesse est; ac propterea vt EH basis ad basim NP, ita erit CM ad AG. ex quibus constat solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex contraria parte altitudinibus respondere. At vero non sit basis EH æqualis basi NP. Sed EH sit maior. est autem & AB solidum solido CD æquale. ergo maior est CM ipsa AG; alioqui rursus sequeretur solida AB CD æqualia non esse, quæ ponuntur ęqualia. Itaque ponatur CT æqualis ipsi AG: & à basi quidem NP, altitudine autem CT solidum parallelepipedum VC compleatur. Quoniam igitur solidum AB solido CD est æquale, aliud autem aliquod est VC, & æqualia ad idem eandem habēt proportionem; erit vt AB solidum
7 quinti. ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. sed vt AB solidum ad solidum CV,
32 huius. ita basis EH ad NP basim ęquealta enim sunt AB CV solida. Vt autem solidum
25 huius. CD ad ipsum CV, ita MP basis ad basim PT, & MC ad CT. & vt igitur basis EH ad
1. sexti. NP basim, ita MC ad CT. est autem CT æqualis AG. ergo & vt EH basis ad basim

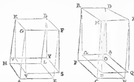
NP, ita

NP, ita MC ad AG. quare solidorum parallelepipedorum AG CD bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex contraria parte respondeant altitudinibus: sitq; vt EH basis ad basim MP, ita solidi CD altitudo ad altitudinē solidi AB. Dico solidum AB solido CD æquale esse. Sint enim rursus stātes ad rectos angulos basibus. & si quidem basis EH sit æqualis basi NP, estq; vt EH basis ad basim NP, ita

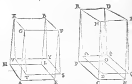


altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem: erit solidi CD altitudo altitudini solidi AB æqualis. solida autem parallelepepida, quæ sunt in æqualibus basibus, & eadem altitudine inter se æqualia sunt. ergo solidum AB solido CD est ęquale. sed nō sit EH basis æqualis basi NP, & sit EH maior. maior igitur est & solidi CD altitudo altitudine solidi AB, hoc est CM ipsa AG. ponatur ipsi AG æqualis rursus CT, & similiter solidum CV compleatur. Itaque quoniam est vt EH basis ad basim NP, ita MC ad ipsam AC; æqualis autem est AG ipsi CT: erit vt basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. sed vt basis EH ad NP basim, ita AB solidum ad solidum CV; æquealta enim sunt solida AB CA. vt autem MC ad CT, ita & MP basis ad basim PT, & solidum CD ad CV solidum & vt igitur solidum AB ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. Quòd cum vtrumque solidorum AB CD ad ipsum CV eandē proportionē habeat; erit AB solidū solido CD æquale. quod demonstrare oportebat. 30. huius.

Non sint autem states FE BL GA KH XN DO MC RP ad rectos angulos basibus ipsorum & à punctis F G B K X M D R ad plana basium EH NP ducantur perpēdiculares, quę planis in punctis S T Y V Q Z Ω Φ occurant & cōpleantur solida FVXΩ. Dico & sic ęqualibus existentibus solidis AB CD,



bases ex contraria parte altitudinibus respondere, & vt EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Quoniam enim solidum AB solido CD est ęquale; solido autem AB ęquale est solidum BT; in eadem namq; sunt basi FK, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: & solidum DC est ęquale solido DZ, quòd in eadem sint basi XR, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis; erit & solidum BT solido DZ ęquale. ęqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos; bases altitudinibus ex contraria parte respondent. est igitur vt FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. atque est basis quidem FK basi EH æqualis, basis vero XR æqualis basi NP. quare vt EH basis ad basim NP, ita est altitudo solidi DZ ad solidi BT altitudinem. eędem autem sunt altitudines solidorum DZ BT, itemq; solidorum DC BA. est igitur vt EH basis ad basim NP, ita solidi DC altitudo ad altitudinem solidi AB ergo solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases ex cōtraria parte respōdeant altitudinibus sitq; vt EH basis ad basim NP, ita altitudo solid CD ad solidi AB altitudinem. Dico solidum AB solido CD ęquale esse. Iisdem namque constructis, 31. huius. Ex ante demonstratis.



ctis, quoniam vt EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinẽ solidi AB; & basis quidem EH est æqualis basi FK; NP vero ipsi XR: erit vt FK basis ad basim XR, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. eædẽ autem sunt altitudines solidorum AB CD, & ipsorũ BT DZ. est igitur vt FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. quare solidorũ BT DZ parallelepipedorũ bases ex contraria parte respondent altitudinibus; quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basibus ipsorum, & bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt æqualia. ergo BT solidum solido DZ est æquale. sed solidũ quidem BT ęquale est solido BA, etenim in eadem sunt basi FK, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: solidum vero DZ est æquale solido DC, si quidem in eadem sunt basi XR, & eadem altitudiue, & non in eisdem rectis lineis. ergo & solidũ AB solido CD est æquale. quod demonstrare oportebat.

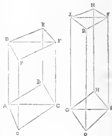
F. C. COMMENTARIVS.

Ex iis, quę ante dicta sunt, illud etiam demonstrari potest.

Aequalium prismatum & triangulares bases habentium bases ex cõtraria parte altitudinibus respondent: & quorum prismatum triangulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt ęqualia.

Sint prismata, quae triangulares bases habent AF GN inter se aequalia. Dico bases ex contraria parte altitudinibus respondere, hoc est vt triangulum ABC ad triangulum GHK, ita esse prismatis GN altitudinem ad altitudinem prismatis AF. Compleantur enim solida parallelepipeda, quę etiam inter se ęqualia erũt, cum sint prismatum dupla: ęqualium autem solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent ergo vt solidi parallelepipedi AF basis ad basim solidi parallelepipedi GN, hoc est vt quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, ita est solidi parallelepipedi GN

15.quinti. *altitudo ad altitudinem solidi parallelepipedi AF. sed vt quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, ita triangulum ABC ad triangulum CHK. Vt igitur triangulum ABC ad triangulum GHK, ita altitudo solidi parallelepipedi GN ad altitudinẽ solidi parallelepipedi AF, hoc est ita prismatis GN altitudo ad altitudinẽ prismatis AF. Rursus prismatum AF GN bases ex cõtraria parte respondeant altitudinibus, hoc est vt triangulũ ABC ad triangulũ GHK, ita sit prismatis GN altitudo ad altitudinem prismatis AF. Dico prismata AF GN inter se aequalia esse. compleantur enim rursus solida parallelepipeda, erit quadrilaterum ABCO ad quadrilaterum GHKQ, vt triangulum ABC*



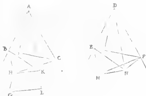
ad

ad triãgulum GHK. quare vt solidi parallelepipedi AF basis ad basim solidi parallelepipedi GN, ita erit prismatis GN altitudo ad altitudinẽ prismatis AF, hoc est, ita solidi parallelepipedi GN altitudo ad altitudinem solidi parallelepipedi AF. quorum autem solidorum parallelepipedorum bases ex cõtraria parte altitudinibus respondent, ea inter se sunt ęqualia. ergo et ęqualia erunt eorum dimidia. prisma igitur AF prismati GN est ęquale. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA X XX. PROPOSITIO XXXV.

Si sint duo anguli plani æquales, & in verticibus ipsorum sublimes rectæ lineæ constituantur, quæ cum rectis lineis à principio positis angulos contineant ęquales, alterum alteri; in sublimibus autem sumantur quęuis puncta, atque ab ipsis ad plana in quibus sunt anguli primi perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos iungantur rectæ lineę: cum sublimibus ęquales angulos continebunt.

Sint duo anguli rectilinei æquales BAC EDF. & à punctis AD sublimes rectæ lineæ AG DM constituantur, quę cum rectis lineis à principio positis æquales angulos contineãt, alterum alteri: angulum quidem MDE æqualem angulo GAB, angulum vero MDF angulo GAC æqualem: & sumantur in ipsis AG DM



quævis puncta G M, à quibus ad plana per BAC EDF ducantur perpendiculares GL MN, occurrentes planis in punctis L N, & L A ND iungantur. Dico angulum GAL angulo MDN ęqualem esse. ponatur ipsi DM ęqualis AH, & per H ipsi GL parallela ducatur HK. est autem GL perpendicularis ad planum per BAC. ergo & HK ad planum per BAC perpendicularis erit. Ducantur a punctis K N ad rectas lineas AB AC DF DE perpendiculares KC NF KB NE, & HC CB MF FE iungantur. Quoniam igitur quadratum ex HA æquale est quadratis ex HK KA; quadrato autem ex HA æqualia sunt ex KC CA quadrata; erit quadratum ex HA quadratis ex HK KC CA æquale. quadratis autem ex HK KC ęquale est quadratum ex HC. quadratum igitur ex HA quadratis ex HC CA ęquale erit & idcirco angulus HCA est rectus. Eadem ratione & angulus DFM rectus est. ergo angulus ACH ipsi DFM est æqualis. est autem & HAC angulus ęqualis angulo MDF. duo igitur triangula sunt MDF HAC duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & vnum latus vni lateri æquale, quod vni ęqualium angulorum subtenditur, uidelicet HA ipsi DM. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri. quare AC est ęqualis DF. Similiter demonstrabimus & AB ipsi DE æquale esse. iungantur HB ME. Et quoniam quadratum ex AH est æquale quadratis ex AK KH; quadrato autem ex AK æqualia sunt quadrata ex AB BK. erunt quadrata ex AB BK KH quadrato ex AH æqualia. Sed quadratis

8. huius
47. primi.
47 primi
48 primi.
26 primi

dratis ex BK KH æquale eſt ex BH quadratum, rectus enim angulus eſt HKB, propterea quòd & HK perpendicularis eſt ad ſubiectum planum. quadratũ igitur ex
47 primi AH æquale eſt quadratis ex AB BH. quare angulus ABH rectus eſt. Eadem ratione & angulus DEM eſt rectus. eſt autem & BAH angulus æqualis angulo EDM, ita
26 primi. enim ponitur: atque eſt AH ęqualis DM. ergo & AB ipſi DE eſt æqualis. Quoniam igitur A C quidem eſt æqualis DF, AB vero ipſi DE; erunt duæ CA AB duabus FD DE æquales. Sed & angulus BAC angulo F D E
4 primi. eſt æqualis. baſis igitur B C baſi E F, & triangulum triangulo, & reliqui anguli reliquis ęquales sũt. ergo angulus ACB angulo DFE. eſt autem & rectus ACK ęqualis recto DFN. quare & reliquus B C K reliquo E F N æqualis. Eadem ratione & C B K angulus eſt æqualis angulo FEN. Itaque duo triangula ſunt BCK EFN duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & vnum latus vni lateri ęquale, quod eſt ad æquales angu-
26 primi. los, videlicet BC ipſi EF. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebũt. æqualis igitur eſt CK ipſi FN. eſt autem & AC ipſi DF æqualis. quare duæ AC CK
4 primi. duabus DF FN ęquales ſunt, & rectos continent angulos. baſis igitur AK eſt æqualis baſi DN. Et cum AH ſit æqualis D M, erit & quod fit ex A H quadratum qua-
47 primi. drato ex DM æquale. Sed quadrato ex AH æqualia ſunt ex AK KH quadrata, etenim rectus eſt angulus AKH. quadrato autem ex DM ęqualia ſunt quadrata ex DN NM, quòd angulus DNM rectus ſit. quadrata igitur ex AK KH quadratis ex DN NM ſunt æqualia; quorum quadratum ex AK æquale eſt quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM eſt æquale. & ideo recta linea HK ipſi MN æqualis. quòd cum duæ H A AK duabus MD DN ęquales ſint, altera
8 primi. alteri, & baſis HK baſi NM oſtenſa ſit ęqualis; angulus HAK angulo MDN æqualis erit. quod oportebat demonſtrare.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi ſint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipſis autem conſtituantur ſublimes rectæ lineæ æquales, quę cum rectis lineis à principio poſitis æquales contineant angulos, alterum alteri; perpendiculares, quę ab ipſis ad plana in quibus ſunt primi anguli ducantur, inter ſe ęquales eſſe.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXVI.

Si tres rectę lineę proportionales ſint, ſolidum parallelepipedũ, quod à tribus fit ęquale eſt ſolido parallelepipedo, quod fit à media, ęquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint

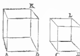
Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C, sitq; vt A ad B, ita B ad C. Dico solidum, quod fit ex ipsis ABC æquale esse solido, quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur solidus angulus ad E contentus tribus an

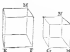


gulis planis DEG GEF FED; & ipsi quidem B ponatur æqualis vnaquæque ipsarum DE GE EF, & solidum parallelepipedum EK compleatur: ipsi vero A ponatur æqualis LM; & ad rectam lineam LM, & ad punctum in ipsa L constituatur angu 16.huius.
lo solido ad E æqualis angulus contentus NLX XLM MLN, & ponatur ipsi quidē B æqualis LX, ipsi vero C æqualis LN. Quoniam igitur est vt A ad B, ita B ad C, æqualis autem est A ipsi LM, & B vnicuique ipsarum LX EF EG ED, & C ipsi LN; erit vt LM ad EF, ita DE ad LN: & circum æquales angulos MLN DEF, latera ex cōtraria parte sibi ipsis respondent. ergo MN parallelogrammum parallelogrammo 14.sexti.
DF est æquale. Et quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt DEF NLM, & in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur LX EG æquales inter se, & cum rectis lineis à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt perpendi Ex antecedenti.
culares, quæ à punctis G X ad plana per NLM DEF ducuntur, inter se æquales. ergo solida LH EK eadem sunt altitudine. Quæ vero in æqualibus basibus sunt soli- 31.huius.
da parallelepipeda, & eadem altitudine inter se sunt æqualia. ergo solidum HL æquale est solido EK: atque est solidum quidem HL, quod fit à tribus ABC, solidum vero EK quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum, quod à tribus fit æquale est solido parallelepipedo, quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO. XXXVII.

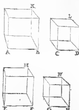
Si quattuor rectæ lineæ proportionales sint, & quæ ab ipsis fiūt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quę ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.





Sint quattuor rectę lineę proportionales AB CD EF GH, sitque vt AB ad CD, ita EF GH, & describantur ab ipsis AB CD EF GH similia & similiter posita solida parallelepipeda KA LC ME NG. Dico vt KA ad LC, ita esse ME ad NG. Quo-

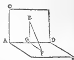
33.huius. niam enim solidum parallelepipedum KA simile est ipsi LC, habebit KA ad LC triplam proportionem eius, quam AB habet ad CD. Eadē ratione & solidum ME ad ipsum NG triplam proportionem habebit eius, quam habet EF ad GH: atque est ut AB ad CD, ita EF ad GH. Ut igitur AK ad LC, ita ME ad NG. Sed sit ut solidum AK ad solidum LC, ita ME solidum ad solidum NG. Dico ut recta linea AB ad rectam CD, ita esse rectam EF ad ipsam GH. Quoniam enim rursus AK ad LC triplam proportionem habet eius, quam AB habet ad CD; habet autem & ME ad NG triplam proportionem eius, quam EF ad GH; atque ut AK ad LC, ita ME ad NG: erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quattuor rectæ lineæ proportionales sint & reliqua. quod oportebat demonstrare.



THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXVIII.

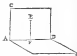
Si planum ad planum rectum sit, & ab aliquo puncto eorum, quæ sunt in uno plano ad alterum planum perpendicularis ducatur, ea in communem planorum sectionem cadet.

Planum enim CD ad planum AB rectum sit; cōis aūt eorum sectio sit AD, & in ipso CD plano quod uis punctum E sumatur. Dico perpendicularem, quæ à puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipsam AD. Non enim, sed si fieri potest, cadat extra, ut EF; & plano AB in puncto F occurrat: a puncto autem F ad DA in plano AB perpendicularis ducatur FG, quæ quidem & plano CD ad rectos angulos erit; & EG iūgatur. qm igitur FG plano CD est ad rectos angulos, contingit autem ipsam recta linea EG, quæ est in eodem CD plano: erit angulus FGE rectus. sed & EF plano AB ad rectos angulos est, rectus igitur est angulus EFG. quare trianguli EFG duo anguli duobus re-
17.primi. ctis sunt æquales; quod est absurdum. non igitur a puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam DA cadet. ergo in ipsam cadat necesse est. Si igitur planum ad planum rectum sit, & reliqua. quod oportebat demonstrare.



F. C. COMMENTARIUS.

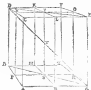
Possumus ēt rectā demōstratione uti hoc modo. Sit rursus CD planum ad planum AB rectum: communis autem ipsorum sectio sit AD; & in plano CD quod vis punctum E sumatur. Dico perpendicularem, quę à puncto E ad planum AB ducitur cadere in rectam lineam AD. Ducatur à puncto E ad ipsam AD perpendicularis EF. Quoniam igitur planum CD ad planum AB rectum est, & commu-



si planorum sectioni ad rectos angulos in vno plano CD ducta est EF; erit EF reliquo plano AB ad rectos angulos. Quare à puncto E ad AB perpendicularis ducta in communem planorum sectionem AD cadit. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXXIIII. PROPOSITIO XXXIX.

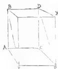
Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secétur bifariam, per sectiones vero plana ducantur, cõis planorum sectio, & solidi parallelepipedi diameter sese bifariam secabunt.



In solido enim parallelepipedo AF oppositorum planorum CF AH latera bifariã secentur in punctis KLMNXPOR. & per sectiones plana ducantur KN XR communis autem planorum sectio YS, & solidi parallelepipedi diameter sit DG. Dico YS DG sese bifariam secare, hoc est YT quidem ipsi TS DT vero ipsi TG æqualem esse. Iungantur enim DY YE BS SG. Quoniam igitur DX parallela est ipsi OE, alterni anguli DXY
YOE inter se ęquales sunt. Et quoniam DX quidem est æqualis OE XY vero ipsi YO, & angulos ęquales continent; erit 29 primi.
basis DY ęqualis basi YE, & triangulum DXY triangulo YOE, & reliqui anguli 4 primi.
reliquis angulis æquales. angulus igitur XYD est æqualis angulo OYE, & ob id re- 14 primi.
cta linea est DYE. Eadem ratione & BSG recta est. atque est BS ęqualis SG. Et quo-
niã CA ipsi DB ęqualis est & parallela, sed CA est æqualis & parallela ipsi EG; erit 9 huius.
& DB ipsi EG æqualis & parallela & ipsas coniungũt rectę lineæ DE GB. parallela 33 primi.
igitur est DE ipsi BG. & sumpta sunt in vtraque ipsarum quæuis puncta DYGS, &
iunctæ sunt DG YS. ergo DG YS in vno sunt plano. Quod cum DE sit parallela B 7 huius.
G, erit & EDT angulus angulo BGT æqualis, alterni enim sunt. est autem & DTY 29 primi.
angulus æqualis ipsi GTS. duo igitur sunt triangula DTY GTS duos angulos duo 15 primi.
bus angulis ęquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni ęqualium
angulorum subtenditur, uidelicet DY ipsi GS: dimidia enim sunt ipsorum DE BG.
ergo & reliquos augulos reliquis angulis æquales habebunt. quare DT quidem est 26 primi.
æqualis TG, YT uero ipsi TS. Si igitur in solido parallelepipedo, & reliqua. quod
oportebat demonstrare.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO. XL.

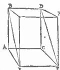
Si sint duo prismata æquealta, quorũ vnũ quidẽ basim habeat parallelogrãmũ, alterum vero triangulũ, & parallelogrammũ duplum sit trianguli; ea inter se ęqualia erunt.

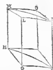




Sint prismata æquealta ABCDEF GHKLMN, &

unum quidem basim habeat parallelogrammum AF, alterum uero GHK triangulum,& duplum sit AF parallelogrammũ triãguli GHK. Dico prisma ABCDEF prismati GHKLMN ęquale esse. compleãtur enim AX GO solida. Et quoniam parallelogrãmum AF trianguli GHK





est duplum;est autem & HK parallelogrammum duplum triãguli GHK;erit AF pa-
31. huius. rallelogrammum parallelogrammo HK æquale. Quæ uero in æqualibus sunt basibus solida parallelepipeda,& eadem altitudine inter se æqualia sunt. ęquale igitur AX solidum solido GO. atque est solidi quidem AX dimidium ABCDEF prisma, solidi uero GO dimidium prisma GHKLMN. ergo ABCDEF prisma prismati GHKLMN est ęquale. si igitur sint duo prismata ęquealta,& reliqua. quod demonstrare oportebat.

VNDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER DVODECIMVS ET SOLIDORVM SECVNDVS.
CVM SCHOLIIS ANTIQVIS ET COMMENTARIIS.

Federici Commandini Vrbinatis.



THEOREMA I. PROPOSITIO I.

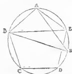


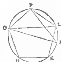
IMILIA polygona, quæ in circulis describuntur, inter se sunt, vt diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCDE FGHKL, & in ipsis similia polygona ABCDE FGHKL; diametri autem circulorum sint BM GN. Dico vt quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita esse ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. Iungantur enim BE AM GL FN. Et quoniam polygonum ABCDE simile est polygono FGHKL; & BAE angulus angulo GFL est æqualis: atque est ut BA ad AE, ita GF ad FL. duo igitur triangula sunt BAE GFL vnum angulum vni angulo æqualem habẽtia, videlicet angulum BAE angulo GFL: circa ęquales autẽ angulos latera proportionalia. quare triangulum ABE triangulo FGL ęquiangulum est; ac propterea angulus AEB æqualis est angulo FLG. Sed angulus quidem AEB angulo AMB est æqualis; in eadem enim circumferentia cõsistũt. angulus autem FLG æqualis est angulo FNG. ergo & AMB angulus est æqualis angulo FNG. est autem & rectus angulus BAM æqualis recto GFN. quare & reliquus rẽliquo ęqualis. æquiangulum igitur est triãgulum AMB triangulo FGN. ergo vt BM ad GN ita BA ad GF. Sed proportionis quidem BM ad GN dupla est proportio quadrati ex BM ad quadratũ ex GN; proportionis vero BA ad GF dupla est proportio ABCDE polygoni ad polygonum FGHKL: & vt igitur quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita polygonum ABCDE ad FGHKL polygonum. Quare similia polygona, quæ in circulis describuntur, inter se sunt, vt diametrum quadrata.

21 terii.

31. terii.

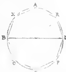




THEO-

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Circuli inter se sunt vt diametrorum quadrata.





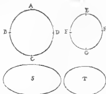


Sint circuli ABCD EFGH : diametri autem ipsorũ sint BD FH. Dico vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita esse circulum ABCD ad EFGH circulum. Si enim non ita est; erit vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad spacium aliquod minus circulo EFGH, vel ad maius. Sit primum ad minus quod sit S: & in circulo EFGH describatur quadratum EFGH. Itaque descriptum in circulo quadratum
A maius est dimidio circuli EFGH; quoniam si per puncta EFGH contingentes circulum ducamus, erit descripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EFGH. descripto autem circa circulum quadrato minor est circulus. ergo quadratum EFGH maius est dimidio circuli EFGH. secentur bifariam circumferentiæ EF FG GH HE in punctis KLMN & EK KF FL LG GM MH HN NE iungantur. Vnum quodque igitur triangulorum EKF FLG GMH HNE maius est dimidio portionis circuli in qua consistit, quoniam si per pũcta KLMN contingentes circulum ducamus, & parallelogramma, quę sunt in rectis lineis EF FG GH HE cõ-
B pleamus; erit vnumquodque triãgulorum EKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipsum est. sed portio minor est parallelogrammo. quare vnumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE maius est dimidio portionis circuli, in qua consistit. reliquas igitur circumferentias bifariam secantes, & iungentes rectas lineas: atque hoc semper facientes relinquemus tandẽ quasdã circuli portiones, quę minores erũt excessu, quo circulus EFGH ipsum S spacium superat. etenim ostensum est in primo theoremate decimi libri, duabus magnitudinibus inæqualibus expositis si à maiori auferatur maiusquã dimidium, & ab eo, quod relinquitur, rursus maiusquàm dimidium, & hoc semper fiat; reliqui tandem magnitudinem aliquam, quę minori magnitudine exposita sit minor. Itaque relictæ sint portiones circuli EFGH in rectis lineis EK KF FL LG GM MH HN NE, quæ maiores sint excessu, quo circulus EFGH ipsum S spacium
C superat. ergo reliquum EKFLGMHN polygonum maius erit spacio S. Describatur etiam in circulo ABCD polygono EKFLGMHN simile polygonum AXBOCPDR. est igitur vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum. sed & vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad spacium S. ergo & vt circulus ABCD ad spacium S, ita polygonum AXBOCPDE ad EKFLGMHN polygonum; & permutando vt circulus ABCD ad polygonum, quod in ipso est, ita spacium S ad polygonum EKFLGMHN. maior autem est circulus ABCD eo, qu d in ipso est polygono. quare & spacium S maius est polygono EKFLGMHN. sed & minus, quod fieri non potest. Non igitur est vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad spacium aliquod minus circulo EFGH. similiter ostendemus neque esse vt quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulum EFGH ad aliquod spacium minus circulo ABCD. Dico igitur neque esse vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulum ABCD ad aliquod spacium maius circulo EFGH si enim fieri potest, sit ad maius spaciũ S. erit igitur conuertendo ut quadratum ex FH ad quadratum est BD, ita spacium S ad ABCD circulum. sed vt spacium S ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad aliquod spacium minus circulo ABCD, vt demonstrabitur. ergo & vt quadratum

Ex antecedenti quinti.

ex

ex FH ad quadratum ex BD, ita EFGH circulus ad aliquod ſpacium minus circulo ABCD, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Nō igitur vt quadratum ex BD ad quadratū ex FH, ita eſt circulus ABCD ad ſpacium aliquod maius EFGH circulo. oſtenſum autem eſt neque ad minus. quare vt quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum EFGH. Circuli igitur inter ſe ſunt, vt diametrorum quadrata. quod oſtendere oportebat.



L E M M A

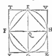
Itaque dico ſi ſpacium S ſit maius circulo EFGH, eſſe vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita circulum EFGH ad ſpacium aliquod circulo ABCD minus.

Fiat enim, vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita EFGH circulus ad ſpacium T. Dico ſpacium T circulo ABCD minus eſſe. Quoniam enim eſt vt ſpacium S ad circulum ABCD, ita EFGH circulus ad ſpacium T; erit permutando vt ſpacium S ad circulum EFCH, ita ABCD circulus ad ſpacium T. maius autem eſt ſpacium S circulo EFGH. ergo & ABCD circulus ſpacio T eſt maior; ac propterea vt ſpaciū S ad circulum ABCD, ita eſt EFGH circulus ad ſpacium aliquod circulo ABCD minus.

F. C. C O M M E N T A R I V S.

Erit deſcripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EFGH] A

Deſcribatur circa circulum EFGH quadratum TVZY, nempe ductis per EFGH puncta rectis lineis, quae circulum contingant, vt ex 9. quarti libri apparet. erit TV ipſius TE dupla. Iungantur enim EG FH ſe ſe in puncto Q ſecantes, quae circuli diametri erunt: atque erit Q circuli cētrum. angulus igitur QEV eſt rectus. 18 tertij. *ſed & rectus EQH; ſi quidē duae FQ QE aequales ſunt duabus HQ QE; & baſis EF aequalis baſi EH. ergo angulus FQE angulo HQE eſt aequalis: & ob id vterque rectus. ex quibus ſequitur* 8 primi. 28. primi.



rectam lineam TEV ipſi FQH parallelam eſſe. & eadem ratione oſtendentur TFY, VHZ parallelae ipſi EQG: & inter ſe ſe. parallelogramma igitur ſunt FV VG FE EH. Quòd cum FQ ſit aequalis QH, erit ēt TE ipſi EV aequalis: ideoq; TV eſt dupla ipſius TE. ſimiliter demonſtrabimus & TY ipſius TF duplam. cumq; TY TV aequales ſint, erunt & earum dimidiae FT TE aequales. Et quoniam TV dupla eſt ipſius TE, quadratum ex TV quadrati ex TE quadruplū erit. ſimiles enim rectilineae figurę in dupla ſunt proportione homologorū laterū. ſed quadratū ex EF eſt aequale quadratis ex FT TE, quae quidem ſunt dupla quadrati ex TE. ergo quadratum ex EF, hoc eſt quadratum EFGH quadrati TVZY dimidium erit. quod oportebat demonſtrare. 34 primi. Cor. 20 sexti. 47 primi.

Erit vnum quodque triangulorum CKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipſum eſt[*Ex 41 primi.* B

S C H O L I V M.

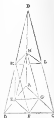
Deſcribatur etiam in circulo ABCD polygono EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR. C

In dato circulo, descripto in circulo polygono simile polygonum describere.

Sint duo circuli, quorũ centra FG, & in circulo A B C D E polygonũ quoduis describatur ABCDE, iũgãturq; AF BF CF DF EF: in altero autem circulo ducatur à cẽtro G quędam recta linea vtcunque GH: & angulo quidem A
23 primi.
FB cõstituatur æqualis angulus HGK; angulo autem BFC angulus KGL, & angulo CFD angulus LGM, denique angulo DFE æqualis angulus MGN cõstituatur. ergo reliquus AFE reliquo HGN est æqualis. & iungantur HK KL LM MN NH. est autem vt A F ad FB, ita HG ad GK; similia enim sunt AFB LGK triangula, quod ostensum est in theore-
4 sexti.
mate sexto sexti libri elementorum. Vt igitur semidiameter circuli ad circuli semidiametrum, ita BA ad HK. similiter ostendemus & vnamquamque ipsarũ BC CD DE EA ad vnamquamque KL, LM MN NH eandem habere proportionem. & sũt æquales anguli polygonorum, quoniam & triangulorum anguli æquales sunt. polygona igitur ABCDE HKLMN singulos angulos singulis angulis æquales habẽt:
1. diffi. tertia
& circa æquales angulos latera proportionalia. ergo polygonũ ABCDE simile est polygono HKLMN. In dato igitur circulo HKLMN polygono ABCDE simile polygonum descriptum est. quod facere oportebat.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Omnis pyramis triangularem habens basim diuiditur in duas pyramides, æquales & similes inter se, quæ triangulares bases habent, similesq; toti; & in duo prismata ęqualia, quæ quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt maiora.



Sit pyramis, cuius basis quidem ABC triangulum; vertex autem punctum D. Dico pyramidem ABCD diuidi in duas pyramides æquales & similes inter se, triangularesq; bases habentes, & similes toti, & in duo prismata æqualia; & duo prismata dimidio totius pyramidis esse maiora. secentur enim AB BC CA AD DB DC bifariam in punctis E F G H K L, & EH EG GH HK KL LH EK KF FG iungantur. Quoniam igitur AE quidem est ęqua-
2. sexti.
lis EB, AH vero ipsi HD; erit EH ipsi DB parallela. Eadem ratione & HK est parallela ipsi AB. parallelogram-
34. primi.
mum igitur est HEBK. quare HK est æqualis EB. Sed EB ipsi AE est æqualis. ergo & AE ipsi HK æqualis erit. est autẽ & AH æqualis HD. duę igitur AE AH duabus KH
29 primi.
HD æquales sunt, altera alteri, & angulus EAH æqualis
4 primi.
angulo KHD. basis igitur EH basi KD est ęqualis. quare triangulum AEH æquale est & simile triangulo HKD. Eadem ratione & triangulum AHG triangulo HLD ęquale est & simile. Et quoniam duæ rectæ lineæ se se tangentes EH HG duabus rectis lineis sese tangentibus KD DL parallelæ sunt, non autem in
10. undecimi
eodẽ plano, æquales angulos continebunt. ergo angulus EHG est æqualis angulo KDL.

KDL. Rursus quoniam duæ rectæ lineæ EH HG duabus KD DL æquales sunt, altera alteri, & angulus EHG est æqualis angulo KDL; erit basis EG basi KL æqualis: 4 primi.
æquale igitur est & simile triangulum EHG triangulo KDL. Eadem ratione & AEG triangulum est æquale & simile triangulo HKL. quare pyramis, cuius basis quidē est AEG triangulum, vertex autem punctum H æqualis & similis est pyramidi, cuius basis est triangulum HKL & vertex D punctum. Et quoniam vni laterum trianguli ADB, videlicet ipsi AB parallela ducta est HK; erit triāgulū ADB triāgulo DHK æquiāngulū, & latera habēt proportionalia. Simile igitur est ADB triāgulū triāgulo DHK: & eadē ratione triāgulū quidē DBC simile est triangulo DKL, triangulū vero ADC triangulo DHL. quòd cum duę rectę lineę se se tangentes BA AC duabus rectis lineis se se tangentibus KH HL parallelæ sint, non existentes in eodem plano, æquales angulos continebunt. angulus igitur BAC angulo KHL est æqualis atque est ut BA ad AC, ita KH ad HL. ergo ABC triangulum simile est triangulo HKL, atq; pyramis, cuius basis quidem triangulum ABC, uertex autem pūctum D similis est pyramidi, cuius basis triangulum HKL, & uertex pūctum D. sed pyramis cuius basis quidem HKL triangulum, uertex autem punctum D, ostensa est similis pyramidi, cuius basis triangulum AEG, & uertex H punctum. Quare & pyramis cuius basis triangulum ABC & uertex punctum D similis est pyramidi, cuius basis AEG triangulum, & uertex punctum H. Vtraque igitur ipsarum AEGH HKLD pyramidum similis est toti pyramidi ABCD. Et quoniam BF est æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum duplum triāguli GFC. & quoniam duo prismata æqualtitudine sunt, quorum vnum quidem basim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, estq; parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea prismata inter se æqualia. ergo prisma contentum duobus triangulis BKF EHG, & tribus parallelogrāmis EBFG EBKH KHFG est ęquale prismati, quod duobus triangulis GFC HKL, & tribus parallelogrammis KFCL LCGH HKFG continetur. & manifestum est vtrumque ipsorum prismatum, & cuius basis est EBGF parallelogrammum, opposita autem ipsi HK recta linea: & cuius basis est GFC triangulum, & oppositum ipsi triangulum KLH, maius esse vtraque pyramidum, quarum bases quidem AEG HKL triangula, uertices autem puncta H D, quoniam si iungamus EF EH rectas lineas, prisma quidem, cuius basis est EBFG parallelogrammum, & opposita ipsi recta linea HK, maius est pyramide, cuius basis EBF triangulum, uertex autem punctum K. sed pyramis, cuius basis triangulum EBF, & uertex K punctū est æqualis pyramidi, cuius basis AEG triangulum, & uertex punctum H ęqualibus enim & similibus planis continentur. quare & prisma, cuius basis parallelogrammū EBFG, opposita autē ipsi recta linea HK maius est pyramide, cuius basis AEG triāgulum, & uertex punctum H. prisma vero cuius basis parallelogrammum EBFG & opposita ipsi recta linea HK est ęquale prismati, cuius basis GFC triangulum, & ipsi oppositum triangulum HKL: & pyramis cuius basis triangulum AEG, vertex autem H punctum, est æqualis pyramidi, cuius basis HKL triangulum & uertex punctū D. ergo duo prismata de quibus dictū est, sunt maiora duabus dictis pyramidibus quorū bases triāgula AEG HKL, uertices autem H D puncta. tota igitur pyramis cuius basis ABC triangulum, uertex autem punctum D, diuisa est in duas pyramides æquales, & similes inter se, & similes toti: & in duo prismata æqualia: suntq; duo prismata dimidio totius pyramidis maiora. quod ostendere oportebat.

Marginal notes: 10. undecimi. — A — B — C — 10 diff. undecimi

F. C. COMMENTARIVS.

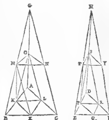
A Et quoniam BF est æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum duplum trianguli GFC] *Iuncta enim EF quoniam BF est aequalis FC, & EG parallela ipsi BC, erit triangulum BEF aequales triāgulo FGC. sed parallelogrammum EBFG duplum est trianguli BEF. ergo & ipsius FGC trianguli duplum erit.* (38 primi. 41 primi.)

B Erunt ea prismata inter se æqualia] *Ex vlt. vndecimi libri.*

C Prisma quidẽ cuius basis est EBFG parallelogrãmũ. & opposita ipsi recta linea H K, maius est pyramide, cuius basis EBF triangulum, vertex autem pũctum K, *velut totum est sua parte maius; est enim pyramis ipsius prismatis pars quędam. sed inferius ex iis, quę in 7. huius demonstrantur, apparebit tertiam partẽ esse, cum sit tertia pars prismatis, cuius basis G FC triangulum, & oppositum ipsi triangulum KLH.*

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si sint duę pyramides æquealtæ, quæ triangulares bases habeant, diuidatur autem vtraque ipsarum, & in duas pyramides ęquales inter se, similesq́; toti, & in duo prismata æqualia, & factarum pyramidum vtraque eodem modo diuidatur, atque hoc semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad basim alterius, ita & in vna pyramide prismata omnia ad prismata omnia in altera pyramidem, altitudine æqualia.



Sint duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares bases habeãt A BC DEF, uertices autem sint pũcta GH, & diuidatur vtraque ipsarum in duas pyramides æquales inter se, similesq́; toti, & in duo prismata ęqualia, & factarum pyramidum vtraque eodem modo diuisa intelligatur: atq; hoc sẽper fiat. Dico vt ABC basis ad basim DEF ita esse prismata oĩa, quę sunt in pyramide ABC ad prismata omnia, quæ in pyramide DEF multitudine ęqualia. Quoniam enim BX quidem est æqualis XC,
2.sexti. AL vero ęqualis LC; erit XL ipsi
AB parallela, & triangulum ABC
triangulo LXC simile. Eadem ratione & triangulum DEF simile est triangulo RQ
F. Et quoniam BC quidem est dupla CX, EF vero dupla ipsius FQ, vt BC ad CX, ita
erit EF ad FQ. & descripta sunt ab ipsis BC CX similia & similiter posita rectili-
nea ABC LXC; ab ipsis vero EF FQ similia & similiter posita rectilinea DEF RQ
22.sexti. F. est igitur ut BAC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQ
F triangulum; & permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC
triangulum ad triangulum RQF. sed ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita
prisma cuius basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma cu-
11.quinti. ius basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY. & ut igitur ABC triangulum ad
triangulum DEF, ita prisma, cuius basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi
OMN ad prisma, cuius basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY. Et quoniam
duo prismata, quæ in pyramide ABCG inter se ęqualia sunt, sed & quæ in pyrami-
de DEFH prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma, cuius basis parallelogram-
mum KLXB, opposita uero ipsi recta linea MO ad prisma cuius basis LXC triangu-
lum, & oppositum ipsi OMN, ita prisma cuius basis parallelogrammum EPRQ &
opposita ipsi recta linea ST ad prisma cuius basis RQF triangulum, oppositum ue-
ro ipsi STY. quare cõponẽdo vt prismata KBXLMO LXCMNO ad prisma LXCM
NO, ita prismata PEQRST RQFSTY ad prisma RQFSTY. & permutando ut pris-
mata KBXLOMN LXCOMN ad prismata PEQRST RQFSTY, ita prisma LXC
MNO

MNO ad prisma RQFSTY. Vt autem prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY, ita ostensa est basis LXC ad RQF basim, & ABC basis ad basim DEF. ergo & ut triangulum ABC ad triagulum DEF, ita quę in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide DEFH. similiter autē & si factas pyramides diuidamus eodem modo velut OMNG STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quæ in pyram de OMNG duo prismata ad duo prismata, quæ in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis ABC ad DEF basim. & ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quę in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH, & quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata, quę in pyramide STYH; & quattuor ad quattuor. eadem autem ostendentur & in factis prismatibus ex diuisione pyramidum AKLO, & DFRS & omnium simpliciter multitudine æqualium.

LEMMA.

At vero vt LXC triangulum ad triangulum RQF, ita esse prisma, cuius basis triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma, cuius basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY, hoc modo ostendemus.

In eadē enim figura intelligātur ab ipsis G H punctis perpendiculares ductæ ad ABC DEF triangulorū plana, quę inter se ęquales erunt; propterea quod pyramides ipsæ ęquealtę ponuntur. Et quoniam duę rectæ lineæ GC, & perpendicularis à puncto G ducta secantur à parallelis planis ABC OMN, in easdem proportiones secabuntur. & secatur GC bifariam à plano OMN in puncto N. ergo & à puncto G ducta perpendicularis ad ABC planum bifariam secabitur à plano OMN. Eadē ratione & quæ à puncto H ducitur perpendicularis ad DEF planum à plano STY bifariam secabitur. & sunt æquales perpendiculares, quę ab ipsis GH ducuntur ad plana ABC DEF. ergo & æquales quę à triangulis OMN STY ad ipsa ABC DEF perpendiculares ducuntur. ęquealta igitur sunt prismata, quorum bases triangula LXC RQF. opposita autem ipsis OMN STY. quare & solida parallelepipeda, quæ à dictis prismatibus describuntur ęquealta, inter se sunt ut bases, & eorū dimidia ut LXC basis ad basim RQF, ita inter se dicta prismata erūt. quod demonstrare oportebat.

17 undecimi.

15 quint.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita prisma cuius basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma cuius basis RQF triagulum & oppositum ipsi STY] *Hoc ēt cōstare pōt ex corollario, quod nos ad 32 vndecimi conscripsimus.*

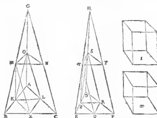
THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Pyramides, quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt vt bases.

Sint enim eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem triāgula ABC DEF, uertices autem puncta G H. D.co ut ABC basis ad basim DEF, sic esse pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem. Si enim non ita sit, erit ut ABC basis ad basim DEF, sic ABCG pyramis, uel ad solidum minus pyramide DEFH, uel ad maius. Sit primum ad solidum minus, sitq; Z & diuidatur pyramis DEFH in duas pyramides æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia. sunt igitur duo prismata dimidio totius pyramidis maiora. & rursus pyramides ex diuisione factæ similiter diuidantur, atque hoc semper fiat, quo ad sumantur quædam pyramides à pyrami

 de DEFH,

de DEFH, quæ sint minores excessu, quo pyramis DEFH solidum Z superat. Itaque sumantur, & sint exempli caussa pyramides DFRS STYH. erunt igitur reliqua



pyramide DEFH prismata solido Z maiora. Diuidatur etiam ABCG pyramis in totidem partes similiter pyramidi DEFH. ergo vt ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG prismata ad prismata quæ in pyramide DEFH; sed vt ABC basis ad basim DEF, ita pyramis ABCG ad solidum Z. & ut igitur ABCG pyramis ad solidum Z, ita quæ in pyramide ABCG prismata ad prismata, quæ in pyramide DEFH: & permutando ut ABCG pyramis ad prismata, quæ in ipsa sunt, ita solidum Z ad prismata, quę in pyramide DEFH. maior autem est pyramis ABCG prismatibus, quæ in ipsa sunt. ergo & solidum Z prismatibus, quæ sunt in pyramide DEFH est maius. sed & minus, quod fieri non potest. Non igitur vt ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad solidum aliquod minus pyramide DEFH. similiter ostendemus neque ut DEF basis ad basim ABC, ita esse pyramidem DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus. Dico igitur neque esse vt ABC basis ad basim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod solidū maius pyramide DEFH. si enim fieri potest, sit ad maius, uidelicet ad solidum I. erit igitur conuertendo vt DEF basis ad basim ABC, ita solidum I ad ABCG pyramidem. Vt autem solidum I ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad solidum aliquod minus pyramide ABCG, vt proxime ostensum fuit. & ut igitur DEF basis ad basim ABC, ita pyramis DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus. quod est absurdum. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est ABCG pyramis ad solidum aliquod maius pyramide DEFH. ostensum autem est, neque ad minus. quare vt ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur, quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent inter se sunt vt bases. quod demonstrare oportebat.

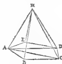
Ex ante-cedenti

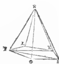
THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Pyramides, quæ eadem sunt altitudinę, & multiangulas bases habent, inter se sunt, vt bases.

Sint eadem altitudine pyramides, quæ multiangulas bases habeant ABCDE FGHKL uertices autem MN puncta. Dico vt ABCDE basis ad basim FGHKL, ita esse ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHKLM. Diuidatur enim basis quidem ABCDE in triangula ABC ACD ADE; basis uero FGHKL diuidatur in triangula FGH FHK FKL. et in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æquealtæ ac pyramides, quę à principio. Quoniam igitur est ut triangulum ABC ad triangulum

lum ACD, ita ABCM pyramis ad pyram.dē ACDM: & componendo ut ABCD trapeziū ad triangulum ACD, ita ABCDM pyramis ad pyramidē ACDM. sed & ut ACD triangulum ad triangulum ADE, ita pyramis ACDM ad ADEM pyramidem, ergo ex æquali ut ABCD basis ad basim ADE, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ADFM: & rursus componendo ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM. Eadem ratione & ut FGHKL basis ad basim FKL, ita & FGHKLN pyramis ad FKLN pyramidem. & quoniam duæ pyramides sunt ADEM FKLN, quæ triangulares bases habent & eadem sunt altitudine, erit ut ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramides ad pyramidem FKLN. Quod cū sit ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidē ADEM, ut aūt ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidē FKLN. erit ex æquali ut basis ABCDE ad FKL basim, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FKLN. sed et ut FKL basis ad basim FG HKL, ita erat et FKLN pyramis ad pyramidem FGHKLN. quare rursus ex æquali ut ABCDE basis ad basim FGHKL, ita est ABCDEM pyramis ad pyramidē FGHKLN. Pyramides igitur, quæ eadem sunt altitudine, et multangulas bases habent inter se sunt, ut bases. quod oportebat demonstrare. Ex antecedente.

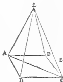




F. C. COMMENTARIVS.

Idem etiam demonstrabitur, si bases inæqualibus numero lateribus contineantur. Sint enim pyramides aequealtae ABCDL EFGHKM, sitq́; pyramidis ABCDL basis quadrilaterum ABCD, & vertex L; pyramidis vero EFGHKM basis sit pentagonum EEGHK, & vertex L. Dico vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita esse ABCDL pyramidem ad pyramidem EFGHKM. Iungantur AC EG EH. erit quadrilaterum ABCD diuisum in duo triangula ABC ACD, & pentagonum diuisum in tria triangula EFG EGH EHK. Itaque intelligantur ab vnoquoque triangulo pyramides aequealtę primis pyramidibus. Et quoniam est ut triangulum ABC ad triangulum ACD, ita pyramis ABCL ad pyramidem ACDL; erit componendo vt quadrilaterum ABCD ad triangulum ACD, ita pyramis ABCDL ad pyramidem ACDL. Eadem ratione demonstrabimus in altera pyramide ut quadrilaterum EFGH ad triangulum EGH, ita esse pyram.dem EFGHM ad pyramidem EGHM: vt autem triangulum EGH ad triangulum EHK, ita est pyramis EGHM ad pyramidem EHKM. quare ex æquali vt quadrilaterum EFGH ad triangulum EHK, ita est pyramis EFGHM ad piramidem EHKM: & rursus componendo vt pentagonum EFGHK ad triangulum EHK, ita tota pyramis EFGHKM ad pyramidem EHKM: conuertendoq́; vt triangulum EHK ad pentagonum EFGHK, ita pyramis EHKM ad totam pyramidem EFGHKM. Sed vt triangulum ACD ad triangulum EHK, ita est pyramis ACDL ad pyramidem EHKM. erat autem ut quadrilaterum ABCD ad triangulū ACD ita pyramis ABCDL ad pyramidem ACDL. Quare rursus ex æquali vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita erit pyramis ABCDL

Ex antecedente. Ex antecedenti.





BCDL ad pyramidem EFGH KM. Et eodem modo in alijs demonstrabitur, quotcunque lateribus bases earum contineantur.

THEOREMA VII. PROPOSITIO. VII.

Omne prisma triangularem habens basim diuiditur in tres pyramides æquales inter se, quę triangulares bases habent.

Sit prisma cuius basis quidem triangulum ABC, oppositū autem ipsi DEF. Dico prisma ABCDEF diuidi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares habent bases. Iungantur enim BD EC CD. Et quoniam parallelogrammum est A
34 primi. BED, cuius diameter BD, erit ABD triangulum triangulo E BD ęquale. ergo pyramis cuius basis triangulum ABD, ver-
5 huius. tex autem punctum C æqualis est pyramidi, cuius basis EDB triangulum & vertex punctum, C. Sed pyramis cuius basis EDB triangulum & vertex punctum C, eadem est pyramidi, cuius basis triangulum EBC, & vertex D punctum, ijsdem enim planis continentur. Ergo & pyramis cuius basis triangulū ABD, vertex autem punctū C æqualis est pyramidi, cuius basis EBC triangulum, & vertex pūctum D. Rursus quoniam FCBE parallelogrammum est, cuius diameter CE, triangulum ECF triangulo CBE est ęquale. ergo & pyramis, cuius basis BEC triangulum, vertex autem punctum D æqualis est pyramidi, cuius basis triāgulum ECF, & vertex punctum D. Sed pyramis, cuius basis quidem BCE triangulum, vertex autem punctum D ostensa est æqualis pyramidi, cuius basis triāgulum ABD, & vertex C punctum. quare & pyramis cuius basis triangulum CEF, & vertex punctum D, æqualis est pyramidi cuius basis triangulum ABD, & vertex C punctum. Prisma igitur ABCDEF diuiditur in tres pyramides inter se ęquales, quæ triangulares bases habent Et quoniam pyramis, cuius basis ABD triangulum, vertex autem punctum C, eadem est pyramidi, cuius basis triangulum CAB, & vertex D punctum, ijsdem namque planis continentur. pyramis aūt, cuius basis triangulum ABD, & vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis, cuius basis ABC triangulum, & oppositum ipsi DEF. & pyramis igitur, cuius basis triangulum ABC, vertex autem D punctum tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ABC triangulum, & oppositum ipsi triangulum DEF.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, & altitudinem æqualē; quoniam etiam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat & oppositam ipsi eandē, diuiditur in prismata, quę triangulares bases habent, & quę ipsis opponuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex hoc corollario, & antecedentibus sequitur prismata omnia, quę eadem sunt altitudine inter se esse, vt bases. sunt enim ea pyramidum eiusdē altitudinis tripla.

Sed & hęc uera sunt, quę nos demonstrauimus in libro de centro grauitatis solidorum propositione. XX. & XXI.

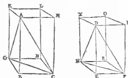
Prismata omnia, & pyramides, quę in eisdem, vel ęqualibus basibus constituuntur eam inter se proportionem habent, quam altitudines.

Et insuper prismata omnia & pyramides inter se proportionem habent composi tam ex proportione basium & proportione altitudinum.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Similes pyramides, quę triangulares bases habent in tripla sũt proportione homologorum laterum.

Sint similes, & similiter po sitæ pyramides, quarum bases quidem triangula ABC DEF, vertices autem CH puncta. Dico ABCG pyramidẽ ad pyramidem DEFH triplam proportionem habere eius, quam BC habet ad EF. compleãtur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis ABCG similis est pyramidi DEFH, erit angulus ABC angulo DEF æqualis, angulusq; GBC ęqualis angulo HEF, & angulus ABG angulo DEH. atque est vt AB ad DE, ita BC ad EF, & BG ad EH. Quoniam igitur est vt AB ad DE, ita BC ad EF, & circum æquales angulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP simile erit. Eadem ratione & parallelogrammum BN simile est parallelogrammo ER, & parallelogrammum BK ipsi EX parallelogrãmo. Tria igitur parallelogramma BM KB BN, tribus EP EX ER sunt similia. Sed tria quidem MB BK BN tribus oppositis ęqualia, & similia sunt, tria vero EP EX ER tribus oppositis ęqualia, & similia. quare solida BGML EHPO similibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea simile est BCML solidum solido EHPO. Similia autem solida parallelepipeda in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo solidum BGML ad solidum EHPO triplã habet proportionem eius, quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed vt BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prisma quod est dimidium solidi parallelepipedi, sit pyramidis triplum. quare & pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplam proportionem habebit eius, quam BC habet ad EF.



9 diffi. Vndecimi 1 diffi. sexti.

24. Vndecimi.

C O R O L L A R I V M.

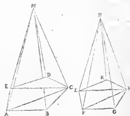
Ex hoc perspicuum est, & similes pyramides, quæ multiangulas bases habent inter se esse in tripla proportione homologorum laterum. ipsis enim diuisis in pyramides triangulares bases habẽtes, quoniam & similia polygona, quæ sunt in basibus in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis; erit vt vna pyramis in altera pyramide triangularem habens basim ad pyramidem in altera triangularem basim habentem, ita & omnes pyramides in pyramide altera triãgulares habentes bases ad omnes in altera triangulares bases habentes; hoc est ita pyramis ipsa multiangulam habens basim ad pyramidem, quæ multiangulam basim habet. Sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem

ramidem, quæ triangularem basim habet est in tripla proportione homologorum laterum. & pyramis igitur multiangulam habẽs basim ad pyramidem similem basim habentem, triplam proportionem habebit eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

F. C. COMMENTARIVS.

Sint enim pyramides similes & similiter positae, quae pro basibus pentagona habeant ABCDEM FGHKLN, sitq́; pyramidis quidem ABCDEM basis pentagonum ABCDE, & uertex punctum M, pyramidis vero FGHKLN basis pentagonum FGHKL, & vertex N punctum, & sit latus AB homologum lateri FG. Dico pyramidẽ ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplam proportionem habere eius, quam habet AB ad FG. Iungantur enim AC CE FH HL. & quoniam polygona similia in similia triangula diuiduntur, numeroq́; aequalia, & homologa totis, erit triãgulum ABC simile triangulo FGH, triangulumq́; ACE triangulo FHL simile, & triangulum CDE triangulo HKL. est autem ob pyramidum similitudinem triangulum AMB simile triangulo FNG. quare vt MA ad AB, ita NF ad FG, vt autem BA ad AC, ita GF ad FH. ex aequali igitur vt MA ad AC, ita LF ad FH. non aliter demonstrabitur vt MC ad CA, ita NH ad HF. ergo triangulum MAC simile est triangulo NFH. est autem & triangulum MBC simile triangulo NGH ob similitudinem pyramidum. pyramis igitur, cuius basis triangulum ABC & vertex M punctum, similis est pyramidi, cuius basis triangulum FGH, & vertex punctum N quippe quod similibus triangulis continentur. Eadem ratione demonstrabitur pyramis ACEM similis pyramidi FHLN, & pyramis CDEM pyramidi HKLN. sed pyramis quidem ABCM ad pyramidem FGHN triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad FG, & pyramis ACEM ad pyramidem FHLN triplam proportionem habet eius, quam AE habet ad FL, hoc est quam AB habet ad FG, est enim vt BA ad AE, ita GF ad FL, & permutãdo vt BA ad GF, ita AE ad FL. pyramis autem CDEM ad pyramidem HKLN triplam proportionem habet eius, quam CD ad HK, hoc est quam AB ad FG. Quonia enim vt AB ad BC, ita est FG ad GH, vt autem BC ad CD, ita GH ad HK; erit ex aequali vt AB ad CD, ita FG ad HK, & permutando vt AB ad FG, ita CD ad HK. Vt igitur vna antecedentium ad vnam consequentium, hoc est pyramis ABCM ad pyramidem FGHN, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, hoc est ita tota pyramis ABCDEM ad totam pyramidem FGHKLN. ergo & pyramis ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplam habebit proportionem eius, quam habet AB ad FG. quod demonstrare oportebat.

20 sexti. — 9.diffi und



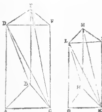
COROLLARIVM.

Ex his colligitur pyramides similes, quæ multiangulas bases habent diuidi in pyramides triangulares bases habentes similes, & numero æquales & homologas totis.

Sed quod Euclides demonstrauit in pyramidibus similibus, nos etiam in similibus prismatibus demonstrare aggrediemur. & quamquam in antecedente libro à nobis demonstratū sit prismata similia, quae triangulares bases habent in tripla esse proportione homologorum laterum, tamen hoc loco placuit illud etiam aliter demonstrare in hunc modum.

THEOREMA I.

Prismata similia, quæ triangulares bases habēt in pyramides similes, numeroq; æquales diuiduntur, & prisma ad prisma triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.



Sint prismata similia, & similiter posita AE GM & prismatis quidem AE basis sit triangulum ABC, & quod ipsi opponitur triangulum DEF: prismatis vero GM basis sit GHK triangulum & oppositum ipsi LMN: sitq; latus AB lateri GH homologum. Dico prismata AE GM diuidi in pyramides similes, numeroq; aequales, & prisma AE ad prisma GM triplā habere proportionem eius, quam habet AB ad GH. Iungantur enim BD EC CD HL MK KL. erit ex iam demonstratis prisma AE diuisum in tres pyramides equales inter se, & prisma GM similiter diuisum in totidem pyramides aequales, quae pyramidibus prismatis AE similes erunt. Quoniam enim ob prismatum similitudinem parallelogrammum ABED simile est parallelogrammo GHML, erit vt DA ad AB, ita LG ad GH: atque est angulus DAB equalis angulo LGH. triangulum igitur DAB triangulo LHG est simile. Eadem ratione & triangulum DEB triangulo LMH, & alia triangula, quae sunt parallelogrammorum dimidia alijs triangulis, quibus respondent similia demonstrabuntur: Et quoniam vt DC ad CA, ita est LK ad KG; vt autem AC ad CB, ita GK ad KH: erit ex aequali vt DC ad CB, ita LK ad LH. Et similiter demonstrabitur vt DB ad BC, ita esse LH ad HK. quare triangulum DBC simile est triangulo LHK. Quòd cum triangulum DAB simile sit triangulo LGH, triangulumq; DBC simile triangulo LHK, & triangulum DAC ipsi LGK; erit pyramis, cuius basis triangulum ABC, vertex autem D punctum similis pyramidi, cuius basis triangulum GHK, & uertex punctum L. Eandem ob caussam erit pyramis cuius basis triangulum EBC, & vertex D punctum, similis pyramidi cuius basis MHK triangulum, uertex autem punctum L, & adhuc pyramis, cuius basis triangulum ECF, & uertex punctum D similis pyramidi, cuius basis triangulum MKN, & uertex L punctum. Quoniam igitur pyramis ABCD similis est pyramidi GHKL, similes autem pyramides sunt in tripla proportione homologorum laterum; habebit pyramis ABCD ad pyramidem GHKL triplam proportionem eius, quam habet AB ad GH. Pyramis autem EBCD ad pyramidem MHKL triplam habet proportionem eius, quam BC habet ad HK, hoc est quam AB habet ad GH; est enim vt AB ad BC, ita GH ad HK: & permutando vt AB ad GH, ita BC ad HK. & similiter pyramis ECFD ad pyramidem MKNL proportionem habet triplam eius, quam EF habet ad MN, hoc est BC ad HK, hoc est AB ad GH. Vt igitur vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Quare vt pyramis ABCD ad pyramidem GHKL, ita totum prisma AE ad totum prisma GN. sed pyramis ABCD ad pyramidem GHKL triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad GH. Ergo & prisma AE ad prisma GM triplam proportionem habebit eius, quam AB ad GH.

9 diff. undecimi.

6. sexti.

9 diff. undecimi.

12. quinti

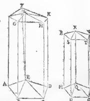
ALITER. Quoniā igitur pyramis ABCD similis est pyramidi GHKL, similes autem pyramides sunt in tripla proportione homologorum laterum. habebit pyramis ABCD ad pyramidē GHKL triplam proportionē eius, quam AB habet ad GH sed vt pyramis ABCD ad pyramidem GHKL, ita prisma AE ad prisma GM, sunt enim prismata pyramidum tripla. ergo & prisma AE

ad prisma GM triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad GH. Prismata igitur similia, quae triangulares bases habent, diuiduntur in pyramides similes, numeroq; aequales, & prisma ad prisma triplam habet proportionem eius, quam latus homologum habet ad homologum latus, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA. II.

Prismata similia, quę multiāgulas habent bases in similia prismata triangulares bases habentia diuiduntur, numeroq; æqualia, & homologa totis: & prisma ad prisma triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo prismata similia, & similiter posita AK MV, & prismatis quidem AK basis sit pentagonum ABCDE, & ipsi oppositum FGHKL; prismatis uero MV basis sit pentagonum MNOPQ, & oppositum ipsi RSTVX: sitq; latus AB lateri MV homologum. Dico prismata AK MV diuidi in prismata, quae triangulares bases habent, similia & numero aequalia, & homologa totis; & prisma AK ad prisma MV triplam proportionem habere eius, quam habet AB ad MN. Iūgantur EB EC LG LH QN QO XS XT. pētagonū igitur ABCDE diuisum erit in tria triangula ABE EBC ECD; pentagonumq; FGHKL diuisum in tria triangula FGL LGH LHK: & similiter pentagonum MNOPQ diuisum erit in tria triangula MNQ QNO QOT: &



pentagonum RSTVX in totidem triangula RSX XST XTV. Intelligatur vnumquodque prisma-
20. sexti. *tū AK MV diuisū in tria prismata triangulares bases habentia ductis planis per LG GB, perq;*
LH HC, & per XS SN, & per XT TO. Quoniam igitur similia polygona in similia triangula diuiduntur, numeroq; aequalia, & homologa totis; erunt triangula ABE FGL similia triangulis M
9 diffi undecimi *NQ RSX, & triangula EBC LGH triangulis QNO XST, triangulaq; ECD LHK ipsis QOP X*
TV similia. Et qm̄ prisma AK ponitur simile prismati MV, parallelogrāmū ABGF simile erit pa-
1. diff. sexti. *rallelogrāmo MNSR, & parallelogrāmū AELF simile ipsi MQXR. quare vt LE ad EA, ita X*
Q ad QM: vt aūt AE ad EB, ita MQ ad QN. ex ęquali igitur ut LE ad EB, ita XQ ad QN, ideoq; vt BG ad GL, ita NS ad SX, angulus autem LEB est aequalis angulo XQN ob similitudinē prismatum. si enim similibus existentibus prismatibus AK MV, angulus LEB non est aequalis angulo XQN, alter eorum maior erit sit maior XQN, & ad rectam lineam BE, & ad punctum in ipsa E angulo NQX constituatur aequalis angulus BEY, vt recta linea EY terminetur à plano pentagoni FGHKB in puncto Y; & iungantur FY YK. erit pentagonum FGHKY simile pentagono RSTVX. sed & pentagonum FGHKL ponitur eidem simile. pentagonum igitur FGHKL simile est pentagono FGHKY. quare angulus FLK aequalis est angulo FYK. sed & maior. quod fieri nō potest. Non igitur similibus existentibus prismatibus angulus LEB inęqualis est angulo XQN. quare ne-
34 primi. *cessario est aequalis; & ob id angulus EBG aequalis est angulo QNS. ergo & qui ipsis opponuntur LGB GLE angulis XSN SXQ sunt aequales. parallelogrammum igitur BELG simile est parallelogrammo NQXS. Eadem ratione demonstrabitur parallelogrammum LECH simile parallelogrammo XQOT. ergo prisma AL, cuius basis triangulum ABE, & ipsi oppositum FGL simile est prismati MX, cuius basis triangulum MNQ, & oppositum ipsi RSX; similibus enim planis continentur. est autem ob prismatum similitudinem, & parallelogrammum BCHG simile parallelogrammo NOTS, & parallelogrammum EDKL simile ipsi QPVX. ergo & prisma BH, cuius basis triangulum EBC, & ipsi oppositum LGH est simile prismati NT, cuius basis triangulum QNO, et ipsi oppositum XST, & denique prisma CL cuius basis triangulum ECD, & oppositum ipsi LSK, simile est prismati OX, cuius basis triangulum QOP, & quod ipsi opponitur XTV. similia autem,*

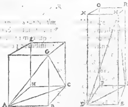
prismata

prismata, quae triangulares bases habent sunt in tripla proportione homologorum laterum, quod nos & ad 34 propositionem antecedentis libri, & proxime aliter demonstrauimus. prisma igitur AL ad prisma MX triplam proportionem habet eius, quam habet AB ad MN, & prisma BH ad prisma NT triplam habet proportionem eius, quam BC habet ad NO, hoc est AB ad MN. prisma autem CL ad prisma OX triplam proportionem habet eius, quàm habet CD ad OP, hoc est AB ad MN ut supra demonstrauimus. homolga enim latera omnia inter se eandem habent proportionem. Quare vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedētia ad omnia cōsequentia. Vt igitur prisma AL ad prisma MX, ita omnia prismata ad omnia prismata, hoc est totum prisma AK ad totum prisma MV. prisma autem AL ad prisma MX triplam habet proportionem eius, quam habet AB ad MN. ergo & prisma AK ad prisma MV triplam proportionem habebit eius, quam AB ad MN. Similia igitur prismata, quae multiangulas habent bases in similia prismata triangulares bases habentia diuiduntur, numeroq; aequalia, & homologa totis; & prisma ad prisma triplam proportionem habet eius, quam habet latus homologum ad homologum latus. quod oportebat demonstrare.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

Aequalium pyramidum, & triangulares bases habentium bases ex contraria parte altitudinibus respondent: & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illæ sunt ęquales.

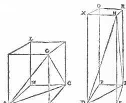
Sint enim pyramides ęquales, quæ triangulares bases habeant ABC DEF, vertices vero GH puncta. Dico pyramidum ABCG DEFH bases ex contraria parte altitudinibus respondere, & vt ABC basis ad basim DEF, ita esse pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG. Cōpleantur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. Et quoniam pyramis ABCG est ęqualis pyramidi DEFH, atque est pyramidis quidem ABCG sex



tuplum BGML solidum, pyramidis vero DEFH sextuplum solidum EHPO; erit solidum BGML solido EHPO æquale. equalium autem solidorum parallelepipedo rum bases ex contraria parte altitudinibus respondent. est igitur vt BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi altitudo ad altitudinem solidi BGML. Sed vt BM basis ad basim EP, ita ABC triangulum ad triangulum DEF. ergo & vt ABC triangulum ad triangulum DEF, ita solidi EHPO altitudo ad altitudinem solidi BGML. Sed solidi quidem EHPO altitudo eadem est altitudini pyramidis DEFH; solidi vero BGML altitudo eadem est altitudini pyramidis ABCG. est igitur vt ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. quare pyramidum ABCG DEFH bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Sed pyramidum ABCG DEFH bases ex contraria parte respondeant altitudinibus, sitq; vt ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH æqualem esse. ijsdem enim constructis, quoniam vt ABC basis ad basim DEF, ita est DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramamidis ABCG; vt autem ABC basis ad basim DEF, ita BM parallelogrāmū ad parallelogrāmū EP: erit & vt parallelogrāmū BM ad EP parallelogrāmū, ita pyramidis DEFG altitudo ad altitudinē pyra

Marginal notes: 15 quinti. / 34 undecimi. / 15 quinti. / 15 quinti.

midis ABCG. Sed pyramidis quidē DEFH altitudo eadē est altitudini solidi parallelepipedi EHO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem est altitudini solidi parallelepipedi BGML. est igitur vt BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem solidi parallelepipedi BGML. Quorum autem solidorum parallelepipedorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea sunt aequalia. solidum igitur parallelepipedum BGML aequale est solido parallelepipedo EHPO atque est solidi quidem BGML sexta pars pyramis ABCG; solidi vero EHPO itidem sexta pars pyramis DEFH. ergo pyramis ABCG pyramidi DEFK est aequalis. Aequalium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent, & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases ex contraria parte altitudinibus respondent illae sunt aequales. quod oportebat demonstrare.



F. C. COMMENTARIVS.

Sed & in pyramidibus, quae multiangulas bases habent idem demonstrabitur hoc modo.

Aequalium pyramidum & multiangulas bases habentium, bases ex cōtraria parte altitudinibus respondent: & quarum pyramidum multiangulas bases habentiū bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illae sunt aequales.

Sint pyramides aequales ABCDL EFGHKM, & pyramidis quidem ABCDL basis sit quadrilaterum ABCD, & vertex punctum L; pyramidis vero EFGHKM sit basis pentagonum EFGHK, & vertex M. Dico bases ex contraria parte altitudinibus respondere: hoc est quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita esse vt pyramidis EFGHKM altitudo ad altitudinē pyramidis ABCDL. Fiat enim ex xxv. sexti triangulum in quo N aequale quadrilatero ABCD: & rursus fiat aliud triangulum in quo O aequale pentagono EFGHK, et à triangulo N erigatur pyramis aequealta pyramidi ABCDL: à triangulo autem O erigatur alia pyramis aequealta pyramidi EFGHKM. erit igitur pyramis N aequalis pyramidi ABCDL: sunt enim in basibus aequalibus, & aequalem habent altitu-

6. huius.





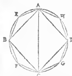
dinem: & simili ratione pyramis O aequalis erit pyramidi EFGHKM. ergo pyramis N pyramidi O est aequalis. aequalium autem pyramidum, & triangulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent. Vt igitur triangulum N ad triangulum O, ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N. Sed vt triangulum N ad O triangulum, ita quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, vtrumque enim vtrique est aequale. ergo vt quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N; hoc est altitudo pyramidis EFGHKM ad pyramidis ABCDL altitudinem. Sed iisdem stantibus sit ut quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita pyramis EFGHKM altitudo ad altitudinem pyramidis ABCDL. Dico pyramidem ABCDL pyramidi EFGHKM aequalem esse. est enim ut quadrilaterum ABCD ad pentagonum EFGHK, ita triangulum N ad O triangulum. quare vt triangulum N ad triangulum O, ita pyramidis EFGHKM altitudo ad altitudinem pyramidis ABCDL, hoc est ita pyramidis O altitudo ad altitudinem pyramidis N. quarum autem pyramidum triangulares bases habentium, bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illae sunt aequales. aequalis igitur est pyramis N pyramidi O; ac propterea pyramis ABCDL pyramidi EFGHKM est aequalis. Aequalium igitur pyramidum & multiangulas bases habentium, & reliqua. quod demonstrare oportebat.

COROLLARIVM.

Ex prædictis colligitur prismatum omnium æqualium bases ex contraria parte altitudinibus respondere: & quorum prismatum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, ea esse æqualia; prismata enim in eisdem basibus constituta, & eadem altitudine sunt pyramidum tripla.

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

Omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet & altitudinem æqualem.

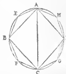


Habeat enim conus eandem basim, quam cylindrus, videlicet circulum ABCD, & altitudinem æqualem. Dico conum tertiam partem esse cylindri, hoc est cylindrum coni triplum esse. Si enim cylindrus nõ sit triplus coni, vel maior erit, quàm triplus, uel minor. Sit primũ maior quàm triplus; & describatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD maius est, quàm dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur prisma æquealtũ cylindro, quod quidem prisma maius erit, quàm cylindri dimidium; quoniam si circa circulum ABCD quadratum describatur, erit inscriptum quadratum dimidium circumscripti: & sunt ab eisdem basibus erecta solida parallelepipeda æquealta, nimirum prismata ipsa. quare prismata inter se sunt vt bases, & prisma igitur erectum à quadrato ABCD dimidium est prismatis erecti à quadrato quod circa circulũ ABCD describitur, atq; est cylindrus minor prismate erecto à quadrato quod describitur circa circulũ ABCD. prisma igitur erectũ à quadrato ABCD ęquealtũ cylindro dimidio cylindri est maius. secentur circũferentiæ AB BC CD DA bifaria in punctis EFGH, & AE EB BF FC CG GD DH HA iungantur Vnũquodq; igitur triangulorũ AEB BFC CGD DHA maius est dimidio portionis circuli ABCD, in qua cõsistit, vt superius demonstratũ est. erigantur ab vnoquoq; triangulorũ AEB BFC CGD DHA prismata æquealta cylindro. ergo & vnumquodque erectorum prismatum maius est dimidio portionis cylindri quæ ad ipsum est, quoniam si per puncta EFGH parallelę ipsis AB BC CD DA ducãtur, & compleãtur in ipsis AB BO CD DA parallelogrammã: à quibus solida parallele- Ex coroll 7. huius.

parallelepipeda æquealta cylindro erigantur·erunt vniuscuiusque erectorum dimidia prismata ea, quæ sunt in triagulis AEB BFC CGD DHA. & sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. ergo & prismata quæ in triangulis AEB BFC CGD DHA maiora sunt dimidio portionum cylindri, qui ad ipsa sunt. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes prismata æquealta cylindro, & hoc semper faciemtes quoad tandem relinquantur quædam portiones cylindri, quæ sint minores excessu; quo cylindrus ipsius coni triplum superat. reliquantur iam & sint AE EB BF FC CG GD DH HA. reliquum igitur prisma, cuius basis quidem polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem, quę cylindri, maius est, quám triplum coni. Sed prisma cuius basis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem, quæ cylindri triplum est pyramidis, cuius basis polygonum AEBFCGDH, uertex autem idem, qui coni. & pyramis igitur, cuius basis polygonum AEBFCGDH, uertex autem idē qui coni, maior est cono, qui basim habet ABCD circulum Sed & minor, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. Non igitur cylindrus maior erit, quàm triplus coni. Dico insuper neq; cylindrum minorem esse, quàm triplum coni, si enim fieri potest, sit cylindrus minor, quàm triplus coni. erit conuertendo conus maior, quàm tertia pars cylindri. Describatur in ABCD circulo quadratum ABCD, ergo quadratum ABCD maius est quā dimidiū ABCD circuli; & à quadrato ABCD erigatur pyramis, uerticē habēs eundē quē conus. pyramis igitur erecta maior est quàm coni dimidium· quoniam, vt ante demonstrauimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum ABCD dimidium eius, quod circa circulum descriptum est: & si à quadratis erigantur solida parallelepipeda æquealta cono, quæ & prismata appellantur, erit quod à quadrato ABCD erigitur dimidium eius, quod erectum est à quadrato circa circulum descripto, etenim inter se sunt vt bases. quare & tertiæ partes ipsarum. pyramis igitur, cuius basis quadratum ABCD, dimidia est eius pyramidis, quæ à quadrato circa circulum descripto erigitur. Sed pyramis erecta à quadrato descripto circa circulum, maior est cono, ipsum namque comprehendit. ergo pyramis cuius basis ABCD quadratum, vertex autem idē qui coni, maior est, quàm coni dimidium. secentur circumferentię AB BC CD DA bifariā in punctis EFCH. & iungātur AE EB BF FC CG GD DH HA. & vnum quodque igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA maius est, quàm dimidium portionis circuli ABCD, in qua consistit, erigantur ab vnoquoque triangulorum AEB BFC CGD DHA pyramides verticem habentes eundem, quem conus. ergo & vnaquæque pyramidum eodem modo erectarum, maior est, quàm dimidium coni portionis, quæ est ad ipsam. Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, iungentesq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes pyramidem uerticem habentem eundem, quem conus, & hoc semper facientes, relinquemus tandē quasdam coni portiones, quę maiores erunt excessu, quo conus tertiam cylindri partem superat. Relinquantur & sint, quę in ipsis AE EB BF FC CG DH HA. reliqua igitur pyramis cuius basis polygonum AEBFCGH, & uertex idem qui coni, maior est, quam tertia cylindri pars. sed pyramis cuius basis polygonum AEBFCDH, uertex autem idem qui coni, tertia pars est prismatis, cuius basis polygonū AEBFCDH, altitudo autem eadem quę cylindri. prisma igitur, cuius basis AEBFCGH polygonum, & altitudo eadem, quę cylindri, maius est cylindro, cuius basis est

Ex 1 decimi.

Ex corol 7. huius.



5 quinti.



est circulus ABCD. sed & minus, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. Non igitur cylindrus minor est, quàm triplus coni. ostensum autem est neque maiorem esse, quàm triplum. ergo cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus est tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eādē, quam ipse basim habentis, & altitudinem æqualem. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

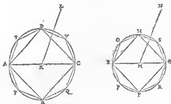
Eodem modo illud etiam demonstrabitur in conis & cylindris scalenis.

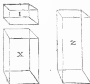
COROLLARIVM.

Ex quibus constat omnem conum siue rectum, siue scalenum tertiam partem esse cylindri siue recti siue scalenti, qui eandem basim habet, & æqualem altitudinem.

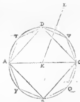
THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

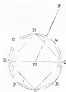
Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases.



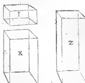


Sint eadem altitudine coni, & cylindri, quorum bases circuli ABCD EFGH axes autem KL MN, & diametri basiū AC EG Dico vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita esse conum AL ad EN conum. si enim non ita fit, erit vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidū minus cono EN, vel ad maius. sit primū ad minus, quod sit X, & quo minus est solidum X cono EN, ei æquale sit I solidum. conus igitur EN, ipsis solidis X I est æqualis. Describatur in EFGH circulo quadratū EFGH. ergo quadratum maius est, quàm dimidium circuli. erigatur à quadrato EFGH pyramis æquealta cono. pyramis igitur erecta maior est, quàm coni dimidium, nam si circa circulum quadratum describamus, & ab ipso erigamus pyramidem æquealtam cono, erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptę dimidia; etenim inter se sunt vt bases: conus autem circumscripta pyramide est minor. ergo pyramis, cuius basis quadratum EFGH, uertex autem





autem idem qui coni, maior est quàm coni dimidium. secentur circumferentiæ EF FG GH HE bifariam in punctis OPRS; & OE EP PF FR RG GS SH iungantur. Vnumquodque igitur triangulorum HOE EPF FRG GSH maius est, quàm dimidiũ portionis circuli, in qua consistit. erigatur ab vnoquoque triangulorum HOE EPF FEG GSH pyramis æquealta cono. ergo & vnaquæque erectarum pyramidum maior est, quàm dimidium portionis coni, quæ est ad ipsam Itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, & iũgentes rectas lineas, & ab vnoquoque triãgulorum erigentes pyramides æquealtas cono,



atque hoc semper facientes, relinquemus tandem aliquas portiones coni, quæ solido I minores erunt. relinquantur & sint quę in ipsis HO OE EP PF FR RG GS SH. reliqua igitur pyramis, cuius basis polygonũ HOEPFRGS, altitudo autẽ eadẽ, quę coni, maior est solido X. Describatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS simile & similiter positum polygonum DTAYBQCV, & ab ipso erigatur pyramis æquealta cono AL. Quoniam igitur est vt quadratum ex AC ad quadratum ex EG a huius. ita DTAYBQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS; vt autem quadratum b huius. ex AC ad quadratũ ex EG, ita ABCD circulus ad circulũ EFGH: erit vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS. sed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X solidum: & vt polygonũ DTAYBQCV ad polygonũ HOEPFRGS, ita pyramis cuius basis DTAYBQCV polygonũ, uertex autem punctum L ad pyramidem, cuius basis polygonum HOEPFRGS, & uertex punctum N. Vt igitur conus AL ad X solidum, ita pyramis, cuius basis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum L ad pyramidem, cuius basis polygonum HOEPFRGS, & uertex N punctum. quare permutando vt conus AL ad pyramidem, quæ in ipso est, ita solidum X ad pyramidẽ, quę in cono EN. conus autem AL maior est pyramide, quæ in ipso. maius igitur est solidum X pyramide, quæ in cono EN. sed & minus, quod fieri non potest. Non igitur vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est AL conus ad solidum aliquod minus cono EN. Similiter demonstrabitur neque vt EFGH circulus ad circulum ABCD, ita esse conum EN ad aliquod solidum minus cono AL. Dico præterea neque esse vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod solidum maius cono EN. Si enim fieri potest, sit ad solidum maius, quod sit Z. ergo conuertendo vt EFGH circulus ad circulum ABCD, ita erit solidum Z ad AL conum. sed ut solidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL. & ut igitur EFGH circulus ad circulũ ABCD, ita conus EN ad aliquod solidum minus

minus cono AL, quod fieri non posse ostensum est. Non igitur vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum maius cono EN. ostensum autem est neque esse ad minus. ergo vt ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est conus AL ad EN conum. sed vt conus ad conum, ita est cylindrus ad cylindrum, est enim vterque utriusque triplus. & ut igitur ABCD circulus ad circulum EFGH, ita in ipsis cylindri æqualti conis. ergo coni & cylindri qui eandem habent altitudinē inter se sunt ut bases. quod demonstrare oportebat. 15.quinti. Ex antecedente.

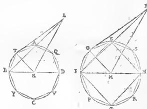
F. C. COMMENTARIVS.

Et hoc in conis & cylindris scalenis similiter demonstrabitur.

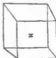
THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

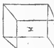
Similes coni & cylindri inter se sunt in tripla proportione diametrorum, quæ sunt in basibus.

Sint similes coni & cylindri, quorum bases eorundem circuli ABCD EFGH, diametri verò basium BD FH. & axes conorum, vel cylindrorum KL MN. Dico conū cuius basis ABCD circulus, vertex autē punctum L ad conū, cuius basis circulus EFGH, vertex autem N punctum, triplam habere proportionē



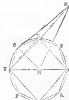
eius, quā habet BD ad FH. Si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplam proportionem eius, quam BD habet ad FH, habebit ABCDL conus ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplam proportionem, uel ad maius. habeat primum ad minus, quod sit X, & describatur in EFGH circulo quadratum EFGH, quadratum igitur EFGH maius est, quàm dimidium EFGH circuli. & erigatur à quadrato EFGH pyramis æqualta cono. ergo erecta pyramis maior est, quam coni dimidia. Itaque secetur EF FG GH HE circumferentiæ bifariam in punctis OPRS & iungātur EO OF FP PG GR RH HS SE. Vnumquodque igitur triangulorū EOF FPG GRH HSE maius est quàm dimidium portionis circuli EF GH, in qua consistit. & erigatur ab vnoquoque triangulorum EOF FPG GRH HSE pyramis eundem uerticē habēs, quem conus. ergo & vnaquæque erectarum pyramidum maior est quām dimidia portionis coni, quæ est ad ipsam. secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, iūgentesq; rectas lineas, & ab vnoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem babentes verticem, quem conus; atque hoc semper facientes tandem relinquemus quasdam coni portiones, quę minores erūt excessu, quo conus EFGHN ipsum X solidum superat. Relinquātur & sint quę in ipsis EO OF FP PG GR RH





HS SE. Reliqua igitur pyramis, cuius basis quidem polygonum EOFPGRHS, uertex autem N punctum, maior est solido X. Describatur etiam in circulo ABCD polygono EOFPGRHS simile, & similiter positum polygonum ATBYCVDQ: à quo erigatur pyramis eandem verticem habens, quem conus; & triangulorum continentium pyramidem, cuius basis quidem est polygonum ATBYCVDQ, vertex autem punctum L, vnũ sit LBT; triangulorũ vero continentiũ pyramidem, cuius basis EOFPGRHS polygonũ, & vertex punctũ N, vnum sit NFO, & iũgãtur KT·MO. Quõ igitur conus ABCD similis est cono EFGH, erit vt BD ad FH, ita KL axis ad axẽ MN. vt aũt BD ad FH, ita BK ad FM. ergo & ut B K ad F M, ita KL ad MN, & permutando vt BK ad KL, ita FM ad MN. perpẽdicularis enim vtraque est, & circa ęquales angulos BKLFMN latera sũt proportionalia. Simile igitur est BKL triangulum triangulo FMN. Rursus quoniam est vt BK ad KT, ita FM ad MO, & circa ęquales angulos BKT FMO latera sunt proportionalia; etenim quę pars est angulus BKT quattuor rectorum, qui sunt ad K centrũ, eadem est pars & angulus FMO quattuor rectorum, qui sunt ad centrum M: erit triangulum BKT triãgulo FMO simile. Et quoniã ostensum est vt BK ad KL ita esse FM ad MN; ęqualis aũt est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit vt TK ad KL, ita OM ad MN: & circa ęquales angulos TKL OMN latera sunt proportionalia; recta enim sunt. triangulum igitur LKT simile est triangulo NMO. Quòd cum ob similitudinem triangulorum BKL FMN, sit vt LB ad BK, ita NF ad FM; ob similitudinem uero triangulorum BKT FMO, vt KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex æquali vt LB ad BT, ita NF ad FO. Rursus cum ob similitudinem triangulorum LTK NOM, sit vt LT ad TK, ita NO ad OM; & ob simililirudinem triangulorum KBT OMF, vt KT ad TB, ita MO ad OF· ex æquali erit vt LT ad TB, ita NO ad OF. ostensum autem est & vt TB ad BL, ita OF ad FN. quare rursus ex æquali vt TL ad LB, ita ON ad NF. triangulorum igitur LTB NOF proportionalia sunt latera, ideoque æquiangula sunt LTB NOF triangula, & inter se similia. quare & pyramis, cuius basis triangulum BKT, uertex autem L punctum, similis est pyramidi, cuius basis FMO triangulum, & uertex punctum N; similibus enim planis continentur, & multitudine æqualibus. pyramides autem similes, & quę triangulares bases habent in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplam habet proportionem eius, quam BK habet ad FM. Similiter à punctis quidem AQDVCY ad K, à punctis vero ESHRGP ad M ducentes rectas lineas, & à triangulis erigentes pyramides vertices eosdẽ habentes, quos coni, ostendemus & vnãquamque pyramidũ eiusdẽ ordinis ad vnaquãq; alterius ordinis triplã proportionẽ habere eius, quã hẽt BK latus homologũ ad homologũ latus FM, hoc est quã BD ad FH. Sed vt vnũ antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia









quentia. est igitur & ut BKTL pyramis ad pyramidem FMON, ita tota pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem punctum L ad totam pyramidē cuius basis polygonum EOFPGRHS & uertex punctum N. quare & pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum, uertex autem pūctum L ad pyramidem cuius basis polygonum EOFPGRHS & uertex punctum N, triplam proportionem habet eius, quam BD habet ad FH. ponitur autem conus, cuius basis circulus ABCD uertex autem punctum L ad solidum X triplam proportionem habere eius, quam BD ad FH. Vt igitur conus, cuius basis circulus ABCD, uertex autem punctum L ad solidum X, ita est pyramis, cuius basis ATBYCVDQ polygonum; uertex autem punctum L ad pyramidem, cuius basis polygonum EOFPRHS & uertex punctum N, & permutando, ut conus cuius basis circulus ABCD, uertex autem punctum L ad pyramidem, quę in ipso est, cuius basis ATBYCVDQ polygonū, uertex aūt punctū L ita solidum X ad pyramidem cuius basis polygonum EOFPGRHS, & uertex punctum N. dictus autem conus maior est pyramide, quę in ipso; etenim eam comprehendit. maius igitur est & solidum X pyramide, cuius basis polygonum EOFPGRH S, uertex autem punctum N. sed & minus, quod fieri non potest. non igitur conus, cuius basis ABCD circulus, & uertex punctum L ad aliquod solidum minus cono, cuius basis circulus EFGH & uertex N punctum, triplam proportionē habet eius quam BD habet ad FH. similiter demonstrabimus neque conum EFGHN ad aliquod solidum minus cono ABCDL triplam proportionem habere eius, quam habet FH ad BD. Itaque dico neque ABCDL conum ad solidum maius cono EFGHN triplam habere proportionem eius, quam BD habet ad FH. si enim fieri potest habeat ad aliquod solidum maius, quod sit Z. conuertendo igitur solidum Z ad conum ABCDL triplam proportionem habet eius, quam FH ad BD ut autem solidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod solidum minus cono ABCDL. ergo & cônus EFGHN ad solidum aliquod minus cono ABCDL triplā proportionem habebit eius, quam FH habet ad BD, quod fieri non posse demonstratum est. non igitur ABCDL conus ad solidum aliquod maius cono EFGHN triplam proportionem habet eius, quam BD ad FH ostensum autem est neque ad minus. quare conus ABCDL ad EFGHN conum triplam proportionem habet eius, quam BD ad FH. Vt autem conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum. cylindrus enim in eadem existēs basi, in qua conus, & ipsi æqualtus coni triplus est. cum ostēsum sit omnem conum tertiam partem esse cylindri, eandem quam ipse basim habētis, & aequalem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplam proportionē habebit eius, quam BD habet ad FH. similes igitur coni, & cylindri inter se sunt in tripla proportione diametrorū, quæ sunt in basibus. quod demonstrare oportebat. 15 quinti. 10. huius.

F. C. COMMENTARIVS.

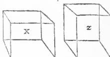
Precedens demonstratio in conis & cylindris tantum recti; congruit, quam nos universe ad omnes tam rectos quam scalenos accōmodabimus hoc pacto.

Similes coni & cylindri omnes interse in tripla sunt proportionem diametrorū, quę sunt in basibus.

Sint similes coni & cylindri, quorum bases quidem circuli ABCD EFGH, et axes KL MN: & per axes ducantur plana ad rectos angulos basibus, quae bases secent, sintq; eorum planorum & basium communes sectiones BD FH, quae circulorū diametri erunt. Dico conum cuius basis ABCD circulus, et vertex punctum L ad conum cuius basis circulus EFGH, vertex autem N punctum triplam proportionem habere eius, quam habet BD ad FH. si enim non ita sit, habebit conus ABCDL ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplam proportionem eius, quam BD habet ad FH, vel ad maius. Habeat primum ad solidum minus, quod sit X, & describatur in EFGH circulo quadratum EFGH. erit igitur quadratum EFGH maius, quam dimidium EFGH circuli. Erigatur à quadrato EFGH pyramis aequealta cono, quae maior erit, quam coni dimidia, & secentur EF FG GH HE circumferentiae bifariam in punctis OPRS, iunganturq; EO OF FP PG GR RH HS SE. Vnumquodque igitur triangulorum EOF FPG GRH HSE maius est, quam

 dimidium

dimidiũ portionis circuli EFGH, in qua cõsistit: & erigatur ab unoquoque triangulorũ EOF FPG GRH HSE pyramis eundem, quem conus vertcem habens. ergo et vnaqueque erectarũ pyramidũ maior est, quã dimidia coni portionis, quae est ad ipsam secãtes igitur reliquas circũferentias bifariam, iungẽtesq́; rectas lineas, & ab vnoquoq; triangulorum erigẽtes pyramides, eundem habentes verticem, quem conus: atque hoc semper facientes tandem relinquemus quasdã coni portiones, quę minores erunt excessu, quo conus EFGHN ipsum X solidum superat. relinquantur, & sint quae in ipsis EO OF FP PG GR RH HS SR. reliqua igitur pyramis, cuius basis polygonum EOFPGRHS, vertex autem pũctum N solido X est maior.



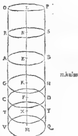
Describatur etiam in circulo ABCD ipsi EOFPGRHS polygono simile & similiter positum polygonum ATBYCVDQ. atque ab eo erigatur pyramis eundum, quem conus verticem habens: & triangulorum quidem continentium pyramidem, cuius basis polygonum ATBYCVDQ; & vertex punctum L, vnum aliquod sit LBT: triangulorũ vero continentium pyramidem, cuius basis EOFPGRHS polygonum, & vertex punctum N, vnum sit NFO: & KT MO iungantur. Quoniam igitur conus ABCD similis est cono EFGH, erit ex diffinitione conorum similium, quã nos in principio antecedentis libri attulimus, vt diameter BD ad diametrum FH, ita axis KL ad MN axẽ: vt autem BD ad FH, ita BK ad FM. ergo & vt BK ad FM, ita KL ad MN; & permutando vt BK ad KL, ita FM ad MN. atque est angulus BKL aequalis angulo FMN ex eadem diffinitione co-
6 sexti. norum similium. cum igitur circa aequales angulos BKL FMN latera sint proportionalia; erit BKL triangulum simile triangulo FMN. Et quoniam vt BK ad KT, ita est FM ad MO; angulus autem BKT est aequalis angulo FMO: etenim quę pars est angulus BKT quattuor rectorũ, qui sunt ad centrum K, eadem est pars angulus FMO quattuor rectorum, qui sunt ad M centrum. rursus erunt circa aequales angulos BKT FMO latera proportionalia. triangulum igitur BKT triangulo FMO est simile. Itaque quoniam ostensum est vt BK ad KL, ita FM ad MN; aequalis autem est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit vt TK ad KL, ita OM ad MN. & sunt in conis recti anguli TKL OMN inter se aequales, quòd recti sint. ergo in ipsis cum circa aequales angulos TKL OMN latera sint proportionalia; erit triangulum LKT simile triangulo NMO. At in conis scalenis hoc modo demonstrabitur. Ducantur à verticibus eorum LN ad rectos angulos planis basium rectae lineae LΦ NΨ, quae cadent in communes planorum & basium sectiones BD FH ex 38. antecedentis libri. & iungantur TΦ OΨ. Cum igitur ex diffinitione conorum similium angulus LKΦ sit ęqualis angulo NMΨ, & anguli LΦK NΨM utrique recti: erit & reliquus KLΦ reliquo MNΨ aequalis, & triangulum LΦK simile triangulo NΨM. rursus cum angulus BKT sit ęqualis angulo FMO; & reliquus ex duobus rectis TKΦ aequalis erit reliquo OMΨ. est autem ob similitudinem triangulorum LΦK NΨM, ut ΦK ad KL, ita ΨM ad MN, & ob similitudinem triangulorũ BKL FMN, ut LK ad KB, hoc est ad KT ipsi aequalem, ita NM ad MF, hoc est ad MO. ergo ex aequali vt ΦK ad KT, ita ΨM ad MO. & cum circa aequales angulos TKΦ OMΨ latera sint proportionalia, erit & triangulum KTΦ triangulo MOΨ simile. ergo vt LΦ ad ΦK, ita NΨ ad ΨM: & vt ΦK ad ΦT, ita ΨM ad MO. quare ex aequali vt LΦ ad ΦT, ita NΨ ad ΨO. & sunt anguli LΦT NΨO

inter

*inter se aequales, quòd vtrique recti ex diffinitione rectae lineae, quae ad planum recta est cum
igitur circa aequales angulos LΦT NΥO latera sint proportionalia, sequitur triãgula quoq; LTΦ
NOΥ inter se similia esse. ideoq; vt LT ad TΦ, ita NO ad OΥ: & vt TΦ ad TK, ita OΥ ad OM. ex
aequali igitur vt LT ad TK, ita est NO ad OM. demonstratum autem est vt LK ad KT, ita esse N
M ad MO. quare conuertendo vt TK ad KL, ita OM ad MN rursus igitur ex aequali vt TL ad L
K, ita est ON ad NM. quòd cum triangula LKT NMO latera habeant proportionalia, aequian-* 6 sexti.
*gula sint, & ob inter se similia. Itaq; quoniam ob similitudinem triangulorum BKL FMN est vt
LB ad BK. ita NF ad FM, & ob similitudinem triangulorum BKT FMO, vt KB ad BT, ita MF
ad FO, erit ex aequali vt LB ad BT, ita NF ad FO: & conuertendo vt TB ad BL, ita OF ad FN.
Rursus quoniam ob similitudinem triangulorum LKT NMO, vt LT ad TK, ita est NO ad OM, &
ob similitudinem triangulorum KBT MFO, vt KT ad TB, ita MO ad OF; ex aequali erit vt LT
ad TB, ita NO ad OF. ostensum autem est & vt TB ad BL, ita OF ad FN. rursus igitur ex aequa
li vt TL ad LB, ita erit ON ad NF. quare triangulorum LTB NOF latera sunt proportionalia,
ob eamq; caussam & aequiangula & inter se similia erunt. pyramis igitur, cuius basis triangulum
BKT, vertex autem punctum L similis est pyramidi, cuius basis triangulum FMO, & vertex N
punctum, similibus enim planis continentur & numero aequalibus. pyramides autem similes in
tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON tri-
plam habet proportionem eius, quam BK habet ad FM. Reliqua similiter vt in antecedente de-
monstrabimus.*

THEOREMA XIII. PROPOSITIO. XIII.

Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit vt cy
lindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.



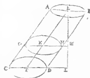
Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB
CD parallelo, & occurat axi EF in K puncto. Dico vt BG cylin
drus ad cylindrum GD, ita esse EK axem ad axem KF. produca
tur enim EF axis ex vtraque parte ad puncta LM: & ipsi quidẽ
EK axi exponantur æquales quotcumq; EN NL; ipsi vero FK
ęquales quotcumque FX XM: & per puncta LNXM ducantur
plana ipsis AB CD parallela; atque in planis per LNXM circa
centra LNXM intelligantur circuli OP RS TY VQ ęquales
ipsis AB CD; & cylindri PR RB DT TQ intelligatur. Quo
niam igitur axes LN NE EK inter se sunt ęquales, erunt cylin
dri PR RB BG inter se vt bases: bases autem æquales sunt. er 11. huius.
go & cylindri PR RB BG sunt æquales. Quòd cum axes LN
NE EK inter se æquales sint, itẽq; cylindri PR RB BG inter
se æquales; sitq; ipsorum LN NE EK multitudo æqualis mul
titudini ipsorum PR RB BG: quotuplex est axis KL ipsius E
K axis, totuplex erit & PG cylindrus cylindri GB. Eadem ratio
ne & quotuplex est MK axis ipsius axis KF, totuplex est & QG
cylindrus cylindri GD. & si quidem axis LK sit ęqualis axi KM,
erit & PG cylindrus cylindro GQ æqualis. Si autem axis LK
maior sit axe KM, & cylindrus PG maior erit cylindro GQ, &
si minor minor. quattuor igitur existentibus magnitudinibus, uidelicet axibus EK
KF, & cylindris BG GD sumpta sunt æquemultiplicia, axis quidem EK & BG cy-
lindri, nẽpe axis KL, & cylindrus PG; axis uero KF, & cylindri GD ęquemultiplicia,
axis scilicet KM, & GQ cylindrus, & demonstratum est si LK axis superat axem KM
& PG cylindrum superare cylindrum GQ, & si æqualis æqualis, & si minor minor.
est igitur axis EK ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare si cylin-
drus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita
axis ad axem. quod demonstrare oportebat.

F. C.

F. C. COMMENTARIVS.

Illud etiam contingit in cylindro scaleno; quod eadem ratione demonstrabitur.

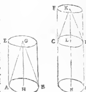
Ex quibus constat si quilibet cylindrus secetur plano basibus parallelo, ut cylindrus ad cylindrum, ita esse altitudinem cylindri ad cylindri altitudinem.



In cylindris enim rectis illud perspicuum est, cum eorum altitudines ab axibus determinentur. in scalenis vero facile apparebit ducta recta linea EL a puncto E ad basis planum perpendiculari, quae plano per GH ducto in M occurrat. Quoniam enim duę rectę lineę EF EL secantur à planis parallelis, in easdem proportiones secabuntur. (17. undecimi) *quare vt EK ad KF, ita erit EM ad ML; ac propterea ut BG cylindrus ad cylindrum GD, ita cylindri BC altitudo FM ad ML altitudinem cylindri GD, quod propositum fuerat demonstrandum.*

THEOREMA XIIII. PROPOSITIO. XIIII.

In æqualibus basibus existentes coni, & cylindri inter se sunt vt altitudines.



Sint enim in æqualibus basibus AB CD cylindri EB FD. ✻ Dico vt EB cylindrus ad cylindrum FD, ita esse GH axem ad axem KL. producatur enim KL axis ad punctum N, ponaturq; ipsi GH axi ęqualis LN, & circa axem LN intelligatur cylindrus CM. Quoniam igitur cylindri EB CM eandem habent altitudinem, inter se sunt vt bases: (11. huius.) bases autem sunt æquales. ergo & cylindri EB CM inter se æquales erunt. Et quoniam cylindrus FM plano secatur CD, oppositis planis parallelo, erit ut CM cylindrus ad cylindrum FD, (Ex antecedente.) ita axis LN ad KL axem. æqualis autem est cylindrus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi GH. est igitur vt EB cylindrus ad cylindrũ FD, ita axis GH ad KL axem. vt autem EB cylindrus ad cylindrum FD, ita ABG conus ad conũ CDK; (15. quinti. 3. huius.) cylindri enim sunt conorum tripli. ergo & vt GH axis ad axem KL, ita est ABG conus ad conum CDK, & cylindrus EB ad FD cylindrum. In basibus igitur æqualibus existentes coni & cylindri inter se sunt, ut altitudines. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

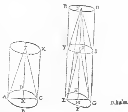
✻ Dico vt EB cylindrus ad cylindrum FD, ita esse GH axem ad axem KL] *Hoc est ita esse altitudinem GH ad KL altitudinem. in rectis enim conis, dę quibus Euclides loquitur, altitudo ipsa axis est, siue ab axe determinatur; in scalenis uero non item. sed tamen nihilominus demonstrabitur conos & cylindros in aequalibus basibus constitutos inter se esse vt axes, & ob id vt eorum altitudines ex ijs, quae nos proxime diximus.*

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Aequalium conorum, & cylindrorum bases ex contraria parte altitudinibus

altitudinibus respondent, & quorum conorum & cylindrorũ bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illi inter se sunt æquales.

Sint æquales coni & cylindri, quorum bases quidem ABCD EFGH circuli, & diametri ipsorum AC EG; axes autem KL MN; qui quidem & conorum vel cylindrorum sunt altitudines. & compleantur cylindri AX EO. Dico cylindrorum AX EO bases ex contraria parte altitudinibus respondere, hoc est vt ABCD basis ad basim EFGH, ita esse altitudinẽ MN ad altitudinem KL. altitudo enim KL vel æqualis est altitudini MN, vel non ęqualis. Sit primum ęqualis. atque est AX cylindrus æqualis cylindro EO. qui autem eandem habent altitudinem coni, & cylindri inter se sunt vt bases. ęqualis igitur est basis ABCD basi EFGH, ac proptereа ex contraria parte sibi ipsis respondent. estq; vt basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. Non sit autem altitudo KL altitudini MN æqualis, sed maior sit MN, & auferatur ab ipsa MN altitudini LK æqualis PM, & per P secetur EO cylindrus plano TYS oppositis planis circulorum EFGH RO parallelo, intelligaturq; cylindrus ES, cuius basis quidem, EFGH circulus, altitudo autem PM. Quoniam igitur AX cylindrus ęqualis est cylindro EO, alius autem aliquis est cylindrus ES; erit vt AX cylindrus ad cylindrũ ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrũ. 11. huius.



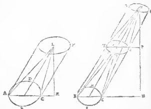
Sed ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita basis ABCD ad EFGH basim; cylindri enim AX ES eandem habent altitudinem. vt autem cylindrus EO ad ES cylindrũ, ita MN altitudo ad altitudinẽ MP. nam cylindrus EO secatur plano TYS oppositis planis parallelo. est igitur vt ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. æqualis autẽ est MP altitudo altitudini KL. quare vt basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. ęqualium igitur cylindrorum AX EO bases ex contraria parte altitudinibus respondent. 8. huius. 13 huius.

Sed cylindrorũ AX EO bases ex contraria parte respondeant altitudinibus sitq; ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinẽ. Dico AX cylindrũ cylindro EO ęqualẽ esse. iisdẽ enim cõstructis quoniã vt ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; altitudo autem KL ęqualis est altitudini MP: erit vt ABCD basis ad basim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem MP. Sed vt ABCD basis ad basim EFGH, ita AX cylindrus ad cylindrum ES; eandem enim habent altitudinem. ut autem MN altitudo ad altitudinem MP, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. est igitur vt AX cylindrus ad cylindrũ ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO est æqualis. similiter autem & in conis. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc in conis, & cylindris rectis tantum Euclides demonstrauit. Sed & in omnibus demonstrabitur hoc modo.

Sint aequales coni, & cylindri siue recti siue scaleni, quorum bases circuli ABCD EFGH: altitudines autem LK NM; & compleantur AX EO cylindri. Dico cylindrorum AX EO bases ex contraria parte altitudinibus respondere; hoc est vt ABCD basis ad basim EFGH, ita esse altitudinem NM ad LK altitudinem. Nam vel altitudines LK NM sint aequales vel inaequales; si aequales, cum aequales sint cylindri, erunt & bases aequales inter se: cylindri enim & coni qui eandem



eandem habẽt altitudinẽ, inter se sunt vt bases. quare bases ex contraria parte altitudinibus respõdẽt. Si vero altitudines nõ sint aequales, Sit maior NM altitudo; à qua auferatur PM aequalis altitudini LK, & per P ducatur planum cylindrum secans, oppositis planis parallelum TYS, intelligaturq́; cylindrus ES, cuius basis circulus EFGH; & altitudo PM. Itaque quoniam cylindrus AX est aequalis cylindro EO, & alius cylindrus est ES; erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. Sed
11. huius. *vt AX cylindrus ad cylindrum ES, ita basis ABCD ad EFCH basim, cum eandem habeant alti-*
13. huius. *tudinem. Vt autem cylindrus EO ad ES cylindrum, ita NM altitudo ad altitudinem MP, cylindrus enim EO secatur plano TYS oppositis planis parallelo. quare vt cylindrus RS ad cylindrum SE, ita est NP altitudo ad altitudinem PM: & componendo vt cylindrus EO ad ES cylindrum, ita NM altitudo ad altitudinem MP. Vt igitur basis ABCD ad EFGH basim, ita NM altitudo ad altitudinem MP. aequalis autem est altitudo MP altitudini LK. ergo ut ABCD basis ad basim EFGH, ita est altitudo NM ad LK altitudinem.*

Sed cylindrorum AX EO bases ex contraria parte altitudinibus respondeant, sitq́; vt ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo NM ad LK altitudinem. Dico cylindrum AX cylindro EO aequalem esse. iisdem enim constructis quoniam vt ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo NM ad LK altitudinem, altitudo autem LK est aequalis ipsi PM altitudini; erit vt ABCD basis ad
11. huius. *basim EFCH, ita NM altitudo ad altitudinem MP. Sed vt ABCD basis ad basim EFGH, ita cylindrus AX ad ES cylindrum, quòd eandem altitudinem habeat: & ut NM altitudo ad altitudinem MP, ita EO cylindrus ad cylindrum ES. Vt igitur cylindrus AX ad ES cylindrum, ita cylindrus EO ad cylindrum ES. quare AX cylindrus cylindro EO est aequalis. similiter autem & in conis. Aequalium igitur conorum, & cylindrorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, & quorum conorum, & cylindrorum bases ex contraria parte altitudinibus respondent, illi inter se sunt aequales. quod demonstrare oportebat.*

Sed & illud uerum est, quod nos demonstrauimus in commentarijs in librum Archimedis de conoidibus, & sphęroidibus ad propositionem XI.

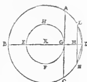
Cylindri omnes, et coni inter se proportionem habent compositam ex proportione basium & ex proportione altitudinum.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. XVI.

Duobus circulis circa idem centrum existẽtibus in maiori polygonum æqualium, & numero parium laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli ABCD EFGH circa idem centrum K. oportet in maiori circulo ABCD polygonum æqualium, & numero parium laterum describere, non tangens minorem circulum EFGH. Ducatur enim per K centrum recta linea BD: atque à puncto G ipsi BD ad rectos angulos ducatur AG: & ad C producatur. ergo AC circulum EFGH tangit. Itaque circumferentiam BAD bifariam secantes, & eius dimidium rursus bifariam, & hoc semper facientes tandem relinquemus circumferentiam

circumferentiam minorem ipsa AB. Relinquatur, sitq; LD, & à puncto L ad BD perpendicularis agatur LM, & ad N producatur, iunganturq; LD DN LN. ergo LD ipsi DN est æqualis. Et quoniam LN parallela est AC, & AC tangit circulum EFGH; ipsa LN circulum EFGH non tanget, & multo minus tangent circulum EFGH rectæ lineæ LD DN. Quòd si ipsi LD æquales deinceps circulo ABCD aptabimus, describetur in eo polygonũ æqualium & numero parium laterum non tangens minorem circulum EFGH quod facere oportebat.

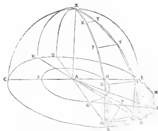


F. C. COMMENTARIUS.

Ergo LD ipsi DN est æqualis] *Recta enim linea BD per centrum ducta rectam lineam quandam LN, non ductam per centrum ad rectos angulos secat, quare & bifariam ipsam secabit. atque erit LM aequalis MN. cum igitur duae LM MD duabus NM MD aequales sint & angulos aequales contineant, nempe rectos: erit basis LD basi LN aequalis.* 3 tertii. 4. primi.

PROBLEMA II. PRPOSITIO XVII.

Duabus sphæris circa idem centrum existentibus in maiori solidum polyhedrum describere, quod minoris sphæræ superficiem non tangat.

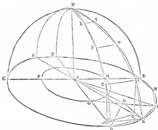


Intelligantur duæ sphæræ circa idem centrum A. oportet in maiori sphæra describere solidum polyhedrum minoris sphæræ superficiem non tangens. secentur sphæræ plano aliquo per centrum ducto. erunt sectiones circuli, quoniam diametro manẽte, & semicirculo circumducto. sphæra facta est. ergo in quacumque positione semicirculum intelligamus, quod per ipsum producitur planũ in superficie sphęrę circulum efficiet, & constat circulum maximum esse, cum diame-



16 tertii.

ter sphæræ,quæ & semicirculi,& circuli diameter est, maior sit omnibus rectis li-
neis,quæ in circulo vel sphæra ducũtur.sit igitur in maiori quidem sphęra circulus
BCDE;in minori autem circulus FGH.& ducantur ipsorum duæ dimetri ad rectos
inter se angulos BD CE: & duobus circulis circa idem centrum existentibus B
Ex antecedente. CDE FGH, in maiori BCDE polygonum æqualium & parium numero laterum
describatur,nõ tãgẽs minorẽ circulũ FGH. cuius latera sint in BE circuli quadrãte
BK KL LM ME: & iuncta KA producatur ad N.& a puncto A plano circuli BCD
E ad rectos angulos cõstituatur AX; quæ superficiei sphærę in puncto X occurrat:
& per AX,& vtramque ipsarum BD KN plana ducantur, quæ ex iam dictis efficiẽt
in superficie sphæræ maximos circulos.Itaque efficiant, & sint in diametris BD K
N eorum semicirculi BXD KXN.Quoniam igitur XA recta est ad planum circuli B
18.undecimi CDE, erunt omnia plana,quæ per ipsam XA transeunt ad planum circuli BCDE re
cta.quare & semicirculi BXD KXN recti sunt ad idem planum. Et quoniam semi-
circuli; BED BXD KXN æquales sunt,in ęqualibus enim cõsistũt BD KN diame-
tris;erũt & eorũ quadrantes BE BX KX inter se æquales. quot igitur latera polygo
ni sunt in quadrante BE, tot erunt & in quadrantibus PX KX æqualia ipsis BK KL
LM ME. Describantur & sint BO OP PR RX KS ST TY YX. iunganturq; SO
38.undecimi. TP YR, & ab ipsis OS ad planum circuli BCDE perpendiculares ducantur. cadẽt
hæ in communes planorum sectiones BD KN, quoniam & plana semicirculorum
PXD KXN ad planum circuli BCDE recta sunt. Itaque cadant,sintque OV SQ & V
Q iungatur. Cum igitur in æqualibus semicirculis BXD KXN æquales circumferẽ
B tiæ sumptę sint BO KS,& ductę perpendiculares OV SQ erit OV quidem ipsi SQ
æqualis, BV vero ęqualis KQ. est autem & tota BA æqualis toti KA. ergo & reliqua
2.sexti. VA reliquæ QA est ęqualis. Vt igitur BV ad VA, ita KQ ad QA, ideoq; VQ ipsi BK
parallela est. Quòd cum vtraque ipsarum OV SQ recta sit ad circuli BCDE planũ,
6 undecimi. erit OV ipsi SQ parallela. ostensa autem est & ipsi ęqualis. ergo QV SO æquales
33 primi.



sunt & parallelæ. Et quoniam QV parallela est ipsi SO,sed &
9 undecimi. parallela ipsi KB; erit & SO ipsi KB parallela:& ipsas coniun
C gunt BO KS. ergo & KBOS quadrilaterũ est in uno plano:nã
si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, & in vtraque ipsarum quæ-
uis pũcta sumantur,quæ dicta puncta coniungit recta linea
in eodem est plano, in quo parallelę. Et eadem ratione vtra
que ipsorum quadrilaterorum SOPT TPRY in vno sunt pla
7.undecimi. no. est autem in vno plano & triangulum YRX. Si igitur à pũ
ctis OSPTRY ad A ductas rectas lineas intelligamus, constituetur quædam figura
solida



do polyhedra inter circumferentias BX KX, ex pyramidibus composita, quarũ
bases quidem KBOS SOPT TPRY quadrilatera, & triangulum YRX, vertex autẽ
punctum A. quòd si in vno quoque laterum KL LM ME, quemadmodum in K
B eadem construamus, & in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo hemisphęrio
constituetur figura quædam polyhedra in sphęra descripta, & composita ex pyra-
midibus, quarum bases sunt quadrilatera iam dicta, & YRX triãgulum; & quæ eiuf-
dem ordinis sunt; vertex autem A punctum. Dico dictam figuram polyhedram non
tãgere superficiem minoris sphæræ, in qua est circulus FGH. Ducatur à puncto A
ad planum quadrilateri KBSO perpendicularis AZ, cui in puncto Z occurrat, & BZ
ZK iungantur. Itaque quoniam AZ recta est ad quadrilateri KBSO planum, et ad
omnes rectas lineas, quę ipsam contingunt, & in eodem sunt plano rectos angulos 3 diffi. unde cimi.
faciet. ergo AZ ad utramque ipsarum BZ ZK est perpendicularis. et quoniam AB
est æqualis AK, erit et quadratum ex AB quadrato ex AK ęquale, et sunt quadrato
quidem ex AB æqualia quadrata ex AZ ZB; etenim angulus ad Z rectus est: quadra 47 primi.
to autem ex AK ęqualia ex AZ ZK quadrata. ergo quadrata ex AZ ZB quadratis
ex AZ ZK æqualia sunt. commune auferatur quadratum ex AZ. reliquum igitur
quod ex BZ reliquo quod ex ZK est ęquale; ideoq; recta linea BZ rectę ZK æqualis.
Similiter ostendemus, & quæ à puncto Z ad OS ducuntur vtrique ipsarum BZ ZK ę-
quales esse. circulus igitur centro Z & interuallo vna ipsarum ZB ZK descriptus,
etiam per puncta OS transibit, atque erit in circulo KBOS quadrilaterum. Et quoniã D
KB maior est, quàm QV, æqualis autem QV ipsi SO, erit & KB, quàm SO maior. Sed
KB est æqualis vtrique ipsarũ KS BO. ergo vtraque KS BO, quàm SO est maior.
cum igitur in circulo quadrilaterum sit KBOS, & ęquales sint KB BO KS, & minor
OS, sitq; ex centro circuli BZ: erit quadratum ex KB maius, quàm duplum qua- E
drati ex BZ. Ducatur à puncto K ad BV perpendicularis KΩ. Et quoniam BD mi
nor est, quã dupla ipsius DΩ, atq; est vt BD ad DΩ, ita rectãgulũ cõtẽtũ DB BΩ ad F
rectangulum, quod DΩ ΩB cõtinetur, nempe descripto ex BΩ quadrato, & comple- G
to parallelogrammo in ipso ΩD. quare & rectangulũ contẽtũ DB BΩ minus est, quã
duplum eius, quod DΩ ΩB continetur: & iuncta KD, quod DB BΩ continetur est H
æquale quadrato ex KB; & quod continetur DΩ ΩB æquale quadrato ex KΩ. qua-
dratum igitur ex KB minus est, quàm duplum quadrati ex KΩ. sed quadratum ex K
B maius est, quàm duplum quadrati ex BZ ergo quadratum ex KΩ quadrato ex BZ
est maius Et quoniam BA est æqualis AK, erit quadratum ex BA quadrato ex AK
æquale. & sunt quadrato quidem ex BA æqualia quadrata ex BZ ZA; quadrato au-
tem ex AK æqualia quadrata ex KΩ ΩA. quadrata igitur ex BZ ZA quadratis ex K
Ω ΩA sunt æqualia, quorum quadratum ex KΩ maius est quadrato ex BZ. ergo re- K
liquum ex ΩA quadratum quadrato ex ZA est minus; ac propterea recta linea AZ
maior, quàm recta AΩ. multo igitur maior est AZ, quàm AG: atque est AZ quidem
ad vnam polyhedri basim, AG vero ad superficiem minoris sphęræ. quare polyhe-
drum minoris sphæræ superficiem non tangit.

Ostendendum autem aliter & expeditius, maiorem esse AZ, quàm AG. Ducatur
à puncto G ipsi AG ad rectos angulos GL, & AL iungatur. Itaque circumferentiã
EB bifariam secantes, & dimidiam ipsius bifariam, atque hoc semper facientes tan
dem relinquemus quandam circumferentiam minorem circumferentia circuli BC
D, quæ subtenditur æquali ipsi GL, relinquatur, sitq; circumferentia KB. minor igi-
tur est recta linea KB, quam GL. Et quoniã in circulo est BKSO quadrilaterum, &
sunt ęquales OB BK KS, & minor OS; erit angulus BZK obtusus: ideoq; BK maior,
quam BZ. sed GL quam BK est maior. multo igitur maior est GL, quàm BZ, & qua-
dratum ex GL quadrato ex BZ maius. & cum æqualis sit AL ipsi AB, erit & quadra
tum ex AL quadrato ex AB æquale. sed quadrato quidem ex AL ęqualia sunt qua-
drata ex AG GL; quadrato autem ex AB æqualia quadrata ex BZ ZA. quadrata
igitur ex AG GL quadratis ex BZ ZA æqualia sunt; quorum quadratum ex BZ mi
nus est quadrato ex GL. ergo reliquum ex ZA quadratum maius est quadrato ex A
G. & ob id recta linea ZA, quã recta AG est maior. Duabus igitur sphæris circa idẽ

centrum existentibus, in maiori solidum polyhedrum describptum est, minoris sphæræ superficiem non tangens. quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Quod si etiam in altera sphæra, solido polyhedro descripto in sphæra ABCDE simile solidũ polyhedrum describatur, habebit solidũ polyhedrum in sphæra BCDE ad solidum polyhedrum in altera sphæra triplam proportionem eius, quam diameter sphæræ BCDE habet ad alterius sphęrę diametrũ. diuisis enim solidis in pyramides numero ęquales, & eiusdem ordinis; erunt pyramides similes. similes autem pyramides inter se in tripla sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis, cuius basis est KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A ad pyramidem in altera sphæra eiusdem ordinis triplam proportionem habet eius, quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est, quam habet AB ex centro sphærę circa centrum A existentis ad eam, quę est ex centro alterius sphęræ. Similiter & vnaquæque pyramis earum, quæ sunt in sphæra circa centrum A ad vnamquamque pyramidem eiusdem ordinis, quę sunt in altera sphæra, triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad eam, quę est ex cẽtro alterius sphærę. Et vt vnũ antecedentium ad vnũ consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. quare totum solidum polyhedrum, quod est in sphæra circa centrum A ad totum solidum polyhedrum, quod in altera sphæra triplam proportionem habebit eius, quam habet AB ad eam, quæ est ex centro alterius sphęrę, hoc est quam habet BD diameter ad alterius sphærę diametrum.

F. C. COMMENTARIVS.

A Erunt sectiones circuli.] *Hoc vniuerse à Theodosio demonstratur in prima propositione sphęricorum, nempe quomodocumque plano sphęra secetur, semper sectiones fieri circulos.*

B Erit OV quidem ipsi SQ æqualis. BV vero ęqualis KQ]. *Sunt enim duo semicirculi aequales ABC DEF, sumanturq; aequales circumferentiae AB DE: & à punctis B E perpendiculares ducantur BG EH. Dico BG ipsi EH, & AG ipsi DH aequalem esse. Quoniam enim circumferentia AB est aequalis circumferentiae DE, quae sunt aequalium circulorum, erunt rectae lineae AB DE inter se aequales. & eadem ratione aequales BC EF. ergo & vt AB ad BC, ita DE ad EF: atque est angulus ABC in semicirculo rectus aequalis recto DEF. cum igitur circa aequales angulos latera sint proportiona-*



29 tertij.

lia, erit triangulum ABC simile triangulo DEF. sed triangulum ABG est simile triangulo ABC, 6 sexti.
ergo & ipsi DEF. triangulum autem DEH est simile triangulo DEF. triangulum igitur ABG triã 8 sexti.
gulo DEH est simile. ergo vt AB ad BG, ita DE ad EH, & permutando vt AB ad DE, ita BG ad 9 sexti.
EH. aequalis autem est AB ipsi DE. ergo & BG ipsi EH est aequalis. & eodem modo demonstra 14 quinti.
bitur AG aequalis ipsi DH, quod demonstrare oportebat. sed & illud vniuerse in omnibus portio nibus demonstratur sequenti lemmate.

Sint ęquales portiones ęqualiũ circulorũ ABC DEF; sumanturq́; circumferẽtiæ ęquales AB DE: & à pũctis BE ad AC DF perpendiculares ducantur BG EH. Dico BG quidem ipsi EH æqualem esse; AG vero ipsi DH.



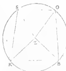
Iungantur AB DE. & quoniam aequales sunt circumferentiae AB DE, erunt & reliquae B C EF inter se aequales. ergo & aequales anguli, qui in ipsis consistunt. quare angulus BAC est aequalis angulo EDF. sed & recti sunt anguli, qui ad G H. duo igitur triãgula sunt ABG DEH, quae duos angulos duobus angulis aequales habent, alterum alteri, & vnum latus BA vni lateri DE aequale, quod vni aequalium angulorum subtenditur. ergo omnia omnibus sunt aequalia. aequalis igitur est AG ipsi DH, & BG ipsi EH. quod demonstrare oportebat. 27 tertij 6 primi.

C Nam si duæ rectæ lineæ parallelę sint, & in vtraque ipsarum quæuis puncta sumãtur, quæ dicta puncta coniungit in eodem est plano in quo parallelæ] *Ex VII. vndecimi.*

D Et quoniam KB maior est, quam QV] *Est enim triangulum AQV triangulo AKB simile, cum angulus ad A sit vtrique communis, angulusq́; AQV angulo AKB, & angulus AVQ angulo ABK aequalis. vt igitur AK ad KB, ita AQ ad QV, & permutando vt AK ad AQ, ita KB ad QV. est autem AK maior, quàm AQ, ergo & KB, quàm QV maior erit.* 29 primi. 4 sexti.

E Erit quadratum ex KB maius, quàm duplum quadrati ex BZ.] *Nam cum rectae lineae KB BO KS aequales sint, & minor ipsis OS; erunt circumferentiae, quas auferunt KB BO KS inter se aequales, & reliqua circumferentia OS maiores. quare & anguli KZS KZB BZO ęquales, & maiores angulo OZS. sunt autem quattuor anguli quattuor rectis aequales. ergo OZS est minor recto, videlicet acutus; & vnusquisque reliquorum trium obtusus; ac propterea quadratum quod fit ex KB maius est duobus quadratis, quae ex KZ ZB, hoc est maius, quam duplũ quadrati, quod ex BZ. sunt enim KZ ZB inter se aequales, vt demonstratum est. sed & hoc sequenti lemmate planius demonstratur,*

Sit in circulo quadrilaterum KBOS, cuius tria latera SK KB BO, inter se sint ęqualia: sitq́; BO maior, quam OS, & sumpto circuli centro Z, iungatur BZ Dico quadratum ex KB quadrati ex BZ maius esse, quam duplum.



Iungantur enim OZ SZ KZ. Quoniam igitur BZ est aequalis ZS, & communis ZO; erunt duae BZ ZO duabus SZ ZO aequales, altera alteri, & basis BO basi OS maior. angulus igitur BZO angulo OZS est maior. & quoniam angulus OZB vnicuique ipsorum BZK KZS est ęqualis, in aequalibus namque circumferentiis consistunt OB BK KS; quod rectae lineę ęquales sint: erit & vterque angulorum BZK KZS maior angulo OZS. sed quattuor anguli OZS SZK KZB BZO quattuor rectis sunt aequales; etenim circa vnum punctum Z consistunt. vnusquisque igitur angulorum OZB BZK KZS est obtusus. ideoq; obtusiangulum est triangulum BZO. At in obtusiangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum maius est quadratis, quae a lateribus obtusum angulum continentibus fiunt. ergo quadratum, quod ex BK maius est quadratis, quae ex KZ ZB. sed quadrata ex KZ ZB dupla sunt qua- Corol 15 primi.

drati

drati ex BZ; aequalis enim est KZ ipsi ZB. quadratũ igitur ex KB, maius est, quàm duplum quadrati ex BZ. quod oportebat demonstrare.

Et quoniam BD minor est quàm dupla ipsius DΩ] *Perpendicularis enim à puncto K ducta ad BD, cadit inter G & B, quod circulum FGH non tangit, vt ex antecedente constat: & cum BD dupla sit ipsius DA, erit ipsius DΩ minor, quàm dupla.*

G Atque est vt BD ad DΩ, ita rectangulum contentum DB BΩ ad rectãgulum quod DΩ ΩB continetur.] *Describatur ex ΩB quadratum quod sit ΩBΥΞ, & compleatur DΞ parallelogrammum. erit ut BD ad DΩ, ita rectangulum DΥ ad rectangulum DΞ. ex prima sexti, hoc est ita rectangulum, quod continetur DB BΩ ad rectangulum contentum DΩ ΩB.*



H Et iuncta KD, quod DB BΩ continetur est ęquale quadrato KB.] *Est enim angulus in semicirculo DKB rectus, & ab eo ad basim perpendicularis ducitur KΩ. quare ex corollario octauę sexti libri KB est proportionalis media inter DB BΩ: & KΩ media inter DΩ ΩB: & ob id quadratum quidem ex KB ęquale est rectangulo contento DB BΩ; quadratum uero ex KΩ ęquale ei, quod DΩ ΩB continetur.*

K Multo igitur maior est AZ quàm AG] *Quoniam enim polygonum BKLME in maiori circulo BCDE descriptum est, non tangens minorem circulum FGH, perpendicularis a puncto K ducta ad BD, videlicet KΩ circumferentiam eius non tanget ex iis, quae in antecedente demonstrata sunt. quare AΩ maior erit, quàm AG; & idcirco AZ longe maior, quàm quae à centro minoris sphęrae ad eius superficiem pertinet.*

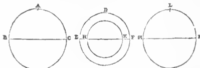
L Et quoniam in circulo est BKSO quadrilaterum] *Intelligatur enim descriptum quadrilaterum BKSO, vt in antecedentibus.*

M Et sunt æquales OB BK KS, & minor OS] *Hęc proxime demonstrata sunt.*

N Et cum æqualis sit AL ipsi AB.] *Sunt enim a centro ad circumferentiam maioris circuli BCDE.*

THEOREMA XVI. PROPOSITIO. XVIII.

Sphæræ inter se in tripla sunt proportione suarum diametrorũ.



Intelligantur sphæræ ABC DEF, quarum diametri BC EF. Dico ABC sphærã ad sphęram DEF triplam proportionem habere eius, quã habet BC ad EF. Si enim non ita est, sphęra ABC ad sphæram minorem ipsa DEF, vel ad maiorem triplam proportionem habebit eius, quam habet BG ad EF. Habeat primo ad minorem, videlicet ad GHK. & intelligatur sphæra DEF circa idem centrũ, circa quod est sphæra GHK; describaturq; in maiori sphæra DEF solidum polyhedrum non tangẽs minorem sphæram GHK in superficie; & in sphæra ABC describatur solidum polyhedrum simile ei, quod in sphęra DEF descriptum est. solidum igitur polyhedrum, quod in sphęra ABC ad solidum polyhedrum, quod in sphęra DEF triplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. habet autem ABC sphęra ad sphæram GHK triplam proportionem eius, quam BC ad EF. ergo vt ABC sphęra ad sphęram GHK,

Ex antecedente.

Ex corol antecedente.

HK, ita ſolidum polyhedrum in ſphęra A B C ad ſolidum polyhedrum in ſphæra DEF: & permutando, vt ABC ſphęra ad ſolidum polyhedrum, quod in ipſa eſt, ita GHK ſphæra ad ſolidum polyhedrum, quod in ſphæra DEF. maior autem eſt ſphæra ABC ſolido polyhedro, quod eſt in ipſa. ergo & GHK ſphærę polyhedro, quod in ſphęra DEF eſt maior. ſed & minor, ab ipſo enim comprehenditur, quod fieri non poteſt. non igitur ABC ſphæra ad ſphæram minorem ipſa DEF triplam proportionem habet eius, quam BC ad EF. ſimiliter oſtendemus neque D E F ſphærã ad ſphæram minorem ipſa ABC triplam habere proportionem eius, quam habet EF ad BC. Dico inſuper ſphæram ABC neque ad maiorem ſphæram ipſa DEF triplam proportionem habere eius, quã BC ad EF. Si enim fieri poteſt, habeat ad maiorem LMN. conuertendo igitur ſphęra LMN ad ABC ſphæram triplam proportionẽ habet eius, quam diameter EF ad BC diametrum. Vt autem ſphæra LMN ad ABC ſphęram, ita ſphæra DEF ad ſphæram quãdam minorem ipſa ABC, vt ante demonſtratum fuit; quoniam ſphæra LMN maior eſt ipſa DEF. ergo & DEF ſphæra ad ſphęram minorem ipſa AB C triplam proportionem habet eius, quam EF ad BC, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. non igitur ABC ſphæra ad ſphęram maiorẽ ipſa DEF triplam proportionem habet eius, quam BE ad E F. oſtenſum autem eſt neque ad minorem. ergo ABC ſphæra ad ſphęram DEF triplam proportionem habebit eius, quam BC ad EF. quod demonſtrare oportebat.

DVODECIMI LIBRI FINIS.

E V C L I D I S
E L E M E N T O R V M
LIBER TERTIVSDECIMVS
ET SOLIDORVM TERTIVS.

C V M S C H O L I I S A N T I Q V I S
E T C O M M E N T A R I I S.

Federici Commandini Vrbinatis.

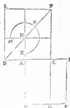


THEOREMA I. PROPOSITIO I.



SI recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, maior portio assumens dimidiã totius, quintuplum potest eius, quod à dimidia fit, quadrati.

A Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in puncto C; & sit AC maior portio: producaturq; in directum ipsi CA recta linea AD, & ponatur AD ipsius AB dimidia. Dico quadratum ex CD
B quadrati ex D A quintuplum esse. describantur ex AB DC quadrata AE DF, & in DF describatur figura, & FC ad G producatur. Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C, erit quod AB BC continetur æquale quadrato ex AC. atque est rectãgulum quidem CE quod continetur AB BC. quadratum vero ex AC est FH. ergo rectangulum CE quadrato FH est æquale. & quoniam BA dupla est ipsius AD; æqualis autem BA ipsi AK, & DA ipsi AH: erit & KA ipsius AH dupla. ut autem KA
Lemd. ad AH, ita est rectangulum KC ad ipsum CH. duplum igitur est KC rectangulum rectanguli CH:
C & sunt rectangula LH HC ipsius CH dupla. ergo rectangulum KC rectãgulis LH HC est æquale. ostensum autem autem est & rectangulum CE æquale quadrato FH. totum igitur AE quadratũ est æquale gnomoni MNX. Rursus quoniam BA
D dupla est ipsius AD, erit quadratum ex BA quadrati ex ad quadruplum, hoc est quadratum AE quadrati DH. æquale autem est quadratum AE gnomoni MNX. ergo & MNX gnomon quadruplus est quadrati DH. & ob id totum DF ipsius DH est quintuplum atque est DF quidem quadratum ex CD, DH vero quadratum ex DA. quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplũ erit. ergo si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, maior portio assumens totius dimidiam quintuplum potest eius, quòd à dimidia fit quadrati. quod demonstrare oportebat.



SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Resolutio est sumptio quæsiti tãquam concessi per ea, quæ consequuntur in aliquod uerum concessum.

Compositio est sumptio concessi per ea, quæ consequuntur in quæsiti conclusionem, seu deprehensionem.

Antecedentis theorematis resolutio.



Recta enim linea quædam A B extrema, ac media ratione secetur in C, sitq́ue maior portio A C, & ponatur A D ipsius AB dimidiæ ęqualis. Dico quadratum ex CD quadrati ex D A quintuplũ esse. Quoniam enim quintuplum est quadratum ex CD quadrati ex DA; quadrato autem ex CD æqualia sunt quadrata ex CA AD vnà cum eo, quod bis CA AD continetur: erunt quadrata ex CA AD vnà cum eo, quod bis CA AD continetur, quadrati ex AD quintupla. ergo diuidendo quadratum ex CA vnà cum eo, quod bis continetur CA AD quadruplum est quadrati ex AD. Sed ei quidem, quod bis CA AD continetur æquale est rectangulum BAC. est enim BA ipsius AD dupla. quadrato autem ex A, C est ęquale rectangulum ABC; namque A B extrema, ac media ratione secta est in C. rectangulum igitur BAC vnà cum rectangulo ABC quadruplum est quadrati ex AD. sed rectangulum B A C vnà cum rectangulo ABC est id, quod fit ex AB quadratum. ergo quadratum ex BA quadruplum est quadrati ex AD. quod quidem ita se habet. est enim BA ipsius AD dupla.

4. secundi.

2. secundi. Cor. 20. sexti

Compositio.

Quoniam igitur quadruplum est quadratum ex BA quadrati ex AD; quadrati autem ex AB est rectangulum BAC: vnà cum rectangulo ABC: erit rectangulum BAC vnà cum rectangulo ABC quadrati ex AD quadruplum. sed rectangulum quidem BAC est æquale ei, quod bis DA AC continentur, rectangulum autem ABC est æquale quadrato ex AC. ergo quadratum ex AC vnà cum eo, quod bis continetur DA AC quadruplum est quadrati ex DA; & ob id quadrata ex DA AC vna cũ eo, quod bis DA AC continetur quintuplum est quadrati ex DA. sed quadrata ex DA AC vnà cum eo, quod bis continetur DA AC est id, quod fit ex DC quadratum. quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplum erit. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in pũcto C] *Quomodo hoc fiat, docuit in vndecima propositione secundi libri, & in 30 sexti.* A

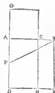
Describantur ex AB DC quadrata AE DF, & in DF describatur figura] *Sit ex AB quadratum AKEB, & ex DC quadratum DLFC; & iuncta DF, ducatur per A recta linea AH parallela alterutri ipsarum DL CF, quae diametrum DF in puncto H secet. rursus per H ducatur recta linea alterutri ipsarum LF DC parallela.* B

Et sunt rectangula LH HC ipsius HC dupla] *Supplementa enim LH HC inter se sunt aequalia ex 43 primi libri.* C

Erit quadratum ex BA quadrati ex AD quadruplum] *Ex 20 sexti.* D

Quadratum igitur ex CD quadrati ex DA quintuplum erit] *Possumus etiam aliter, & fortasse expeditius idem demonstrare in hunc modum.* E

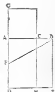
Sit recta linea AC, quae extrema, ac media ratione secetur in C, & ex AB fiat quadratũ ADEB, secetq; AD bifariã in F, & iuncta FB, producatur FA in G, ita vt FG ipsi FB sit aequalis, erit AG aequalis AC ex demõstratis ĩ vndecima secũdi libri. quare FG cõstat ex maiori portione, et ex dimidia totius AB. Dico quadratũ ex FG quin[20 sexti.] *tuplũ esse quadrati ex FA. Quoniam enim AB dupla est ipsius AF, erit quadratũ ex AB quadrati ex AF quadruplũ. sed quadratum ex FB est aequale quadratis ipsarum FA AB, ex 47 primi. quadratũ igitur ex FB, hoc est quadratum ex FG quadrati ex FA quintuplũ erit. quod oportebat demonstrare. sed & alia nonnulla demonstranda sunt, quae ad hanc sectionem attinent.*



PROPOSITIO I.

Data recta linea extrema, ac media ratione secta, & vtraque ipsius portio data erit.

Sit data recta linea AB 10, quae extrema, ac media ratione secetur in C. Dico ipsas AC CB datas esse. Construantur enim eadem, quę supra. & quoniam AB est 10, erit eius dimidia AF 5, cuius quadratũ est 25: quadratũ aũt ipsius AB est 100. ergo quadratũ ex FB est 125, & ipsa FB, hoc est FG ℞ 125. sed FA est 5. erit igitur AG, hoc est AC ℞ 125 minus 5. Quòd cũ sit vt BA ad AC, ita AC ad CB, re[17. sexti.]*ctangulum contentum AB BC, videlicet rectangulum CE aequale erit quadrato ex AC. quadratum autem ex AC, hoc est quadratum ℞ 125 minus 5 est 150 minus ℞ 12500. si igitur ad CH applicetur 150 minus ℞ 12500 latitudinem faciẽs CB, erit CB 15 minus ℞ 125. ergo AC CB datae sunt, vt oportebat.*



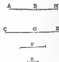
Ex quibus manifestum est si recta linea rationalis, expositæ rationali longitudine commẽsurabilis extrema ac media ratione secta fuerit, maiorem eius portionẽ apotomen esse quintam, & minorem esse apotomen primam.

Est enim quadratum ex AB quadrati ex AF quadruplum. ergo quadratum ex FB ad quadratum ex BA proportionem habet, quam 5 ad 4. & quoniam quadratum ex FB ad quadratum ex [9. decimi.] *BA proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; erit FB ipsi BA longitudine incommensurabilis; ac propterea FB plus potest, quàm FA quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine. est autem AF, quae ipsi AG congruit, expositae rationali longi*[5. diffi. tertiarum.]*tudine commensurabilis. quare AC est apotome quinta. At vero CB esse apotomen primam, manifesto constat; quadratum enim apotomes ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam ex 98 decimi libri.*

PROPOSITIO. II.

Data maiori portione, totam rectam lineam, quæ extrema, ac media ratione secta sit, inuenire.

Sit maior portio AB, & exponantur rectae lineae CD E, ita vt CD sit ipsius E quintupla: inter CD vero, & E media proportionalis sit F. & ex CD abscindatur DG ipsi F aequalis; fiatq; vt CG ad GD, ita AB ad BH. erit igitur componendo vt CD ad DG hoc est ad F, ita AH ad HB. et quoniam tres rectae lineae CD F E deinceps proportio[Cor. 20. sexti]*nales sunt, erit vt CD ad E, ita quadratum ex CD ad quadratum ex F. est autem CD quintupla ipsius E. quadratũ igitur ex CD quintuplum est quadrati ex F ergo quadratum ex AH quadrati ex HB est quintuplũ. estq; AB ma-*



ior portio rectae lineae, quae extrema, ac media ratione secatur. quare BH est totius dimidia, & dupla ipsius BH est tota recta linea, quam nobis inueniendam proposuimus.

Itaque constat, Data maiori portione rectæ lineæ, quæ extrema, ac media ratione secetur, & maiorem portionem, & totam lineam datam esse.

Sit enim maior portio AB 4, sitq; CD 5, & E 1. erit F, hoc est GD ℞ 5, & CG 5 minus ℞ 5. fiat vt 5 minus ℞ 5 ad ℞ 5, ita 4 ad aliam. multiplicabimus igitur primum ℞ 5 per 4, producitur ℞ 80. deinde multiplicabimus 5 minus ℞ 5 per eam, quae ex binis nominibus ipsi respondet, videlicet per 5 plus ℞ 5, producetur 20. & per eandem multiplicabimus ℞ 80 fiet ℞ 2000 plus ℞ 400. quare si ad 20 applicabimus ℞ 2000 plus ℞ 400, latitudinem faciet ℞ 5 plus 1, cuius duplum est ℞ 20 plus 2. tota igitur recta linea est ℞ 20 plus 2, & minor portio ℞ 20 minus 2.

THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Si recta linea partis ipsius quintuplum posit, dupla dictæ partis extrema, ac media ratione secta, maior portio reliqua pars est eius, quæ à principio rectæ lineæ. A

Recta enim linea AB partis ipsius AC quintuplum posit: & ipsius AC dupla sit CD. Dico si CD extrema, ac media ratione secetur, CB maiorem esse portionem. Describãtur enim ex vtraque ipsarum AB CD quadrata AF CG: & in AF figura descripta, producatur FB in E. Quoniam igitur quadratum AF quintuplum est ipsius AH, erit MNX gnomó ipsius AH quadruplus. & quoniam DC dupla est CA, quadratum ex DC quadrati ex CA quadruplum est, videlicet quadratum CG quadruplum quadrati AH. ostensus est autem MNX gnomon quadruplus ipsius AH quadrati, ergo gnomon MNX quadrato CG est æqualis. Rursus quoniam DC dupla est CA, æqualis autem est DC ipsi CK, & AC ipsi CH; erit KC ipsius CH dupla. parallelogrammum igitur KB duplum est parallelogrammi BH. & sunt parallelogramma LH HB, ipsius HB dupla. ergo KB æquale est ipsis LH HB. sed & totus MNX gnomó toti CG est æqualis. & reliquum igitur HF æquale est reliquo BG. atque est BG quidem quod CD DB cõtinetur; etenim CD est æqualis DG ipsum vero HF est quadratum ipsius BC. ergo quod continetur CD DB quadrato ex CB est æquale. vt igitur DC ad CB, ita est CB ad BD. maior autem est DC, quàm CB. ergo & CB quam BD est maior. Itaque recta linea CD extrema, ac media ratione secta, maior portio est CB. si igitur recta linea partis ipsius quintuplum posit, dupla dictæ partis extrema, ac media ratione secta, maior portio reliqua pars est eius, quę à principio rectę lineæ. quod demonstrare oportebat.

10. sexti

B 14 sexti

At vero duplam ipsius AC maiorem esse, quàm CB, sic demonstrabitur.

Si enim nõ, sit, si fieri potest, BC ipsius CA dupla. quadratum igitur ex BC quadruplum est quadrati ex CA; & ob id vtrumque quadratorum, quę fiunt ex BC CA quadrati ex CA quintuplum est. sed & quadratum ex BA quadrati ex AC quintuplum ponitur. ergo quadratum ex BA ęquale est quadratis ex BC CA. quod fieri non potest. non igitur BC dupla est ipsius CA. similiter demonstrabimus neque minorem BC ipsius CA duplam esse. multo enim maius absurdum sequetur. ergo ipsius AC dupla maior est quàm BC. quod demonstrandum fuit.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis resolutio.



Recta enim linea quædam CD partis ipsius DA quintuplũ possit, & ipsius DA dupla ponatur AB. Dico AB extrema, ac media ratione sectam esse in puncto C, & maiorem portionem esse AC, quæ quidem est reliqua pars eius, quę à principio rectæ lineę. Quoniam enim AB extrema, ac media ratione secta est in C, & AC est maior portio; erit rectangulum ABC quadrato ex AC ęquale. est autem & rectangulum BAC ęquale ei, quod bis DA AC continetur. etenim BA ipsius AD est dupla. ergo rectangulum ABC vnà cum rectangulo BA
2. secundi. C, quod quidem est ipsius AB quadratũ, æquale est ei, quod bis DA AC continetur
20. sexti. vnà cum quadrato ex AC. quadratum autem ex AB quadruplum est quadrati ex AD. ergo quod bis DA AC continetur vnà quadrato ex AC quadruplum est eius, quod fit ex AD quadrati. ergo & quadrata ex DA AC vnà cum eo, quod bis conti-
4 secundi. netur DA AC; hoc est quadratũ ex CD, quintupla sunt quadrati ex AD. quod quidem ita se habet.

Compositio.

Quõ igitur quadratũ ex CD quintuplũ est quadrati ex DA; quadrato aũt ex CD ęqualia sunt quadrata ex DA AC vnà cũ eo, quod bis DA AC cõtinetur; erũt quadrata ex DA, AC vnà cũ eo, quod bis cõtinetur DA AC quintupla ipsius quadrati ex DA. & diuidendo quod bis DA AC cõtinetur vnà cũ quadrato ex AC quadrupla sũt quadrati ex AD. est aũt & quadratũ ex AB quadrati ex AD quadruplũ. ergo quod bis cõtinetur DA AC, quod est rectãgulũ BAC vnà cũ quadrato ex AC est ę-
2. secundi. quale quadrato ex AB. sed quadratũ ex AB est rectãgulũ ABC unà cũ rectãgulo BAC. rectãgulũ igitur BAC vnà cũ rectãgulo ABC est æquale rectangulo BAC vnà cũ quadrato ex AC. & ablato communi rectangulo BAC, erit reliquũ rectangulũ
14. sexti. ABC quadrato ex AC æquale. est igitur vt BA ad AC, ita AC ad CB. maior autem est BA, quam AC. ergo & AC quam CB est maior. quare AB extrema, ac media ratione secta est in C, & AC est maior portio. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

A Recta enim linea AB partis ipsius AC quintuplum possit] *Hoc est quadratum rectę lineę AB quintuplum sit quadrati partis ipsius AC.*

B Maior autem est DC, quam CB] *Hoc est dupla ipsius AC maior est, quam BC, illud uero ipse mox demonstrabit: sed & aliter idẽ demõstrari potest hoc pacto.*

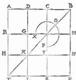
Recta enim linea AB partis ipsius BC quintuplum possit, & producatur AB ad D, ita vt DC ipsius CB sit dupla. Dico si CD extrema, ac media ratione secetur, maiorem eius portionem esse AC. fiãt enim ex AC CD quadrata ACEF CDGH, & BH iungatur. itaq; quoniam DC, hoc est HC dupla est ipsius CB, erit quadratum ex HC quadrati ex CB quadruplum. sed quadratum ex BH est aequale duobus quadratis, quae fiunt ex HC CB. quadratum igitur ex BH quintuplum est quadrati ex CB; ideoq; EH ipsi BA est aequalis. ergo ex ijs, quae demonstrata sunt in vndecima secundi libri recta linea CH extrema, ac media ratione secatus in E, & CE est maior portio est autem CH ipsi CD aequalis, & CE aequalis ipsi CA. si igitur recta linea partis ipsius quintuplum possit, & reliqua. quod oportebat demonstrare.



THEO-

Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, portio minor assumens dimidiam maioris portionis quintuplũ potest eius, quod à dimidia maioris portionis fit, quadrati.

Recta enim linea quædã AB extrema, ac media ratione secetur in C; sitq́; AC maior portio, & secetur bifariam in D. Dico quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplũ esse. Describatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. Quoniam igitur AC dupla est CD, erit quadratum ex AC quadrati ex CD quadruplum, hoc est quadratum RS quadrati FG. & quoniã rectangulum, quod AB BC continetur est æquale quadrato ex AC; atque est rectangulum quidem contentũ AB BC ipsum CE; quadratum vero ex AC est RS: erit rectangulum CE quadrato RS æquale. quadruplum autem est quadrati



RS quadrati FG. ergo & CE rectangulum quadrati FG quadruplum est. rursus quoniam AD. æqualis est DC, erit & HK ipsi KF æqualis. ideoq́; quadratum GF est æquale quadrato HL. æqualis igitur est GK ipsi KL, hoc est MN ipsi NE. ergo & parallelogrammum MF parallelogrammo FE est æquale. sed MF est æquale CG. quare & CG ipsi FE æquale erit. commune apponatur CN. gnomon igitur XOP est æqualis parallelogrammo CE. ostensum autem est CE quadruplum GF quadrati. & gnomon igitur XOP ipsius GF est quadruplus. & ob id quadratum DN quintuplũ est ipsius GF. est autem quadratum quidem DN, quod fit ex DB; GF vero, quod ex DC. quadratum igitur ex BD quadrati ex DC est quintuplum. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in C: & sit AC maior portio, cuius dimidia CD. Dico quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplum esse. Quoniam



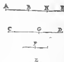
enim quadratum ex BD quintuplum est quadrati ex DC; quadratum autem ex BD est quod continetur AB BC vna cum quadrato ex DC. ergo quod AB BC continetur vnà cum quadrato ex DC quintuplũ est quadrati ex DC: & diuidendo quod AB BC continetur quadrati ex DC quadruplum est. Ei vero, quod continetur AB BC est æquale quadratum ex AC; etenim AB extrema, ac media ratione secta est in C. ergo quadratum ex AC quadrati ex CD quadruplum est. quod quidem ita se habet est enim AC ipsius CD dupla. 6 secundi.

Compositio.

Quoniam dupla est AC ipsius CD, erit quadratũ ex AC quadrati ex CD quadruplum. sed quadratum ex AC est æquale ei, quod AB BC continetur. quod igitur AB BC continetur quadruplum est quadrati ex CD: & componendo quod continetur AB BC vna cum quadrato ex CD, quod quidem est quadratum ex BD, quintuplum est quadrati, quod fit ex DC. atque hoc est, quod demonstrare oportebat.

Ex iam dictis & alia constare possumus.

Data minori portione totam rectam lineam, quæ extrema, ac media ratione secta sit, inuenire.



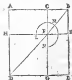
Sit minor portio AB: & exponantur rectae lineae CD E; sitq; CD ipsius E quintupla: & inter CD E media proportionalis sumatur F, & alia construantur, quemadmodum superius dictum est in propositione secunda earum, quas nos ad primam huius apposuimus. similiter demonstrabitur quadratum ex AH quadrati ex HB quintuplum esse. atque est AB minor portio rectas lineae, quae extrema, ac media ratione secatur. ergo BH est maioris portionis dimidia, & eius dupla BK portio maior. tota igitur linea est AK, cuius maior portio KB, & minor BA.

Patet igitur data minori portione rectæ lineę, quæ extrema ac media ratione secatur, & maiorem portionem & totam lineam datam esse.

Sit enim minor portio AB 4, & sit CD 5, & E 1. similiter, vt supra eodem in loco, demonstrabimus, maiorem portionem esse ℞ 20 plus 2 quare tota recta linea erit 6 plus ℞ 20.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

Si recta linea extrema, ac media ratione secta fuerit, totius & minoris portionis vtraq; quadrata tripla sunt quadrati eius, quod à maiori fit portione.



Sit recta linea AB, quę extrema, ac media ratione secetur in C, & sit AC maior portio. Dico quadrata ex AB BC quadrati ex AC tripla esse. Describatur enim ex AB quadratũ ADEB, & figura compleatur. itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secta est in C, & maior portio est AC; erit rectangulum contentũ AB BC quadrato ex AC æquale. atque est rectangulum quidem AK, quod AB BC continetur: quadratum vero HG est quod fit ex AC. ęquale igitur est AK ipsi HG. & quoniam rectangulum AF est æquale FE, commune apponatur CK, erit totum AK toti CE æquale. ergo rectãgula CE AK ipsius AK sunt dupla. sed rectãgula AK CE sunt gnomon LMN, & quadratum CK gnomon igitur LMN, & quadratum CK dupla sunt ipsius AK. rectangulum autem AK ostensum est æquale quadrato HG. ergo gnomon LMN, & quadratum CK ipsius HG sunt dupla; ac propterea gnomon LMN, & quadrata CK HG tripla sunt quadrati HG. & gnomon quidem LMN, & quadrata CK HG sunt totum AE quadratum, & quadratum CK, quę quidem sunt quadrata ex AB BC. quadratum autem GH est quod fit ex AC. quadrata igitur ex AB BC quadrati ex AC sunt tripla. quod demonstrare oportebat.

SCHOLIVM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in C, & sit AC maior

portio

portio. Dico quadrata ex AB BC tripla esse quadrati ex AC. Quoniam enim quadrata ex AB BC tripla sunt quadrati ex AC; suntque quadrata ex AB BC æqualia rectãgulo, quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC: erit rectangulum, quod bis continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC triplum quadrati ex AC: & diuidendo quod bis cõtinetur AB BC duplũ quadrati ex AC. ergo quod semel AB BC continetur quadrato ex AC est æquale. quod quidem ita se habet. recta enim linea AB extrema, ac media ratione secta est in puncto C. sexti. A



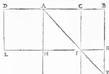
Compositio.

Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secta est in C, atque est AC maior portio; erit rectangulum, quod AB BC continetur quadrato ex AC æquale. ergo quod bis continetur AB BC duplum est quadrati ex AC: & cõponendo quod bis continetur AB BC vna cum quadrato ex AC triplum est quadrati ex AC. sed quod bis AB BC continetur vnà cum quadrato ex AC est æquale quadratis, quæ ex AB BC fiunt. quadrata igitur ex AB BC quadrati ex AC sunt tripla.

THEOREMA V. PROPOSITIO. V.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, adijciaturque ipsi æqualis maiori portioni; erit tota linea extrema, ac media ratione secta, & maior portio erit ea, quæ à principio posita est recta linea.

Recta enim linea AB extrema, ac media ratione secetur in C, & sit AC portio maior ponaturq; ipsi CA æqualis AD. Dico rectam lineam DB extrema, ac media ratione secari in puncto A. & maiorem portionem esse AB, quę à principio posita est. Describatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. Quoniam igitur AB extrema, ac media ratione secta est in C, erit rectangulum quod continetur AB BC quadrato ex AC æquale. & rectangulum quidem quod continetur AB BC est CE: quadratum vero ex AC est CH. ergo EC ipsi CH est ęquale. sed CE est ęquale EH, & CH ipsi HD. quare & DH ipsi HE æquale erit. cõmune apponatur HB. totum igitur DK toti AE est æquale. atque est DK quidem, quod BD DA continnetur; est enim AD æqualis DL: quadratũ aũt AE est quod fit ex AB. ergo quod BD DA cõtinetur est ęquale quadrato ex AB. & ob id vt DB ad BA, ita est BA ad AD. sed BD est maior, quam BA. maior igitur est BA quàm AD. ergo DB extrema, ac media ratione secta est in A, & AB est maior portio. quod demonstrare oportebat. 14. sexti.



SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta .n. linea AB extrema, ac media ratione secetur in C: & sit maior portio AC: pona-



Cponaturq; AD ipsi AC æqualis. Dico DB extrema ac media ratione secari in puncto A: & BA maiorem esse portionem. Quoniã enim DB extrema, ac media ratione secta est in A, & maior portio est AB; erit vt DB ad BA, ita BA ad AD. æqualis autem est DA ipsi AC. vt igitur DB ad BA, ita BA ad AC: & per conuersionem rationis vt BD ad DA, ita AB ad BC. quare diuidendo ut BA ad AD, ita AC ad CB. æqualis autem est DA ipsi AC. est igitur vt BA ad AC, ita AC ad CB. quod quidem ita se habet, etenim AB extrema, ac media ratione secatur in C puncto.

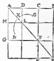
Compositio.

Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C, erit vt BA ad AC ita AC ad CB. æqualis autem est CA ipsi AD. ergo ut BA ad AD, ita AC ad CB: cõponendoq; ue vt BD ad DA, ita AB ad BC; & per conuersionem rationis vt DB ad BA, ita BA ad AC. atque est CA æqualis AD. est igitur vt DB ad BA, ita BA ad AD. quare DB extrema, ac media ratione secatur in pũcto A, & BA est portio maior.

F. C. COMMENTARIVS.

Sed non inutile ũsum est hoc loco demonstrare theorema aliud quo utitur Pappus in quinto libro, quamquam eius demonstrationem nullam afferat.

Si recta linea extrema, ac media ratione secetur, abscindaturq; à maiori portione linea, quæ minori sit æqualis; erit etiam ea extrema, ac media ratione secta, & maior portio erit quæ abscissa est recta linea



Sit recta linea AB, quae extrema, ac media rõne secetur in C, sitq; AC maior portio: & ab ipsa AC abscindatur CD, quae ipsi CB sit aequalis. Dico AC extrema, & media rõne secari in D: & CD maiorem esse portionẽ. fiat enim ex AB quadratũ AE: & iuncta AE ducantur per CD rectae lineae CFK DL ipsi BE parallelae, quae diametrum AE secent in punctis FL: & per FL ducantur GFH ML parallelae ipsi AB. Itaque quoniam AB extrema, ac media ratione secatur in C; rectangulũ, quod AB BC continetur, hoc est rectangulum CE est aequale quadrato AF. sed ipsi CE aequale est rectangulum GE; etenim supplementa CH GK inter se aequalia sunt, & quadratum FE est commune vtrique. ergo rectangulum GE quadrato AF est aequale. si igitur à rectangulo GE auferatur FE quadratum, & à quadrato AF auferatur quadratum LF, quod quidem est aequale quadrato FE, cum DE CB sint aequales, reliquum GK rectangulum, hoc est rectangulum MF, hoc est ipsum DF gnomoni NXO aequale erit, à quibus sublato communi LC, erit reliquum DG rectangulum aequale quadrato LF. at rectangulum quidem DG est quod CA AD continetur: quadratum vero LF est quod fit ex DC. vt igitur AC ad CD, ita CD ad DA. sed AC maior est, quàm CD. ergo & CD quàm DA maior erit. recta igitur linea AC extrema, ac media rõne secta est in D, & maior eius portio est CD quod demõstrare oportebat.

14 sexti.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Si recta linea rationalis extrema, ac media ratione secta fuerit, vtraque portio irrationalis est, quæ apotome appellatur.



Sit recta linea rationalis AB, & secetur extrema, ac media ratione in C, sitque AC maior portio. Dico vtramque portionem AC CB irrationalẽ

esse, quæ apotome appellatur. ptoducatur enim BA in D, & sit ipsius BA dimidia
AD. Itaque quoniam recta linea AB extrema, ac media ratione secatur in C, & ma-
iori portioni CA adijcitur AD, quę est ipsius AB dimidia; erit quadratum ex CD ex 1. huius
quadrati ex DA quintuplum. quadratum igitur ex CD ad quadratum ex DA pro-
portionem habet, quam numerus ad numerum; ideoq; quadratum ex CD com- 6 decimi
mensurabile est quadrato ex DA. rationale autem est quadratum ex DA; etenim
DA est rationalis, cum sit ipsius AB rationalis dimidia. ergo & quadratum ex CD 6 dif. decimi
est rationale; ac propterea ipsa CD rationalis. & quoniam quadratum ex CD
ad quadratum ex DA proportionem non habet, quam quadratus numerus ad
quadratum numerum, recta linea CD ipsi DA incommensurabilis est longitu- 9 decimi
dine. quare CD DA rationales sunt potentia solum commensurabiles; & idcir- 74. decimi
co AC apotome est. Rursus quoniam AB extrema, ac media ratione secta est,
& maior portio est AC; erit ABC rectangulum æquale quadrato ex AC. quod
igitur fit ex apotoma AC ad rationalem AB applicatum latitudinem facit BC.
sed quadratum apotomes ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen 98 decimi
primam. ergo BC est apotome prima. ostensa est autem & AC apotome. si igitur
recta linea rationalis extrema, ac media ratione secta fuerit, vtraque portio irratio
nalis est, quæ apotome appellatur. atque illud est, quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Hoc nos supra etiam aliter demonstrauimus. sed & alia ab his non abhorrentia demonstrare aggrediemur, quae eiusmodi sunt.

PROPOSITIO I.

Si maior portio rectæ lineæ extrema, ac media ratione sectæ sit rationalis, expositę rationali longitudine commensurabilis, erit minor portio apotome quinta, & tota ex binis nominibus quinta.

Sit recta linea AB, quae extrema, ac media ratione secetur in C, & sit maior portio AC rationalis, expositae rationali longitudine commensurabilis. Dico minorem portionẽ CB esse apotomen quintam, & totam ex binis nominibus quintam.

A D C B

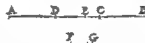
E F

Diuidatur enim AC bifariam in D. & quoniam A
B extrema, ac media ratione secatur in C, & minori
portioni BC adijcitur CD, quae est dimidia portionis
maioris; quadratum ex BD quintuplum est quadrati
ex DC; ac propterea ad ipsum proportionem habebit, 3 huius.
quam numerus ad numerum, atque ipsi commensurabile erit. rationale autem est quadratum ex 6 decimi
DC, quòd ipsa AC rationalis ponitur. ergo & quadratum ex BD est rationale, & ipsa BD ra- 6 dif decimi
tionalis. cum igitur quadratum ex BD ad quadratum ex DC proportionem non habeat, quam
numerus quadratus ad quadratum numerum, recta linea BD ipsi DC incommensurabilis erit lon- 9. decimi
gitudine. quare BD DC rationales sunt potentia solum commensurabiles: ideoque CB apotome
est. Dico & quintam esse. sit enim quadratum ex EF, quo quadratum ex BD superat quadratum
ex DC. habebit quadratum ex BD ad quadratum ex EF proportionem eam, quam 5 ad 4. &
eam proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad quadratum numerum, recta li- 9 decimi
nea BD ipsi EF longitudine est incommensurabilis. quare BD plus potest, quam DC quadrato re-
ctae lineae sibi incommensurabilis longitudine. atque est DC longitudine commensurabilis expositae
tae rationali AC. ergo CB est apotome quinta. rursus quoniam AB extrema, ae media ratione se- 5 dif tertiarum.
catur in C; & AC est maior portio, erit rectangulum ABC aequale quadrato ex AC. quadratũ
igitur ex AC ad CB applicatum latitudinem faciet AB. sed quadratum rationalis ad apotomen
applicatum latitudinem facit eã, quę ex binis nominibus; & eundem ordinem habet, quem ipsa
apotome ex 114 decimi. ergo AB ex binis nominibus est quinta. si igitur maior portio rectae
lineae extrema, ac media ratione sectae sit rationalis, expositae rationali longitudine commen-

mensurabilis, erit maior portio apotome quinta, & tota ex binis nominibus quinta. quod demonstrare oportebat.

PROPOSITIO II.

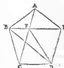
Si minor portio rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ sit rationalis, expositæq; rationali longitudine commensurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima.



Sit recta linea AB, quę extrema, ac media ratione secetur in C, & sit minor portio CB rationalis, expositęq; rationali longitudine commensurabilis. Dico maiorem portionē AC esse ex binis nominibus quintam; & totam AB ex binis nominibus primam. secetur enim AC bifariam in D. Eadem ratione, qua supra, demonstrabitur quadratum ex BD quadrati ex DC quintuplum esse. itaque secetur DC in E, ita ut DE ad EC eandem proportionem habeat, quam BD ad DC. erit quadratum ex DE quadrati ex EC quintuplum, & ipsi commen
19.quinti *surabile. & quoniam est vt tota BD ad totam DC, ita pars DE ad partem EC, erit & reliqua BE ad reliquam ED, vt BD ad DC, hoc est ut DE ad EC. ergo cum tres rectae lineae proportio-*
Cor.20.sexti *nales sint BE ED EC; erit BE ad EC, vt quadratum ex BE ad quadratum ex ED. sed quadratum ex BE quintuplum est quadrati ex ED: est enim BE ad ED, ut BD ad DC. quare BE ipsius*
6.dif.decimi *EC quintupla est; & idcirco BC est quadrupla ipsius CE; estq; BC rationalis. ergo & rationalis CE, & ipsi CB longitudine commensurabilis. & quoniam quadratum ex DE commensurabile est*
9.dif decimi *quadrato ex EC, atque est quadratum ex EC rationale; erit etiam rationale quadratū ex DE, ipsaq; DE rationalis. quòd cum quadratum ex DE ad quadratū ex EC proportionem non habeat,*
9.decimi *quam quadratus numerus ad quadratum numerum; erit DE ipsi EC incōmensurabilis longitudine.*
37.decimi *sunt igitur DE EC rationales, & inter se potentia solum commensurabiles; & ob id DC ex binis nominibus est, cuius maius nomen DE. Dico & quintam esse. sit enim quadratum ex FG, quo*
9.decimi *quadratum ex DE superat quadratum ex EC. habebit quadratum ex DE ad quadratum ex FG proportionem eam, quam habet 5 ad 4. ergo FG ipsi DE longitudine est incommensurabilis. itaque quoniam DE plus potest quàm EC quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine; estq; EC expositae rationali CB longitudine cōmensurabilis: erit DC ex bis nominibus quinta. est autem AC ipsius CD dupla. ergo & AE est quinta ex binis nominibus. recta enim linea commensurabilis ei, quae est ex binis nominibus, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem ex 67 decimi libri. Et cum quadratum ex AC sit aequale rectangulo ABC, si ad rationalem BC applicetur, latitudinem faciet ipsam AB. ergo AB ex binis nominibus est prima. quadratum namque eius, quae ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam ex 98 decimi. si igitur minor portio rectae lineae extrema, ac media ratione sectae sit rationalis, expositae rationali longitudine commensurabilis, erit maior portio ex binis nominibus quinta, & tota ex binis nominibus prima. quod demonstrare oportebat.*

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si pentagoni ęquilateri tres anguli siue continuati, siue non cōtinuati fuerint ęquales, ęquiangulum erit pentagonum.

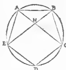


Pentagoni enim ęquilateri ABCDE tres anguli primum cōtinuati, qui ad puncta ABC ęquales inter se sint. Dico pētagonum ABCDE æquiāgulum esse. Iungantur enim AC BE FD. & quoniam duę CB BA duabus BA AE æquales sunt, altera alteri, & angulus CBA est ęqualis angulo BAE,
4.Primi erit basis AC æqualis basi BE, & triangulum ABC triangulo ABE æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur.

subtenduntur. angulus quidem BCA angulo BEA, angulus vero ABE angulo CAB. quare & latus AF est æquale lateri BF. ostensa autem est & tota AC toti BE æqualis. ergo & reliqua FC est æqualis reliquæ FE. atque est CD æqualis DE. duæ igitur FC CD duabus FE ED æquales sunt, & basis ipsorum est communis FD. quare angulus FCD angulo FED est æqualis. ostensus autem est & angulus BCA æqualis angulo AEB. totus igitur BCD æqualis est toti AED. sed angulus BCD positus est æqualis angulis, qui sunt ad puncta AB. ergo & AED angulus angulis, qui sunt ad AB æqualis erit. similiter demonstrabimus & angulum CDE angulis, qui sunt ad AB esse æqualem. æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum. sed non sint anguli continuati sibi ipsis æquales, sed qui sunt ad puncta ACD. Dico & sic æquiangulum esse ABCDE pentagonum. Iungatur enim BD. & quoniam duæ BA AE duabus BC CD æquales sunt, & angulos equales continent; erit basis BE æqualis basi BD, & ABE triangulum triãgulo BCD, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. æqualis igitur est angulus AEB angulo CDB. est autem & BED angulus angulo BDE æqualis, quoniam & latus BE est æquale lateri BD totus igitur angulus AED toti CDE est æqualis. Sed angulus CDE angulis, qui sunt ad puncta AC æqualis ponitur. ergo & AED angulus angulis, qui sunt ad AC est æqualis. Eadem ratione & angulus ABC æqualis est angulis, qui sunt ad ACD puncta. æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum. quod demonstrare oportebat. 8 primi

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos continuatos angulos subtendant rectæ lineæ, extrema, ac media ratione se mutuo secant, & maiores ipsarum portiones pentagoni lateri sunt æquales.



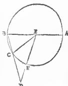
Pentagoni enim æquilateri, & æquianguli ABCDE duos continuatos angulos, qui sunt ad puncta AB subtendant rectæ lineæ AC BE, quæ sese in puncto H secent. Dico vtramque ipsarũ extrema, ac media ratione secari in puncto H: & maiores earũ portiones pentagoni lateri æquales esse. describatur enim circa ABCDE pentagonũ circulus ABCDE. & quoniam duæ rectæ lineæ EA AB duabus AB BC æquales sunt, & angulos æquales continent; erit basis BE basi AC æqualis, & ABE triangulum æquale triangulo ABC, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. æqualis igitur est BAC angulus angulo ABE. ergo AHE angulus anguli BAH est duplus; etenim extra triangulum est ABH. est autem & angulus EAC duplus anguli BAC, quòd & circumferentia EDC circumferentiæ CB est dupla. ergo HAE angulus æqualis est angulo AHE, & ob id recta linea HE est æqualis ipsi EA, hoc est ipsi AB. et quoniam BA est æqualis AE, erit & angulus ABE angulo AEB æqualis. sed angulus ABE ostensus est æqualis angulo BAH. ergo & BEA angulus æqualis est angulo BAH. & communis duobus triangulis, videlicet triangulo ABE, & triangulo ABH est angulus ABE. reliquus igitur BAE reliquo AHB est æqualis. ergo triangulum ABE æquiangulum est triangulo ABH; ideoque vt EB ad BA, ita est AB ad BH: æqualis autem est BA ipsi EH. vt igitur BE ad EH, ita EH ad HB. Sed BE maior est quàm EH. ergo & EH quàm HB est maior. recta igitur linea BE extrema, ac media ratione secta est in H, & maior portio HE pentagoni lateri est 4 primi 32 primi 33 sexti 6 primi 21 sexti

 æqualis.

æqualis. Similiter demonstrabimus & A C extrema, ac media ratione secari in H, & maiorem eius portionem C H pentagoni lateri æqualem esse. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO. IX.

Si hexagoni & decagoni latera in circulo descripta componantur, erit tota recta linea extrema, ac media ratione secta, & maior ipsius portio erit hexagoni latus.



Sit circulus ABC, & descriptis in dicto circulo figuris, sit decagoni quidem latus BC, hexagoni vero CD, & in directum sibi ipsis constituantur. Dico totam rectam lineam BD extrema, ac media ratione secari in C, & maiorem eius portionem esse CD. Sumatur enim centrum circuli, quod sit E; iunganturq; EB EC ED, & BE ad A producatur. quoniã igitur decagoni æquilateri latus est BC, erit ACB circumferentia circumferentiæ BC quintupla: & ob id circumferentia AC. qua
Vlt. sexti. dupla est circumferentiæ CB. vt autem circumferentia A C ad ipsam C B, ita A E C angulus ad angulum CEB. angulus igitur AEC anguli CEB quadru-
5 primi. plus est. & quoniã EBC angulus est æqualis angulo E
32 primi. CB, erit angulus AEC. anguli ECB duplus. est autem recta linea EC æqualis ipsi C D; vtraque enim est æqualis lateri hexago-
5 primi. ni, quòd in circulo A B C describitur. quare & angulus C E D æqualis est angulo
32. primi. CDE. est igitur angulus ECB anguli EDC duplus. sed & angulus AEC duplus ostẽsus est anguli ECB. angulus igitur AEC anguli EDC est quadruplus. ostensus autem est & angulus AEC quadruplus anguli BEC. ergo EDC angulus angulo BEC æqualis erit. atque est angulus E B D communis duobus triangulis BEC BED. &
32 primi. reliquus igitur BED reliquo ECB est æqualis. ideoq; triangulum E B D triangulo
4. sexti. EBC æquiangulum. ergo vt DB ad BE, ita EB ad BC. æqualis autẽ est EB ipsi CD. vt igitur BD ad DC, ita DC ad CB. atq; est BD maior quàm DC. ergo & DC quã CB est maior; ac propterea recta linea B D extrema, ac media ratione secta est in C, & CD est maior ipsius portio. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Ex iam demonstratis & alia demonstrare licet, nempe hęc.

PROPOSITIO I.

Si latus hexagoni extrema, ac media ratione secetur, erit maior eius portio decagoni latus.

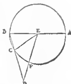
Sit recta linea AB, quae secetur in C, ita vt AC sit hexagoni latus, & C B latus decagoni in eodem circulo descripti. ergo
Ex antecedente. *AB extrema, ac media ratione secatur in C: atque est AC maior portio. abscindatur ab AC linea CD ipsi CB aequalis. erit AC quoq; extrema, ac media ratione secta in D: atque erit CD portio maior ex iis, quae à nobis demonstrata sunt ad quintam huius. est autem A C hexagoni latus, & CD latus decagoni. si igitur hexagoni latus extrema, ac media ratione secetur, erit maior eius portio decagoni latus. quod demonstrare oportebat.*

A D C B

PROPOSITIO II.

Si in circulo rationalem diametrum habente decagonum æquilaterum describatur, erit decagoni latus apotome quinta.

Maneant enim eadem, quae supra; & sit diameter AB rationalis. Dico decagoni latus BC esse apotomen quintam. Quoniam enim diameter AB est rationalis, erit quoque eius dimidia EC, hoc est CD rationalis. atq; est DC maior portio rectae lineae DB extrema, ac media ratione sectae; & CB minor portio eiusdem. Quando autem maior portio rectę linee, quae extrema, ac media ratione secatur sit rationalis, minor portio est apotome quinta. quod à nobis supra demonstratum fuit. ergo latus decagoni BC est apotome quiuta. quod oportebat demonstrare. ad 6.huius. Propo.1.



PROPOSITIO III.

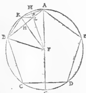
Si latus decagoni ęquilateri in circulo descripti, sit rationale, erit circuli diameter ex binis nominibus quinta.

Iisdem enim manentibus sit latus decagoni BC rationale. Dico diametrum AB esse ex binis nominibus, quintam. Quoniam enim BC, videlicet minor portio rectae lineae extrema, ac media ratione sectae est rationalis, erit maior portio CD ex binis nominibus quinta. quod etiam à nobis demonstratum est: ipsius autem CD dupla est AB; & quae longitudine commensurabilis est ei, quae ex binis nominibus, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem ex 67 decimi libri. ergo et AB ex binis nominibus est quinta. quod demonstrare oportebat. ad 6.huius. Propo. 4.

THEOREMA X. PROPOSITIO. X.

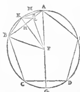
Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, latus pentagoni potest, & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo descriptorum.

Sit circulus ABCDE, & in ipso pentagonum ęquilaterum ABCDE describatur. Dico pentagoni ABCDE latus posse latus, & hexagoni, & decagoni in eodem circulo descriptorum. Sumatur enim centrum circuli F, iunctaq; AF ad G producatur, & iūgatur FB, deinde à puncto F ad AB perpendicularis agatur FH, & ad K producatur; iunganturque AK KB. & rursus à pūcto F ad AK perpendicularis agatur FB, & producatur ad M, & KN iungatur. Quoniam igitur circumferentia ABCG est æqualis circumferētiæ AEDG, quarum ABC æqualis est ipsi AED, erit reliqua CG reliquæ GD æqualis.



Sed CD est pentagoni. ergo CG decagoni erit. quòd cum AF sit æqualis FB & FH perpendicularis, erit & angulus AFK æqualis angulo KFB. quare & circūferētia AK circūferētia KB est æqualis. dupla igitur est circūferētia AB circūferētię BK, & ob id recta linea AK est decagon latus. Eadē rōne & AK est dupla KM. & quoniā circumferentia AB dupla est circumferentię BK, ęqualis autem CD circumferentia circumferentiæ AB, erit circumferentia CD circumferentiæ BK dupla. estque DC dupla ipsius CG. ergo CG est æqualis BK, sed BK ipsius KM est dupla, quoniam & 8 primi. 26 tertij.

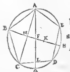
AK



AK. & CG igitur ipsius KM dupla erit. est autem & CB circumferentia circumferentię B
Vltime sexti 12 primi uel 20 tertij. K dupla. etenim CB est ęqualis BA. ergo & tota GB dupla est ipsius BM, & angulus GFB anguli BFM duplus. sed & angulus GFB est duplus anguli FAB: quandoquidem FAB angulus ęqualis est angulo ABF. ergo & angulus BFN angulo FAB est ęqualis. communis autem duobus triangulis ABF BFN est KBF angulus reliquus igitur AFB est ęqualis reliquo BNF, & triãgulum ABF triã-
4 sexti. gulo BFN ęquiangulum. ergo vt AB ad BF,
17. sexti. ita FB ad BN. rectangulum igitur ABN est æquale quadrato ex FB. Rursus quoniam A
4 primi. L est æqualis LK, communis autem, & ad rectos angulos LN; erit basis KN æqualis
5 primi. basi NA. ergo & angulus LKN angulo LAN est ęqualis. sed angulus LAN est æqualis angulo KBN. & angulus igitur LKN est æqualis angulo KBN. angulus autem NAK est communis duobus triangulis AKB, & AKN. ergo reliquus AKB reliquo K
4 sexti. NA est æqualis, & triangulum KAB triangulo KNA æquiangulum. vt igitur BA ad
17 sexti. AK, ita KA ad AN, ac propterea rectãgulum BAN est ęquale quadrato ex AK. ostẽsum est aũt & rectãgulũ ABN quadrato ex BF æquale. r[illegible] ẽctãgulũ igitur ABN vnà
2. secundi. cum rectangulo BAN, quod est quadratum ex AB est æquale quadraro ex BF vnà cum quadrato ex AK atque est AB quidem pentagoni latus, BF vero latus hexagoni, & AK decagoni. ergo pentagoni latus potest & latus hexagoni & decagoni in eodem circulo descriptorum. quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XI. PROPOSITIO. XI.

Si in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum describatur, pentagoni latus est linea irrationalis, quę minor appellatur.



In circulo enim ABCDE rationalẽ diametrũ habẽte pentagonũ ęquilaterum describatur ABCDE. Dico pentagoni ABCDE latus irrationalem esse lineam, quę minor appellatur. sumatur enim circuli centrum F; & iunctæ AF BF ad puncta GH producantur, & iungatur AC; ponaturq; FK ipsius AF pars quarta. rationalis autem
6 diffi. decimi. est AF. ergo & FK est rationalis. sed & rationalis BF. tota igitur BK rationalis erit. & quoniam circumferentia ACG æqualis est circumferentiæ ADG, quarum ABC est ęqualis ipsi AED, erit reli-
A qua CG reliquę GD æqualis. quòd si iungamus AG, fient anguli ad L recti, & DC dupla ipsius CL. Eadem ratione & anguli ad M recti sunt, & AC dupla CM. Quoniam igitur angulus ALC est æqualis angulo AMF, communis autem duobus triangulis ALC, & AMF est angulus LAC, reliquus ACL reliquo MFA æqualis erit; ideoq; triangulum ACL triangulo AMF æquiangulũ.
4 sexti. ergo ut LC ad CA, ita MF ad FA, & antecedentium dupla. quare vt dupla ipsius L
B C ad CA, ita ipsius MF dupla ad FA. sed vt ipsius MF dupla ad FA, ita est MF ad dimidiã ipsius FA. & vt igitur dupla ipsius LC ad CA, ita MF ad ipsius FA dimidiã: & consequentium dimidia. quare ut dupla LC ad dimidiam ipsius CA, ita MF ad quartam partem ipsius FA. atque est ipsius quidem LC dupla CD; ipsius vero CA dimidia

dimidia CM; & ipsius FA quarta pars FK. est igitur vt DC ad CM, ita MF ad FK: &
componendo vt vtraque DCM ad CM, ita MK ad KF. ergo ut quadratum, quod fit C
ex vtraque DCM ad quadratum ex CM, ita quadratum ex MK ad id, quod fit ex KF
quadratum. & quoniam recta linea, quæ duo peutagoni latera subtendit, vt AC ex-
trema, ac media ratione secta, maior portio est æqualis lateri pentagoni, hoc est ipsi D
DC; & maior portio assumens dimidium totius quintuplum potest eius, quod fit à E
totius dimidia; atq; est totius AC dimidia CM: erit quadratum ex DCM tanquam
ex vna linea, quintuplum eius, quod fit ex CM. vt autem quadratum ex DCM tan-
quam ex vna linea ad quadratum ex CM, ita ostendimus esse quadratum ex MK ad
quadratum ex KF quintuplum igitur est quadratum ex MK quadrati ex KF: estque
quadratũ ex KF rationale, quippe cum diameter rationalis sit. ergo & rationale est F
quadratum ex MK; & ipsa MK rationalis. quadratum enim ex MK ad quadratum ex G
KF proportionem habet, quam numerus ad numerum. & quoniam BF quadrupla
est ipsius FK, erit BK ipsius KF quintupla, & quadratum ex BK vigintiquintuplum H
quadrati ex KF. quadratum autem ex MK quintuplum est quadrati ex KF. ergo qua K
dratum ex BK quadrati ex KM est quintuplum; ac propterea ad illud proportionẽ
non habet, quam numerus quadratus ad quadratum numerum. incommensurabi- L
lis igitur est BK ipsi KM longitudine. atque est vtraque ipsarum rationalis. ergo BK
KM rationales sunt potentia solum commensurabiles. si autem à rationali rationa- M
lis auferatur potentia solum commensurabilis existens roti, reliqua irrationalis est,
quę apotome appellatur quare MB est apotome, & ipsi congruẽs MK. Dico & quar
tam esse. quo enim quadratum ex BK superat quadratum ex KM, illi sit æquale qua-
dratum ex N ergo BK plus potest, quàm KM quadrato ex N. & quoniam commen- N
surabilis est KF ipsi FB, & componendo KB commensurabilis ipsi BF; sed & BF cō- O P
mensurabilis ipsi BH longitudine, erit & KB ipsi BH commensurabilis. quòd cum Q
quadratum ex BK quintuplum sit quadrati ex KM, habebit quadratum ex BK ad
quadratum ex KM proportionem eam, quam habet quinque ad vnum. Ergo per cō
uersionem rationis quadratum ex BK ad quadratum ex N proportionem habet,
quam quinque ad quattuor, & non eam, quam quadratus numerus ad quadratum
numerum. incommensurabilis igitur est BK ipsi N. idcircoq; BK plus potest, quàm 9. undecimi.
KN quadrato rectę lineæ sibi incommensurabilis. itaque quoniam tota BK plus po-
test, quam congruens MK, quadrato rectę lineæ sibi incommensurabilis, & tota BK
commensurabilis est expositæ rationali BH, erit MB apotome quarta. quod autem R S
rationali, & apotome quarta continetur rectangulum irrationale est, & ipsum po-
tens est irrationalis, quæ minor appellatur. sed AB potest id, quod continetur HB T
BM, propterea quòd iuncta AH triangulum ABH est ęquiangulum triangulo AB
M atque est vt HB ad BA, ita AB ad BM. ergo AB pentagoni latus est linea irratio
nalis, quę minor appellatur. quod oportebat demonstrare.

F. C. COMMENTARIVS.

A
Quòd si iungamus AG, fient anguli ad L recti, & DC dupla ipsius CL] *Iunctis* 27 tertij.
enim AC ALG, si etiam intelligatur iuncta AD, quoniam circumferentia CG est aequalis circũ-
ferentiae GD, erit angulus CAG aequalis angulo GAD. duae igitur CA AL duabus DA AL 4 primi.
aequales sunt, & angulus CAL est aequalis angulo DAL. ergo & basis CL basi LD est aequalis,
& reliqui anguli reliquis angulis aequales, quibus aequalia latera subtenduntur. angulus igitur Diff. 10. primi.
ALC est aequalis angulo ALD. & ob id vterque rectus est. & cum CL sit ęqualis LD, erit DC ip
sius CL dupla.

B
Et antecedentium dupla] *Quoniam enim est vt LC ad CA ita MF ad FA, vt autem du-*
pla ipsius LC ad LC, ita dupla ipsius MF ad MF; erit ex aequali vt dupla ipsius LC ad CA, ita du
pla ipsius MF ad FA.

C
Ergo vt quadratum, quod fit ex vtraque DCM ad quadratum ex CM] *Ex 22.*
sexti libri.

D
Maior portio est æqualis lateri pentagoni, hoc est ipsi DC] *Ex 8. huius.*

E

E Et maior portio assumens dimidiam totius quintuplum potest eius, quod fit a totius dimidia] *Ex 1. huius.*

F Ergo & rationale est quadratum ex MK] *Rationali enim commensurabile, & ipsum rationale est ex nona diffinitione decimi libri*

G Et ipsa MK rationalis] *Ex 8. diffinitione eiusdem libri.*

H Et quadratum ex BK vigintiquintuplum quadrati ex KF] *Ex 20 sexti libri. est enim 25 ad 5, vt 5 ad 1. quare 25 ad 1 proportionem duplam habet eius, quam 5 habet ad 1. ex 10 diffinitione quinti libri.*

K Ergo quadratum ex BK quadrati ex KM est quintuplum] *Nam cum quadratum ex BK ad quadratum ex KF sit vt 25 ad 1, quadratum vero ex MK ad idem quadratum ex KF sit vt 5 ad 1; erit quadratum ex BK ad quadratum ex MK, vt 25 ad 5, hoc est vt 5 ad 1.*

L Incommensurabilis igitur est BK ipsi KM longitudine] *Ex nona decimi libri.*

M Si autem à rationali rationalis auferatur potentia solum commensurabilis existens toti, reliqua irrationalis est, quę apotome appellatur] *Ex 74 decimi libri.*

N Et quoniam commensurabilis est KF ipsi FB] *Intellige commensurabilis longitudine, quemadmodum & inferius, posita est enim KF quarta pars ipsius FA, hoc est ipsius FB.*

O Et componendo KB commensurabilis ipsi BF] *Ex 16 decimi.*

P Sed & BF commensurabilis ipsi BH longitudine] *Est enim BF ipsius BH dimidia.*

Q Erit & BK ipsi BH commensurabilis] *Ex 12 decimi.*

R Erit MB apotome quarta] *Ex quarta tertiarum diffinitionum.*

S Quod autem rationali, & apotoma quarta continetur rectangulum irrationale est & ipsum potens est irrationalis, quæ minor appellatur] *Ex 95 decimi.*

T Sed AB potest id, quod continetur HB BM] *Ex corollario 8 sexti, & 17 eiusdem.*

THEOREMA XII. PROPOSITIO. XII.

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur, trianguli latus potentia triplum est eius, quę ex circuli centro.



Sit circulus ABC, & in ipso triangulum æquilaterum describatur ABC. Dico trianguli ABC latus potentia triplũ esse eius, quę est ex circuli ABC cẽtro. sumatur enim circuli cẽtrum D, & iuncta AD producatur ad E, & BE iũgatur. Itaque quoniam æquilaterum est ABC triangulum, erit BEC circumferentia tertia pars circumferentiæ circuli ABC. ergo circumferentia BE est sexta pars circuli circumferentiæ; ideoq; recta linea BE est latus hexagoni, & æqualis ipsi DE, quę est ex circuli centro. & quoniam AE est dupla ipsius ED, erit quadratũ ex AE quadrati ex ED, hoc est quadrati ex EB quadruplũ. quadratũ autem ex AE est æquale quadratis ex AB BE. ergo quadrata ex AB BE quadrupla sunt quadrati ex BE: & diuidendo quadratum ex AB quadrati ex BE triplum; atque est BE ęqualis ED. quadratum igitur ex AB triplum est quadrati ex DE. ergo trianguli latus est potentia triplum eius, quæ ex circuli centro. quod demonstrare oportebat.

Corol. 15. quarti.
20. sexti.
47 primi.

F. C. COMMENTARIVS.

Constat etiam latus trianguli æquilateri ad rectam lineam, quæ ab angulo ad basim perdendicularis ducitur, eam potentia proportionem habere, quam habet 4 ad 3.

Sit enim triangulum aequilaterum ABC, cuius basis BC bifariam secetur in D, & AD iungatur. erit AD ad ipsam AC perpendicularis; sunt enim duo latera AD DB duobus lateribus AD DC

DC aequalia, & basis AB est aequalis basi AC. angulus igitur ADB est aequalis angulo ADC. & ideo vterque ipsorum rectus, & AD ad BC est perpendicularis. Dico quadratum ex B A ad quadratum ex AD proportionem habere eandem, quam 4 ad 3. Quoniam enim AB dupla est ipsius BD, erit quadratum ex AB quadrati ex BD quadruplum: atque est quadratum ex A B aequale quadratis ex AD DB. quadratum igitur ex BA ad quadratum ex AD eam proportionem habet, quã 4 ad 3. quod oportebat demonstrare.

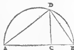


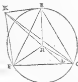
10 sexti. 47 primi.

PROBLEMA I. PROPOSITIO. XIII.

Pyramidem constituere, & sphęrę comprehendere data, ac demonstrare sphęrę diametrum potentia sesquialteram esse lateris ipsius pyramidis.

Exponatur enim datę sphęrę diameter AB, & secetur in C, ita vt AC ipsius CB sit dupla: deScribatur in AB semicirculus ADB: & à puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD, & DA iungatur. exponatur pręterea circulus EFG ęqualem habens eam, quę ex centro ipsi DC, in quo describatur triangulum ęquilaterum EFG: sumaturque centrum circuli H, & iunganturE H HF HG. atque à puncto H ipsi plano circuli EFG ad rectos angulos erigatur HK, ita vt H K ipsi AC sit ęqualis, & KE KF KG iungantur. Quoniam igitur HK recta est ad planum circuli EFG, & ad omnes rectas lineas, quę in eodem circuli plano existentes ipsam cõtingunt, rectos angulos faciet. contingit autem ipsam vnaquęque linearum HE HF HG. ergo HK ad vnamquamque ipsarum HE HF HG est perpendicularis. & quoniam AC quidem est ęqualis HK, C D vero ipsi HE, & rectos angulos continent; erit basis DA ęqualis basi KE. Eadem ratione & vtraque KF KG ipsi DA est ęqualis. tres igitur KE KF KG inter se ęquales sunt. quòd cum AC sit dupla CB, erit AB ipsius BC tripla. vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC, vt deinceps demonstrabitur. triplum igitur est quadratum ex AD quadrati ex DC. est autem & quadratum ex FE quadrati ex EH triplum. atque est DC ęqualis EH. ergo & AD ipsi EF est ęqualis. sed AD ostensa est ęqualis vnicuique ipsarum KE KF KG. & vnaquęque igitur ipsarum EF FG GE vnicuique KE KF KG est ęqualis. & ob id ęquilatera sunt quattuor triangula EFG KEF KFG KGE. pyramis igitur cõstituta est ex quattuor triangulis ęqualibus & ęquilateris, cuius basis quidem est triangulum EFG, uertex autem K pũctum. Itaq; oportet ipsam & sphęra data comprehẽdere, & ostẽdere sphęrę diametrum potentia sesquialterã esse lateris pyramidis. producatur enim recta linea HL in directum ipsi HK, ponaturque HL





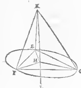
3 diffinit. undecimi.

4 primi.

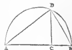
A

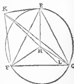
B

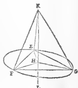
C



ipsi BC æqualis. & quoniam est vt AC ad CD, ita DC ad CB; æqualis autem AC quidem ipsi KH, CD vero ipsi HE, & CB ipsi KL: erit vt K
17.sexti. H ad HE, ita EH ad HL. rectangulum igitur K HL est æquale quadrato ex EH. atque est rectus vterque angulorum KHE EHL. ergo in KL descriptus semicirculus & per punctum E transibit. nam si coniungamus EL, angulus LEK fiet
8. sexti. rectus, cum triangulum ELK æquiangulum sit vnicuiq; triangulorum ELH EKH. si igitur manente KL semicirculus cõuersus in eundem rursus locum restituatur, à quo cœpit moueri, etiã per puncta FG transibit, iunctis FL LG; & rectis similiter factis ad puncta FG angulis: atque erit pyramis comprehensa data sphæra; etenim KL sphæræ diameter est æqualis diametro datæ sphæræ AB, quoniam ipsi quidem AC ponitur æqualis KH; ipsi vero CB æqualis HL. Dico igitur sphæræ diametrum potentia sesquialteram esse lateris pyramidis. Quoniam enim AC dupla est ipsius CB, erit AB ipsius BC tripla. ergo per conuersionem rationis BA sesquialtera est ipsius AC. vt autem BA ad AC, ita est quadratum ex BA ad quadratum ex AD, quoniam iuncta BD, est vt BA ad AD, ita DA ad AC ob
Cor. 8 sexti. similitudinem triangulorum DAB DAC, &
Cor. 20. sexti. quòd vt prima ad tertiam, ita quadratum ex prima ad quadratum ex secunda. ergo quadratum ex BA sesquialterum est quadrati ex AD. atque est BA quidem datæ sphæræ diameter, AD vero æqualis lateri pyramidis. sphæræ igitur diameter sesquialtera est lateris pyramidis. quod demonstrare oportebat.

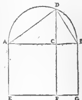






Itaque demonstrandum est vt A B ad BC, ita esse quadratum ex AD ad quadratum ex DC.

Exponatur enim semicirculi figura; iungaturq; DB: & ex AC describatur quadratum EC, & parallelogrammum FB compleatur. Quoniã
Cor 8 sexti. igitur est vt BA ad AD, ita DA ad AC, propte-
17. sexti. rea quod triãgulum DAB æquiangulum est triã
8 sexti. gulo DAC, erit rectangulum contentum BAC quadrato ex AD æquale. & quoniam est vt AB ad BC, ita parallelogrammum EB ad parallelogrammum BF; atque est parallelogrammũ quidem EB, quod continetur BA AC, est enim EA æqualis AC; parallelogrammum uero BF æquale est ei, quod AC CB continetur: erit ut AB ad BC, ita rectangulum contentum BA AC ad cõtentum AC CB. est autem contentum BA AC
17 sexti. æquale quadrato ex AD: & contentum AC CB
Cor. 8. sexti quadrato ex DC. æquale: perpendicularis enim DC media est proportionalis inter basis portio-



nes AC CB, cum angulus ADB sit rectus. ex quibus sequitur vt AB ad BC, ita esse quadratum ex AD ad quadratum ex DC. quod demonstrare oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC] *Quod deinceps demonstrabitur, videlicet ad finem huius, sed in scholio aliter demonstratur, hoc modo.* A

Quoniam enim est ut BA ad AC, ita quadratum ex DA ad quadratum ex AC, erit per conuersionem rationis vt AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC] *Nam tres rectae lineae BA AD AC deinceps proportionales sunt ex corollario 8. sexti, & quadratum ex AD superat quadratum ex AC, quadrato ex DC, ex 47 primi.*

Est autem & quadratum ex FE quadrati ex EH triplum] *ex antecedente.* B

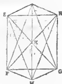
Ergo & DA ipsi EF est equalis] *Qm enim quadratum ex AD triplũ est quadrati ex DC, et quadratũ DC ex FE triplum quadrati ex EH; estq; quadratũ ex DC equale quadrato ex EH, quod DC ipsi EH sit aequalis: erit quadratũ ex AD equale quadrato ex EF ideoq; AD ipsi EF equalis.* C

PROBLEMA II. PROPOSITIO. XIIII.

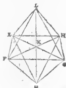
Octaedrum constituere, & sphæra comprehendere, qua & pyramidem: demonstrareq; sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris octaedri.



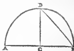
Exponatur datæ sphæræ diameter AB: & in C bifariam secetur; describaturq; in AB semicirculus ADB; & à puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD: & DB iungatur. exponatur preterea quadratum EFGH habens vnumquodque latus æquale ipsi BD: & iunctis HF EG, erigatur à puncto K ipsi EF GH quadrati plano ad rectos angulos KL; producaturq; ad alteras partes plani, vt KM: & auferatur ab vtraque rectarum linearum KL KM vni ipsarum KE KF KG KH æqualis vtraque KL KM: & iungantur LE LF LG LH ME MF MG MH. qm igitur KE est æqualis KH, atq; est rectus angulus EKH; erit quadratũ ex HE quadrati ex EK duplum: Rursus quoniam LK est æqualis KE, & rectus LKE angulus; erit quadratum ex EL duplum quadrati ex EK. ostẽsum est autem & quadratum ex HE quadrati ex EK duplum. ergo quadratum ex LE æquale est quadrato ex EH, & LE ipsi EH equalis. Eadẽ ratione & LH est equalis HE. æquilaterũ igitur est LEH triangulum. similiter ostendemus & vnumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases sunt latera quadrati EFGH, vertices autem LM puncta, æquilaterum esse. octaedrum igitur constitutum est, quod octo triangulis æquilateris continetur. itaq; oportet ipsum & data sphæra comprehendere: demonstrareq; sphere diametrum potentia duplam esse lateris octahedri. quoniam enim tres rectę lineæ LK KM KE inter se æquales sunt, semicirculus in LM descriptus, & per punctum E transibit. & ob eandem caussam si manente LM conuersus semicirculus in eundem locum restituatur, à quo cœpit



47. primi

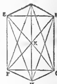


moueri, transibit etiam per puncta F G H: atque erit octaedrum sphæra comprehensum. Dico etiam comprehensum esse data sphæra. quoniam enim L K est æqualis K M, communis autem KE, & angulos æquales côtinent; erit basis LE basi EM æqualis. & quoniam rectus est LEM angulus, in semicirculo



47.primi. enim, erit quadratum ex LM quadrati ex LE duplum. rursus quoniam AC est æqualis CB,

Cor 8 & 10 sexti. erit AB dupla ipsius BC. vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD. duplum igitur est quadratum ex AB quadrati ex BD. ostensum est autem & quadratum ex LM quadrati ex LE duplum. atque est quadratum ex B D æquale quadrato ex L E; posita est enim EH ipsi DB æqualis. ergo quadratum ex A B est æquale quadrato ex LM; ac propterea ipsa AB est æqualis LM. est autem AB diameter datæ sphæræ. quare L M est æqualis datæ sphæræ diametro. octaedrum igitur comprehensum est data sphæra: & simul demonstratum est sphæræ diametrum lateris octaedri potentia duplam esse.

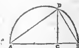


PROBLEMA III. PROPOSITIO. XV.



Cubum constituere, & sphæra comprehendere, qua & priores, demonstrareque sphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam esse.

Exponatur enim datæ sphæræ diameter AB: & secetur in C, ita ut AC ipsius CB sit dupla: describaturq; in AB semicirculus ADB, & à puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD, & DB iūgatur. deinde exponatur quadratum EFGH, habens unumquodque latus æquale ipsi DB: & à punctis EFGH quadrati EFGH plano ad rectos angulos ducantur EK FL GM HN, & auferatur ab unaquaque rectarum linearum EK FL GM HN uni ipsarum EF FG GH HE æqualis unaquæque EK FL GM HN: & KL L M MN NK iungantur. cubus igitur constitutus est FN, qui sex quadratis æqualibus continetur. Itaque oportet ipsum & sphæra data comprehendere, demonstrareque sphæræ diametrum potentia triplam esse lateris cubi. Iungantur enim KG EG. & quoniam rectus est



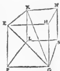
8.diffi. undecimi KEG angulus, propterea quòd & KE perpēdicularis fit ad EG planū uidelicet, & ad rectam lineam EG semicirculus in KG descriptus & per pūctum E transibit.

4.Vndecimi Rursus quoniam FG perpēdicularis ad utramque ipsarum FL FE, & ad FK planum est perpendicularis. quare si iungamus FK ipsa FG & ad FK perpendicularis erit: ac propterea rursus in KG descriptus semicirculus transibit & per punctum F. similiter autem & per reliqua cubi puncta transibit. si igitur manente KG conuersus semicirculus in eūdem rursus locum restituatur, à quo cœpit moueri, erit cubus sphæ-ra

ra comprehensus. Dico & data sphæra. Quoniam enim GF est æqualis FE, atque est rectus qui ad F angulus; erit quadratum ex EG quadrati ex EF duplum. æqualis autem est EF ipsi EK. quadratum igitur ex EG duplum est quadrati ex EK. ergo quadrata ex GE EK, hoc est quadratum ex GK triplum est quadrati ex KE. & quoniam AB est ipsius BC tripla, ut AB ad BC, ita quadratũ ex AB ad quadratum ex BD, erit quadratum ex AB quadrati ex BD triplum. ostensum est autem & quadratum ex GK triplum quadrati ex KE. & posita est KE ipsi BD æqualis. ergo & KG est æqualis AB. atque est AB datæ sphæræ diameter. quare & KG æqualis erit diametro datæ sphæræ. cubus igitur data sphæra est comprehensus, & simul demonstratum est sphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam esse, quod demonstrare oportebat.

47 prima.

Coroll. 8 sexti.

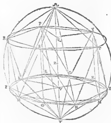


PROBLEMA V. PROPOSITIO XVI.

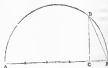
Icosaedrum constituere & sphæra comprehendere, qua & prædictas figuras; demonstrareque icosaedri latus irrationalem esse lineam, quæ minor appellatur.

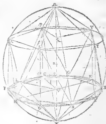
Exponatur datæ sphæræ diameter AB; seceturque in C, ita ut AC ipsius DB sit quadrupla: & in AB descripto semicirculo ADB, ducatur à puncto C ipsi AB ad rectos angulos recta linea CD. & DB iungatur. deinde exponatur circulus EFGHK, cuius ea, quæ ex centro sit æqualis ipsi DB: describaturq; in circulo EFGHK pentagonum æquilaterũ & æquiangulum EFGHK. & circumferentiæ EF FG GH HK KE bifariam secentur in LMNXO punctis; & iungantur EL LF FM MG GN NH HX XK KO OE. & similiter LM MN NX XO OL. æquilaterum igitur est LMNXO pentagonum; & recta linea EO est decagoni latus. deinde à punctis EFGHK ipsi plano circuli ad rectos angulos erigantur EP FR GS HT KY æquales existentes ei, quæ ex centro circuli EFGHK, & iungãtur PR RS ST TY YP PL LR RM MS SN NT TX XY YO OP. Quoniam igitur utraque ipsarum EP KY eidem plano est ad rectos angulos, erit EP ipsi KY





parallela; atque est ipsi æqualis. quę autem æquales, & parallelas ad easdem partes
33. primi. coniungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt. ergo PY ipsi EK & ęqualis est, & parallela. sed EK est latus pentagoni æquilateri. ergo & PY est pentagoni æquilateri latus, in circulo EFGHK descripti. Eadem ratione & unaquæque ipsarũ FR RS ST TY est latus pentagoni ęquilateri in eodem circulo descripti. æquilaterum igitur est PRSTY pentagonum. & quoniam hexagoni quidem latus est PE, de-
B goni uero EO, atque est rectus PEO angulus; erit PO latus pentagoni. etenim latus pentagoni potest & hexagoni, & decagoni latus in eodem circuló descriptorum. Eadem ratione & OY est pentagoni latus, est autem & PY latus pentagoni. ergo æquilaterum est triangulum POY. & ob eandem causam vnumquodque triangulorum PLR RMS SNT ϒXY est æquilaterum. & quoniam pentagoni ostensa est vtraque ipsarum PL LO, atque est LO pentagoni; erit PLO æquilaterum triangulum. Eadem ratione & vnumquodq; triãgulorum LRM MSN NϒX XYO ęquilaterum est. sumatur cẽtrum circuli EFGHK, quod sit punctum V; & à puncto V ipsi circuli plano ad rectos angulos erigatur VΩ, & ad alteras partes producatur, vt Vϒ. & auferatur hexagoni quidem latus VQ decagoni vero vtraque ipsarum Vϒ QΩ, & iungantur PΩ PQ YΩ EV LV Lϒ ϒM. & quoniam vtraque ipsarum VQ PE circuli plano est ad rectos angulos,
6 undecimi erit VQ ipsi PE parallela. sunt autem & ęquales. ergo EV PQ & ęquales sũt, & parallelæ: estq; EV hexagoni latus. hexagoni igitur & PQ quod cum hexagoni quidem latus sit PQ, decagoni vero QΩ, & rectus
10. huius. PQΩ angulus; erit PΩ latus pentagoni. Eadem ratione & YΩ pentagoni est latus; quoniam si iungamus VK QY & æquales, & ex opposito erunt. atque est VK ex centro circuli, uidelicet hexagoni latus. ergo & QY est latus hexagoni. decagoni autẽ QΩ, & rectus angulus est YQΩ. pentagoni igitur est YΩ: estque PY pentagoni. quare æquilaterum est PYΩ triangulum. Eadem ratione & æquilaterum est vnumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases sunt PR RS ST TY rectæ lineę, uertex autem Ω punctum. Rursus quoniam hexagoni est VL, decagoni vero Vϒ, & angulus LVϒ rectus; erit Lϒ pentagoni. Eadem ratione si iungamus MV, quæ est hexagoni, concludetur & Mϒ pentagoni esse. est autem & LM pentagoni. æquilaterum igitur est LMϒ triangulũ. similiter ostendetur & ęquilaterum esse unumquodque reliquorũ triãgulorũ quorũ bases sunt MN NX XO OL, uertex autẽ ϒ punctũ. cõstitutum igitur est icosaedrum, uiginti triangulis æquilateris contentum. Itaq; oportet ipsum sphera data comprehendere, demonstrareque icosaedri latus lineam irrationalem esse, quæ minor appellatur. Quoniam enim hexagoni latus est VQ decagoni vero QΩ; recta linea VΩ extrema, ac media ratione secta est in Q, & VQ est maior portio. est igitur ut ΩV ad VQ, ita VQ ad QΩ. atque est VQ ipsi VL æqualis, &





QΩ

QΩ ipsi VT. quare ut ΩV ad VL, ita LV ad VT. & sunt anguli ΩVL LVT recti. si igitur iungamus rectam lineam LΩ, erit TLΩ rectus angulus, ob similitudinem trian- 6. sexti.
gulorum TLΩ VLΩ. ergo semicirculus in TΩ descriptus etiam per L transibit. Eadem ratione quoniam est ut ΩV ad VQ, ita VQ ad QΩ; & æqualis est ΩV quidem ipsi TQ. VQ uero ipsi QP: erit vt TQ ad QP, ita PQ ad QΩ: ideoque si rursus iungamus PT, erit angulus, qui ad P rectus. semicirculus igitur descriptus in TΩ transibit & per P. Quòd si manente TΩ conuersus semicirculus in eundem rursus locum restituatur, a quo cœpit moueri, etiam per P, & per reliqua icosaedri puncta transibit. atque erit icosaedrum sphæra comprehensum. Dico & data. secetur enim VQ bifariam in Z & quoniam recta linea VΩ extrema, ac media ratione secta est in Q, & ΩQ est minor ipsius portio, ipsa ΩQ assumens dimidiam maioris portionis, vide E
licet QZ quintuplum poterit quadrati eius, quod à dimidia maioris portionis describitur. quadratum igitur ex ΩZ quadrati ex ZQ quintuplum est. & ipsius quidẽ
ZΩ dupla est ΩT, ipsius vero AQ dupla QV. ergo quadratum ea ΩT quintuplum est F
quadrati ex VQ & quoniam AC quadrupla est ipsius CB, erit AB ipsius BC quintupla. ut autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quaratum ex BD. quadratum G
igitur ex AB quadrati ex BD est quintuplum. ostensum autem est & quadratum ex ΩT quintuplum quadrati ex VQ: atque est DB ęqualis VQ: vtraque enim ipsarum est æqualis ei quæ ex centro circuli EFGHK. quare & AB est ęqualis TΩ, estq; AB datę sphęræ diameter. & TΩ igitur erit diameter datę sphęrę. ergo icosaedrum est data sphæra comprehensum. Dico icosaedri latus irrationlem esse lineam, quæ minor appellatur. Quoniã enim rationalis est sphærę diameter, atque est potẽtia quintupla eius, quæ ex centro EFGHK circuli; erit & quæ ex centro circuli EFGHK ra- H
tionalis. quare & diameter ipsius rõnalis erit. si aũt in circulo rationalẽ diametrũ ha K
bente pentagonũ æquilaterũ describatur, erit latus pẽtagoni linea irrationalis, quæ minor appellatur. sed pentagoni EFGHK latus est icosaedri. ergo icosaedri latus L
est linea irrationalis, quę minor appellatur.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est sphæræ diametrum potentia quintuplã esse eius, quæ ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur: & sphærę diametrum compositam esse ex latere hexagoni, & duobus decagoni lateribus, quę in eodem circulo describuntur.

F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam igitur utraq; ipsarum EP KY eidem plano est ad angulos rectos, erit A
EP ipsi KY parallela.] *Ex 6 vndecimi.*

Erit FO latus pentagoni] *Ex 10 huius.* B

Quoniam enim hexagoni est VQ, decagoni uero QΩ, recta linea VΩ extrema, ac C
media ratione secta est in Q] *Ex 9 huius.*

Quare ut ΩV ad VL, ita LV ad VT. & suut anguli ΩVL LVT recti. si igitur iunga D
mus rectam lineam LΩ, erit TLΩ angulus rectus ob similitudinem triangulorum TLΩ VLΩ] *Quoniam enim est vt ΩV ad VL, ita LV ad VT, erit vt ΩV ad VT, videlicet vt prima ad tertiam, ita quadratum primae ΩV ad quadratum VL secundae: componendoq́; vt ΩT ad TV, ita quadrata ex ΩV VL, hoc est quadratum ex ΩL ad quadratum ex LV: & per conuersionem rationis vt TΩ ad ΩV, ita quadratum ex LΩ ad quadratum ex ΩV. quare LΩ est media proportionalis inter TΩ ΩV, quod deinceps demonstrabimus. vt igitur TΩ ad ΩL, ita LΩ ad ΩV. at que est angulus LΩT vtrique communis. ergo triangulum TΩL simile est triangulo LΩV, & angulus LVΩ rectus est aequalis angulo TLΩ. angulus igitur TLΩ rectus erit. At vero LΩ inter TΩ ΩV mediam esse proportionalem ex his apparebit.*

Si sint tres rectæ lineæ, sitq; vt prima ad tertiam, ita quadratum secundæ ad quadratum tertiæ, erunt dictæ lineæ deinceps proportionales.

Sint tres rectae lineae A B C; sitq́; vt A ad C, ita quadratum ex B ad quadratum ex C. Dico

ABC

ABC deinceps proportionales esse. Sumatur enim inter AC media proportionalis D, erit vt A ad C, ita quadratũ ex A ad quadratum ex D, hoc est quadratum ex D ad quadratum ex C. sed vt A ad C, ita positum est quadratum ex B ad quadratum ex C. ergo quadratum ex D aequale est quadrato ex B; ac propterea D ipsi B est aequalis. tres igitur rectae lineae ABC deinceps proportionales sunt. sed licet expeditius demonstrare angulum ϒLΩ rectum, esse hoc modo. Quoniã enim est vt ΩV ad VL, ita LV ad Vϒ, suntq; anguli ΩVL LVϒ recti, erit triangulum ΩVL triangulo LVϒ simile, & angulus LΩV equalis angulo VLϒ sunt autem anguli VLΩ LΩV equales vni recto, cum rectus sit LVΩ. ergo & anguli ΩLV VLϒ vni recto sunt aequales: & ob id angulus ϒLΩ est rectus. quod oportebat demonstrare.



E Ipsa ΩQ assumens dimidiam maioris portionis videlicet QZ quintuplum poterit quadrati eius, quod à dimidia maioris portionis describitur] *Ex 3. huius.*

F Ergo quadratum ex Ωϒ quintuplum est quadrati ex VQ] *Ex 15. quinti.*

G Vt autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BD] *Ex corollario 20 sexti. est enim vt AB ad BD, ita DB ad BC ex 8. eiusdem.*

H Erit & quæ ex centro circuli EFGHK rationalis. quare & diameter ipsius rationalis erit] *Quoniam enim sphęrę diameter est potentia quintupla eius, quae ex centro circuli, habebit quadratum diametri sphęrę ad quadratum eius, quae ex centro circuli proportionem eam, quã numerus habet ad numerum: & idcirco ipsi commensurabile erit. rationale autem est quadratum diametri sphęrę, cum ipsa sit rationalis. ergo & quadratum eius, quae ex centro circuli, est rationale: idcoq; ea, quae ex centro circuli, & eius diameter rationalis erit; nam quae rationali commensurabilis est, & ipsa est rationalis.* 6. decimi. 6 diffi. deci.

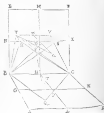
K Si autem in circulo rationalem diametrum habente pentagonum ęquilaterum describatur, erit latus pentagoni linea irrationalis, quæ minor appellatur] *Ex 11. huius.*

L Sed pentagoni EFGHK latus est icosaedri] *Illud vero ex iã dictis manifestissime cõstat.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XVII.

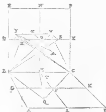
Dodecahedrum constituere, & sphæra comprehendere, qua & prędictas figuras; demonstrareque dodecahedri latus esse irrationalem lineam, quæ apotome appellatur.

Exponãtur prędicti cubi duo plana ad rectos angulos inter se se ABCD CBEF, & secetur vnumquodq; ipsorum laterum AB BC CD DA EF EB FC bifariam in punctis GHKLMNX, & GK HL MH NX iungantur. deinde secentur rectæ lineæ NO OX HP extrema, ac media ratione in RST punctis: sintque ipsorũ maiores portiones RO OS TP. & à punctis RST ad rectos angulos cubi planis erigantur RY SV TQ ad exteriores partes cubi, quæ ipsis RO OS TP ęquales ponantur; iunganturq; YB BQ QC CV VY. Dico pẽtagonum YBQCV æquilaterũ es-

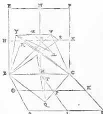


se, &

fe, & in uno plano, & præterea æquiangulum. Iungantur enim RB SB VB. & quoniam recta linea NO extrema, ac media ratione secta est in R, & OR est maior ipsius portio, erunt quadrata ex ON NR tripla quadrati ex OR æqualis autem est ON ipsi NB, & OR ipsi RY. quadrata igitur ex BN NR quadrati ex RY sunt tripla. sed quadratis ex BN NR æquale est quadratum ex BR. ergo quadratum ex BR triplum est quadrati ex RY: ac propterea quadrata ex BR RY quadrati ex RY sunt quadrupla. quadratis aût ex BR RY æquale est quadratû ex BY. ergo quadratû ex BY quadruplû est quadrati ex YR. & ob id BY est dupla ipsius YR. atq; est VY ipsius YR dupla, qm & RS est dupla ipsius RO, hoc est ipsius RY. ergo BY est æqualis YV. similiter demõstrabitur & unaquæq; ipsarû BQ QC CV utriq; BY YV æqualis. æquilaterû igitur est BYVCQ pentagonû. Dico & in uno esse plano. ducatur n. à puncto O ipsa OZ utriq; ipsarû RY SV parallela ad exteriores cubi partes. & iungantur ZH HQ. Dico ZHQ rectã lineam esse. nã cum HP extrema, ac media ratione secetur in T, & PT sit maior ipsius portio, erit ut HP ad PT, ita PT ad TH. æqualis autem est HP quidem ipsi HO, PT vero utrique ipsarum TQ OZ. est igitur ut HO ad OZ, ita QT ad TH. atque est B HO parallela ipsi TQ, utraque enim ipsarum plano BD est ad rectos angulos: TH uero est parallela OZ, quòd vtraque ipsarum sit ad rectos angulos plano BF. si autẽ C duo triangula componantur ad unum angulum, ut ZOH, HTQ, quæ duo latera 32. undec. duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera etiam sint parallela, reliqua ipsorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. ergo ZH est in directum ipsi HQ. omnis autem recta linea est in uno plano. In uno igitur plano est YBQCV pentagonum. Dico & æquiangulum. Quoniam enim recta linea NO extre D ma, ac media ratione secta est in R, & OR est maior portio, erit vt utraque NO OR ad ON, ita NO ad OR. æqualis autem est RO ipsi OS. quare ut SN ad NO, ita NO ad OS: & ob id NS extrema, ac media ratione secta est in O; & maior portio est NO. quadrata igitur ex NS SO quadrati ex ON sunt tripla, æqualis autem est ON ipsi N E B, & OS ipsi SV. ergo quadrata ex NS SV tripla sunt quadrati ex NB; ac propterea quadrata ex NS SV NB quadrati ex NB sunt quadrupla. sed quadratis ex SN NB est æquale quadratum ex BS. quadrata igitur ex BS SV, hoc est quadratum ex VB, 47 primi. quòd angulus VSB sit rectus, quadruplum est quadrati ex NB; ideoq; ipsa VB ip- 20. tertij. sius BN est dupla. est autem & BC dupla BN. ergo VB est æqualis BC. & quoniam duæ BY YV duabus BQ QC æquales sunt. & basis VB æqualis basi BC, erit angu- 8 primi. lus BYV angulo BQC æqualis. similiter ostendemus & YVC angulum æqualem angulo BQC. tres igitur anguli BQC BYV YVC inter se æquales sunt. si autem pen F tagoni æquilateri tres anguli sint æquales, pentagonum æquiangulum erit. æquiangulum igitur est pentagonum BYVCQ. ostensum est autem & æquilaterum. ergo pentagonum BYVCQ æquilaterum est, & æquiangulum. atque est in uno cubi latere BC. si igitur in unoquoque duodecim cubi laterum eadem construamus, figura solida constituetur duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis contenta. Itaque oportet ipsum & data sphæra comprehendere; demonstrareque dodecahedri latus esse irrationalem lineam, quæ apotome appellatur. producatur enim ZO, & sit ZΩ. occurrit igitur ZΩ diametro cubi, & bifariam se mutuo secant. hoc enim ostensum est in penultimo theoremate undecimi libri. secent in Ω. ergo Ω est centrum



ſphæræ, quæ cubum comprehendit, & OΩ dimidium lateris cubi. iungatur YΩ. & quoniam recta libea NS extrema, ac media ratione ſecta eſt in O, & NO eſt ipſius portio maior, erũt quadrata ex NS SO, tripla eius quod fit ex NO. æqualis aũt eſt NS ipſi ZΩ, quoniam & NO ipſi OΩ eſt æqualis, & ZO ipſi OS. ſed & OS eſt æqualis ZY, quoniã & RO. quadrata igitur ex ΩZ ZY tripla ſunt quadrati, quod fit ex NO. ſed quadratis ex ΩZ ZY æquale eſt quadratum ex YΩ. ergo quadratum ex YΩ triplum eſt quadrati ex NO. eſt autem quę ex cẽtro ſphæræ cubũ cõprehendentis poten-
G tia tripla dimidij lateris cubi. prius enim oſtenſum eſt cubum conſtituere, & ſphæra comprehendere, demõſtrareq́; ſphęrę diametrum potentia triplam eſſe lateris cubi. ſi autem tota totius, & dimidia dimidiæ. atque eſt NO dimidia lateris cubi. ergo YΩ eſt æqualis ei, quæ ex centro ſphæræ cubum comprehendentis: eſtq́ue Ω centrum ſphæræ comprehendentis cubum. quare punctum Y eſt ad ſphęrę ſuperficiem. ſimiliter demonſtrabimus & unumquemque reliquorum angulorum dodecaedri eſſe ad ſuperficiẽ ſphæræ. dodecaedrum. igitur eſt data ſphęra comprehenſum. Dico dodecaedri latus irrationalem eſſe lineam, quæ apotome appellatur. Quoniam enim recta linea NO extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt RO; erit tota NX extrema, ac media ratione ſecta, maior portio RS. nam cum ſit ut NO ad OR, ita OR ad RN & earum duplæ: partes enim eodem modo multiplicium eandem habent proportio- æquimũ.
nem, erit vt NX ad RS, ita RS ad vtramque NR SX. maior autem eſt NX, quàm RS. ergo & RS eſt maior, quàm vtraque NR SX. eſt igitur NX extrema, ac media ratione ſecta; & RS eſt ipſius maior portio. æqualis autem eſt RS ipſi YV. ergo NX extrema, ac media ratione ſecta, maior portio eſt YV. & quoniam rationalis eſt ſphæræ
H diameter, atque eſt potentia tripla lateris cubi; erit NX rationalis, quę eſt cubi latus.
K ſi autem recta linea rationalis extrema, ac media ratione ſecta fuerit, vtraque portio irrationalis eſt, quæ apotome appellatur. ergo YV, quæ eſt latus dodecaedri, irrationalis eſt, quæ apotome appellatur.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt latere cubi extrema, ac media ratione ſecto maiorem portionem eſſe dodecaedri latus.

F. C. COMMENTARIVS.

A Erunt quadrata ex ON NR tripla quadrati ex OR] *Ex 4. huius.*

B Atque eſt HO parallela ipſi TQ: vtraque enim ipſarum plano BD eſt ad rectos angulos] *Ex 6. vndecimi.*

C Reliqua ipſorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt] *Ex 32 ſexti.*

D Quoniam enim recta linea NO extrema, ac media ratione ſecta eſt in R, & OR eſt maior portio, erit vt vtraque NO OR ad ON, ita NO ad OR] *Ex 5. huius. ſi enim recta linea extrema, ac media ratione ſecetur, adyciaturq́; ipſi aequalis maiori portioni, erit tota extrema, ac media ratione ſecta, & maior portio erit ea, quae à principio recta linea. quare vt vtra*

que

que NO OR, hoc est ut tota NO unà cum maiori portione OR ad totam NO, ita est NO ad OR; sit enim tota NO maior portio, & OR minor.

Quadrata igitur ex NS SO quadrati ex ON sunt tripla] *Ex 4. huius.* E

Si autem pentagoni æquilateri tres anguli sint æquales pentagonum æquiangulum erit] *Ex 7. huius.* F

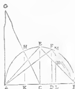
Prius enim ostensum est cubum constituere, & sphæra comprehendere] *In quinta decima huius.* G

Erit NX rationalis, quæ est cubi latus] *Nam cum sphæræ diameter sit potentia tripla lateris cubi, habebit ad ipsum proportionem, quam numerus habet ad numerum, & ipsi commensurabile erit quae autem rationali sunt commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia solum, rationales sunt, per sextam diffinitionem decimi libri.* H

Si autem recta linea rationalis extrema, ac media ratione secta fuerit, vtraque portio irrationalis est, quæ apotome appellatur] *Ex 6. huius.* K

PROBLEMA VII. PROPOSITIO. XVIII.

Latera quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

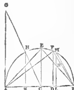


Exponatur datæ sphæræ diameter A B, & secetur in C quidem, ita vt AC sit æqualis CB; in D vero ita, vt A D ipsius D B sit dupla: describaturq; in AB semicirculus AEB. & à punctis CD ipsi AD ad rectos angulos ducitur CE DF: & A F FB EB iungantur. Itaq; quoniam A D dupla est ipsius DB, erit AB ipsius BD tripla: & per conuersionem rationis B A sesquialtera ipsius A D. vt autem B A ad A D, ita quadratum ex B A ad quadratum ex A F. est enim triangulum A F B triangulo AFD æquiangulum. ergo quadratum ex BA sesquialterum est quadrati ex AF. est autem & sphæræ diameter potentia sesquialtera lateris pyramidis; estque A B sphæræ diameter. ergo A F pyramidis lateri est æqualis. Rursus quoniam AD dupla est DB, erit AB ipsius BD tripla. Sed ut AB ad BD, ita quadratum ex AB ad quadratum ex FB. quadratum igitur ex AB triplum est quadrati ex BF. est autem & sphæræ diameter potentia tripla lateris cubi: atque est AB sphæræ diameter. ergo BF est cubi latus. & quoniam AC est æqualis CB, erit AB ipsius BC dupla. ut autem AB ad BC, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BE. quadratum igitur ex AB quadrati ex BE est duplum. atque est sphæræ diameter potentia dupla lateris octaedri: & AB est diameter datæ sphæræ. quare BE est octaedri latus. ducatur à puncto A ipsi AB ad rectos angulos AG: ponaturq; AG æqualis AB: & iuncta GC a puncto H ad AB perpendicularis ducatur HK. quoniam igitur AG dupla est ipsius AC; etenim GA est æqualis AB, ut autem GA ad AC, ita HK ad KC: erit HK ipsius KC dupla. ergo quadratum ex HK quadruplum est quadrati ex KC. quadrata igitur ex HK KC, quod est quadratum ex HC quintuplum est quadrati ex K C. æqualis autem est H C ipsi CB. ergo quadratum ex B C quintuplum est quadrati ex C K. & quoniam A B est dupla ipsius BC, quarum AD dupla est DB; erit reliqua B D dupla ipsius D C. ideoque B C ipsius CD est tripla. nonuplum igitur est quadratum ex BC quadrati ex CD. sed quadratum ex B C quadrati ex C K est quintuplum. ergo quadratum ex K C maius est quadrato ex C D. & K C ipsa C D maior. ponatur ipsi K C æqualis C L; & a puncto L ipsi A B ad rectos angulos ducatur L M, & M B iungatur. & quoniam quadratum ex B C quintuplum est quadrati ex K C; atque est ipsius quidem C B dupla B A; ipsius uero C K dupla K L. erit quadratum ex A B qua-

8 sexti.
13. huius.
15. huius.
14 huius.
4 sexti.
20 sexti.
19 quinti.
20. sexti.
15 quinti.

Corol 16 hu ius. Corol. 16 hu ius. drati ex KL quintuplum. sed & sphærę diameter potentia quintupla est eius, quæ ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur. atque est AB diameter sphęræ. ergo KL est hexagoni latus dicti circuli. Præterea quoniam sphærę diameter composita est ex latere hexagoni, & duobus lateribus decagoni in dicto circulo descriptoru; atque est AB quidem diameter sphæræ, KL vero hexagoni latus, & AK est ęqualis LB: erit vtraque ipsarum AK LB latus decagoni descripti in eodem circulo, à quo 14 tertij. icosaedrum describitur. & quoniam decagoni est L B, hexagoni vero M L; est enim æqualis ipsi KL, quod & ipsi HK; namque æqualiter à centro distant; & est vtraque 10 huius. HK KL dupla ipsius HC: erit MB latus pentagoni. quod autem pentagoni idē est, 16 huius & icosaedri. ergo MB est icosaedri latus. & quoniam FB est latus cubi, secetur extre Ex corol. antecedentis. ma, ac media ratione in N, & BN sit maior portio; erit NB dodecaedri latus. quòd cum sphæræ diameter ostensa sit ipsius quidem A F lateris pyramidis potentia sesquialtera; ipsius vero BE octaedri potētia dupla, & ipsius FB cubi potentia tripla, quarum partium sphæræ diameter potentia est sex, earum pyramidis quidem latus erit quattuor; octaedri vero trium, & cubi duarū. ergo latus pyramidis octaedri quidem lateris potentia est sesquitertium, cubi vero potentia duplum: & octaedri latus lateris cubi potentia est sesquialterum. latera igitur trium figurarum iam dicta, videlicet pyramidis, octaedri, & cubi inter se sunt in proportionibus rationalibus: reliqua vero duo, dico autem icosaedri, & dodecaedri, neque inter se, neque ad iam dicta sunt in rationalibus proportionibus, nempe minor, & apotome.

At vero M B latus icosaedri maius esse dodecaedri latere B N, ita demonstrabimus.



8 sexti Quoniam enim triangulum FDB ęquiangulum est triangulo FAB, erit vt D B ad B F, ita F B ad B A: & cum tres rectæ lineæ proportio- Cor. 20. sexti. nales sint, vt prima ad tertiam, ita erit quadratum primæ ad quadratum secundę. est igitur vt DB ad BA, ita quadratum ex DB ad quadratum ex BF: & conuertendo vt A B ad B D, ita quadratum ex FB ad quadratum ex BD. tripla autem est AB ipsius BD. ergo quadratum ex 20 sexti. FB quadrati ex BD est triplum. atque est quadratum ex AD quadruplum quadrati ex DB; est. n. AD ipsius DB dupla. ergo quadratū ex AD maius est quadrato ex FB; propterea quod AD quàm FB est maior. multo igitur maior est 9 huius. AL quàm FB. & ipsa quidem AL extrema, ac media ratione secta, maior portio est LK, quoniam KL est hexagoni latus, & KA decagoni. ipsa uero FB extrema, ac media ratione secta, maior portio est BN. maior igitur est KL quàm BN, est autem KL 19. primi ipsi LM æqualis. ergo LM quàm B N est maior. sed B M est maior quàm ML. ergo MB, quę est latus icosaedri maior erit ipsa BN, dodecaedri latere.

ALITER. Quoniam enim AD dupla est DB, erit AB ipsius BD tripla. ut au- Cor 20 sex. tem AB ad BD, ita quadratum ex AB ad quadratum ex BF, propterea quod trian- 8 sexti. gulum FAB triangulo FBD ęquiangulum est. triplum igitur est quadratum ex AB quadrati ex BF. Ostensum est autem quadratum ex AB quadrati ex KL quintuplū. ergo quinque quadrata ex KL tribus quadratis ex BF sunt æqualia. sed tria ex FB maiora sunt quàm sex eorum, quæ fiunt ex BN. & quinque igitur ex KL, quàm sex eorum, quæ ex BN sunt maiora. ergo & unum ex KL maius est vno ex BN; ac propterea KL quàm BN maior: æqualis autem KL ipsi LM. maior igitur est LM, quam BN; multo igitur MB quàm BN est maior. quod demonstrare oportebat.

Tria vero, ex FB maiora esse, quàm sex earum, quæ ex BN, hoc modo ostendemus.

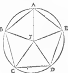
Quoniam

Quoniam enim maior est BN quàm NF, erit rectangulum, quod continetur FB BN maius contento BF FN. quod igitur continetur FB BN vnà cum contento BF FN maius est, quàm duplum eius, quod BF FN continetur. sed quod quidem continetur FB BN vnà cum contento BF FN est quadratum ex FB. contentum autem BF FN est æquale quadrato ex BN; etenim FB extrema, ac media ratione secta est in N, & quod extremis continetur est æquale ei, quod fit à media. quadratum igitur ex FB maius est, quàm duplum quadrati ex BN. quare vnum ex FB duobus ex BN est maius; & idcirco tria, quæ ex FB maiora sunt, quam sex eorum, quæ fiunt ex BN. quod demonstrare oportebat. 2.secundi. 17.sexti.

Dico præter iam dictas quinque figuras non constitui aliam figuram, quæ æquilateris, & æquiangulis inter se equalibus contineatur.

Ex duobus enim triangulis, vel ex alijs duobus planis non constituetur angulus solidus. ex tribus autem triangulis cõstituitur angulus pyramidis, ex quattuor octaedri, ex quinque icosaedri: at ex sex triangulis æquilateris, & æquiãgulis ad vnum punctum constitutis, non est angulus solidus. cum enim trianguli æquilateri angulus sit duæ tertiæ recti, erunt sex quattor rectis equales. quod fieri non potest. omnis enim solidus angulus minoribus, quàm quattuor rectis continetur. Eadem ratione neque ex pluribus, quàm sex angulis planis constituitur solidus angulus. itaque quadratis tribus angulus cubi continetur. ut autem quattuor contineatur fieri non potest; essent enim rursus quattuor recti. pentagonis autẽ equilateris, & equiãgulis, tribus quidem continetur angulus dodecaedri, sed vt quattuor contineatur fieri non potest. nam cum pentagoni equilateri angulus constet ex recto, & quinta rect parte, erunt quattuor anguli quattuor rectis maiores. quod fieri non potest. neque uero alijs polygonis figuris constituetur angulus solidus propter absurda, quæ consequuntur. non igitur preter iam dictas figuras alia figura solida constituitur equilateris, & equiangulis contenta. quod oportebat demonstrare. 21 undecimi

Verum enim vero pentagoni æquilateri, & æquianguli angulũ constare ex recto, & recti quinta parte, hoc modo ostendemus.



Sit enim pentagonum equilaterum, & equiangulum ABCDE, & circa ipsum circulus ABCDE describatur: sumaturque ipsius centrum, quod sit F, & iungantur FA FB FC FD FE, quæ pẽtagoni ABCDE angulos bifariam secabunt. & quoniam quinque anguli, qui ad F quattuor rectis equales sunt, & inter se sũt eqnales, erit unus ipsorum, ut AFB unius recti, dempta quinta recti parte. ergo reliqui FAB ABF sunt unius recti, & quintæ partis. equalis aũt est angulus FBA angulo FBC. & totus igitur ABC pentagoni angulus constat ex recto, & quinta recti parte. quod oportebat demonstrare.

TERTIIDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER QVARTVSDECIMVS ET SOLIDORVM QVARTVS.
vt quidam arbitrantur.

VT VERO ALII HYPSICLIS ALEXANDRINI DE QVINQVE CORPORIBVS LIBER PRIMVS.

Cum Commentarijs Federici Commandini Vrbinatis.



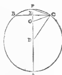


BASILIDES tyrius, Protarche, cum alexandriam venisset, patri que nostro ob mathematicarum disciplinarum societatem commendatus fuisset, ipso peregrinationis tempore, cum eo diu, multumque uersatus est. & aliquando expendentes id quod ab Apollonio scriptum est de dodecaedri, & icosaedri in eadem sphæra descriptorum comparatione, quam scilicet hęc inter se proportionem habeant, arbitrati sunt ea non recte tradidisse Apollonium; quæ à se emendata, ut pater meus dicebat, memoriæ, ac litteris prodiderunt. Ego vero postea incidi in aliũ librum ab Apollonio editum, qui propositę rei demonstrationem recte complectebatur; atque ex eius problematis indagatione magnam cœpi voluptatem. Illud quidem, quod ab Apollonio editũ est, quilibet facile perspicere potest, cũ in omnium manibus versetur. quod autem nos postea summo, quantum coniici licet, studio lucubrasse videmur, id litteris mandatum tibi dedicandũ censuimus, vtpote qui ob excellentem in omnibus disciplinis mathematicis, & præsertim in geometria cognitionem prudenter iudices ea, quę dicturi sumus: ob eam uero, quę tibi cum patre meo fuit consuetudinem, & ob beneuolentiam, qua nos complecteris, tractationem ipsam libenter audias. sed iam tempus est ut procemio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

THEO-

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Quæ à centro circuli alicuius ad pentagoni latus in eodem circulo descripti, perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusque & hexagoni lateris, & decagoni, quæ in eodem circulo describuntur.



Sit circulus ABC, & in eo describatur pentagoni æqui
lateri latus BC; sumaturque circuli centrum D: & ad BC
ducta DE perpendiculari, producatur in directum ipsi
DE recta linea EF. Dico DE dimidiam esse vtriusque &
hexagoni lateris, & decagoni in eodem circulo descrip-
torum. Iungantur enim DC CF: ponaturque EG ipsi E
F æqualis: & à puncto G ad C ducatur GC. Quoniam igi
tur circumferentia totius circuli quintupla est circumfe-
rentiæ BFC: atque est totius quidem circuli circumferen
tiæ dimidia ACF, ipsius vero BFC dimidia FC, erit & cir
cumferentia ACF quintupla circumferentiæ FC. ideoq́ A
circumferentia AC ipsius CF est quadrupla. vt autem A B
C ad CF, ita est ADC angulus ad angulum CDF. angulus igitur ADC quadruplus C
est anguli CDF. duplus autem est angulus ADC anguli EFC. ergo & angulus EFC
anguli GDC est duplus. est autem & EFC angulus æqualis angulo EGC. duplus igi D
tur est angulus EGC anguli GDC: & idcirco DG ipsi GC est æqualis. sed GC æqua E
lis est CF. ergo & DG ipsi CF. est autem & GE æqualis EF. æqualis igitur est DE
utrique EF FC. communis apponatur DE. vtraque igitur DF FC ipsius DE
est dupla: atque est DF quidem hexagoni lateri æqualis; FC vero æqualis lateri
decagoni. ergo DE est dimidia & lateris hexagoni, & decagoni in eodem circulo
descriptorum.

Itaque manifestum est ex theorematibus tertij decimi libri eã, F
quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam esse eius, quæ ex centro circuli.

F. C. COMMENTARIVS.

Erit & circumferentia ACF quintupla circumferentiæ FC] *Ex 15 quinti.* A

Vt autem AC ad CF, ita est ADC angulus ad angulum CDF] *Ex ultima sexti.* B

Duplus autem est angulus ADC anguli EFC] *Ex 20 tertij.* C

Est autem & EFC angulus æqualis angulo EGC] *Posita enim est FE aequalis EG: & EC est vtrique communis: anguliq́ ad E recti. basis igitur FC est aequalis basi CG, & triangulum triangulo aequale; & reliqui anguli reliquis angulis aequales, quibus aequalia latera subtenduntur ex 4. primi.* D

Et idcirco DG ipsi GC est æqualis] *Nam cum angulus EGC exterior sit aequalis duobus interioribus, & oppositis GDC GCD, sitq́ duplus ipsius GDC, erit angulus GCD aequalis angulo GDC: & ob id latus DG lateri GC aequale.* E 32. primi. 6. primi.

Itaque manifestum est ex theorematibus tertijdecimi libri eam, quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur, dimidiam esse eius, quæ ex centro circuli. F

Sit circulus ABC, & in ipso describatur triangulum aequilaterum ABC; sumptoq́ circuli centro D, ab eo ad BC agatur perpendicularis DF, & ad E producatur. Dico DF dimidiam esse ipsius DE. iungantur enim DB BE. & quoniam BE est latus hexagoni, quod ex 12 tertij decimi libri apparet: & ideo aequalis ei, quae ex centro: erunt DB BE inter se aequales, & ipsarum quadra-

ta

47 primi *ta aequalia. sed quadratum quidem ex DB est aequale quadratis ex EF FD. quadratum vero ex BE aequale quadratis ex BF FE. ergo quadrata ex BF FD quadratis ex BF FE sunt aequalia; & dempto communi quadrato ex BF, erit quadratum ex DF aequale quadrato ex FE: ac propterea recta linea DF ipsi FE est equalis, & DF ipsius DE dimidia. quod demonstrare oportebat.*



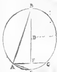
THEOREMA II. PROPOSITIO. II.

Idem circulus comprehendit dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadē sphæra descriptorum.

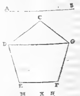
Hoc autem conscribitur ab Aristero in libro de quinque figurarum comparatione; & ab Apollonio in secunda editione comparationis dodecaedri cum icosaedro, videlicet vt dodecaedri superficies est ad superficiem icosaedri, ita esse & ipsum dodecaedrum ad icosaedrum; quod perpendicularis ducta à centro sphæræ ad dodecaedri pentagonum eadem sit, quæ ad icosaedri triangulum ducitur. Itaque demōstrandum est eundem circulum comprehendere, & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum, hoc præmisso.

Si in circulo pentagonum ęquilaterum describatur, quod fit ex latere pentagoni, & ex recta linea, quæ duobus pentagoni lateribus subtenditur, quintuplum erit eius, quod fit ab ea, quę ex circuli centro.

Sit ABC circulus, & in eo pentagoni latus AC: sumatur que circuli centrum D, & ad AC perpendicularis ducta DF in puncta BE producatur, & iungatur AB. Dico quadrata ex BA AC quadrati ex DE quintupla esse. iuncta enim AE, est decagoni latus. & quoniā BE dupla est ipsius ED;
47 primi erit quadratum ex BE quadrati ex ED quadruplum. quadrato autem ex BE æqualia sunt quadrata ex BA AE. ergo quadrata ex BA AE quadrupla sunt quadrati ex ED: & ob id quadrata ex BA AE & ED sunt quintupla quadrati
A ti ex ED. sed quadrata ex DE EA æqualia sunt quadrato ex AC. quadrata igitur ex BA AC quadrati ex ED sunt quintupla.



Hoc demonstrato, demonstrandum est eundem circulum comprehendere & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum.



Exponatur sphæræ diameter AB, & in ipsa sphæra describatur dodecaedrum, & icosaedrū: sitque unum quidem dodecaedri pentagonum CDEFG: icosaedri uero triangulum KLH. Dico eundem circulum comprehendere pentagonum CDEFG, & KLH triangulum. Iungatur D
B G. ergo DG est cubi latus. & exponatur recta linea quædam MN, ita ut quadratum ex AB quadrati ex MN sit quintuplum. est autem & sphæ-

ra diameter potentia quintupla eius, quæ est ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur. secetur MN extrema, ac media ratione in X: & sit MX portio maior. ergo MX est decagoni latus. & quoniam quadratum ex AB quintuplum est quadrati ex MN, & triplũ quadrati ex DG, erunt tria quadrata ex DG quadratis quinque ex MN ęqualia. ut autem tria quadrata ex DG ad quadrata quinque ex MN, ita tria quadrata ex CG ad quinque quadrata ex MX. tria igitur quadrata ex CG quinque quadratis ex MX sunt æqualia. quinque autẽ quadrata ex KL æqualia sũt quinq; quadratis ex MN, & quinque quadratis ex MX. ergo quinq; quadrata ex KL tribus quadratis ex DG, & tribus quadratis ex GC sunt æqualia. sed tria quadrata ex DG, & tria quadrata ex GC ęqualia sunt quindecim quadratis eius, quæ ex centro circuli descripti circa pentagonum CDEFG. antea enim demõstratum est quadrata ex DG GC quintupla esse quadrati eius, quæ est ex centro circuli circa pentagonum CDEFG descripti. quinque autem quadrata ex KL sunt æqualia quindecim quadratis eius, quę est ex centro circuli descripti circa triangulũ KLH. etenim demonstratum est quadratum ex KL triplum esse quadrati eius, quæ est ex centro circuli circa triangulum KLH descripti. quindecim igitur quadrata eius, quę est ex centro circuli quindecim quadratis eius, quæ est ex centro circuli sunt ęqualia; ac propterea diameter diametro est æqualis. ergo idem circulus comprehendit & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum.

C D E F G H

F. C. COMMENTARIVS.

A Sed quadrata ex DE EA æqualia sunt quadrato ex AC] *Ex decima tertij decimi.*

B Ergo DG est cubi latus] *Secta enim DG extrema DG extrema, ac media ratione, maior portio erit aequalis lateri pentagoni CD ex 8 tertydecim. si aũt latus cubi extrema, ac media rõne secetur, maior portio erit dodecaedri latus, ex corollario 17 tertydecimi. sed CD ponitur latus dodecaedri. ergo DG est cubi latus. nam si duę rectę lineę extrema, ac media ratione secentur, erit tota ad totam, vt portio maior ad maiorem portionem. quod ad finem huius libri demonstrabitur.*

C Secetur MN extrema, ac media ratione in X, & sit MX portio maior. ergo MX est decagoni latus] *Ex ante dictis sequitur MN esse eam, quae ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur, hoc est hexagoni latus. si autem hexagoni latus extrema, ac media ratione secetur, erit maior portio latus decagoni. quod nos supra ad nonam tertij decimi demonstrauimus.*

D Et triplum quadrati ex DG] *Ex 15 tertij decimi libri.*

E Vt autem tria quadrata ex DG ad quadrata quinque ex MN, ita tria quadrata ex CG ad quinque quadrata ex MX] *Est enim CG maior portio ipsius DG extrema, ac media ratione sectae. & similiter MX maior portio ipsius MN: & vt tota DG ad totam MN, ita est ipsius DG maior portio ad maiorem portionem ipsius MN: quod deinceps demonstrabitur.*

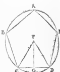
F Quinque autem quadrata ex KL ęqualia sunt & quinq; quadratis ex MN, & quinque quadratis ex MX] *Ex 10 tertij decimi. est enim KL latus pentagoni descripti in circulo, à quo icosaedrum describitur, & cuius ea, quae ex centro est MN.*

G Antea enim demonstratum est] *Videlicet proxime ad principium huius theorematis.*

H Etenim demonstratum est quadratum ex KL triplum esse quadrati eius, quę ex centro circuli] *In duodecima tertij decimi libri.*

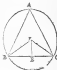
THEOREMA III. PROPOSITIO. III.

Si fuerit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, & circa ipsum circulus; à centro autem ad vnum latus perpendicularis ducta fuerit: quod tricies vno latere, & perpendiculari continetur superficiei dodecaedri est æquale.



Sit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & circa ipsum circulus: sumatur autem centrum F, & ab F ad CD perpendicularis ducatur FG. Dico quod tricies CD FG continetur duodecim pentagonis ABCDE æquale esse.
A Iungatur enim CF FD. & quoniam quod CD FG continetur duplum est trianguli FCD, erit quod quinquies continetur CD FG decem
B triangulis æquale. decem autem triangula duo pentagona sunt, & eorum sextupla æqualia. ergo quod tricies CD FG continetur est æquale duodecim pentagonis. sed duodecim pẽtagona sunt dodecaedri superficies. ergo quod tricies cõtinetur CD FG superficiei dodecaedri æquale erit.

Similiter demonstrabimus, si fuerit triangulum æquilaterum, vt ABC, & circa ipsum circulus, cuius centrum D, & ab eo perpendicularis DE, quod tricies BC DE continetur superficiei icosaedri æquale esse.



Quoniam enim rursus quod BC DE continetur duplum est trianguli DBC, erunt duo triangula æqualia ei, quod cõtinetur BC DE, & eorum tripla. sex igitur triangula DBC æqualia sunt tribus, quæ BC DE continentur. at sex triangula vt DBC
C sunt æqualia duobus ABC triangulis. & eorum decupla. ergo quod tricies BC DE continetur est æquale viginti triangulis ABC, hoc est icosaedri su-
D perficiei. erit igitur vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur.

COROLLARIVM.

Ex hoc perspicuum est vt dodecaedri superficies ad superficiẽ icosaedri, ita esse quod continetur latere pentagoni, & recta linea, quæ à centro circuli circa pentagonum descripti, in ipsum latus perpendicularis ducitur, ad id, quod continetur latere icosaedri, & perpendiculari, quæ à centro circuli circa triangulum descripti in ipsum latus ducta fuerit, nimirum dodecaedro, & icosaedro in eadem sphæra descriptis.

F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam quod CD FG continetur duplum est trianguli FCD] *Ex 41 primi, ex quo sequitur duo triangula FCD æqualia esse ei, quod CD FG continetur.*

B Decem autem triangula duo pentagona sunt] *Vnumquodque enim pentagonum quinque eiusmodi triangula continet.*

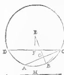
C At sex triangula vt DBC sunt æqualia duobus ABC triangulis] *Nam triangulum ABC ex tribus triangulis DBC constat.*

D Erit igitur ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur] *Quoniam enim quod tricies cõtinetur CD FG est aequale superficiei dodecaedri; & quod tricies continetur BC DE æquale superficiei icosaedri,*

saedri, erit vt superficies dodecaedri ad id, quod tricies continetur CD FG, ita superficies icosaedri ad id. quod tricies continetur BC DE: & permutando vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita quod tricies continetur CD FG ad id, quod tricies BC DE continetur. sed vt quod tricies continetur CD FG ad id, quod tricies BC DE continetur, ita quod semel continetur CD FG ad id, quod semel BC DE continetur ex 15 quinti. vt igitur dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita quod continetur CD FG ad id, quod BC DE continetur.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

Hoc probato demonstrandum erit, vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse latus cubi ad icosaedri latus.

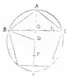


Exponatur circulus ABC comprehendens & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum: & in ipso describatur trianguli quidem equilateri latus CD pentagoni vero AC: sumptoq; circuli centro E, ab eo ad DC CA perpendiculares ducantur EF EG, & producatur in directum ipsi EG recta linea GB: iungaturq; BC, & exponatur cubi latus H. Dico ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse H ad ipsam CD. quoniam enim vtraque simul EB BC extrema, ac media ratione secta, maior portio est EB, & est vtriusque quidem dimidia EG, ipsius vero BE dimidia EF. erit & ipsius EG extrema, ac media ratione sectæ maior portio EF. est autem & ipsius H extrema, ac media ratione sectę maior portio CA, vt in dodecaedro ostensum fuit. ut igitur H ad CA, ita est GE ad EF; ideòque contentum H FE est ęquale ei, quod CA EG continetur. & quoniam est vt H ad CD, ita quod cõtinetur H EF ad contentum CD EF; ei uero, quod H EF continetur est ęquale cõtentum CA EG· erit vt H ad CD, ita contentum CA EG ad id, quod CD EF continetur, hoc est vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita H ad CD.

A B C D E F G H K L

. Aliter demonstrare ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse latus cubi ad icosaedri latus, hoc pręmisso.

Sit circulus ABC, & in eo describantur ęquilateri pentagoni latera AB AC: & iungatur BC; sumatur autem circuli centrum D, & iuncta AD producatur ad E: ponaturq; ipsius AD dimidia DF, & GC ipsius CH tripla. Dico quod AF BH continetur pentagono ęquale esse.

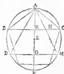


Iungatur enim BD. & quoniam AD dupla est ipsius DF, erit FA ipsius AD sesquialtera. rursus quoniam GC tripla est ipsius CH. erit GH ipsius HC dupla. sesquialtera igitur est CG ipsius GH. quare vt FA ad AD, ita CG ad GH. ideoq; contentũ AF GH est æquale ei, quod AD CG cõtinetur: sed CG est æqualis GB. ergo contentum AD BG est æquale ei, quod AF GH continetur. contentum autem AD BG est duo triangula, ut ABD. quod igitur AF GH continetur & duo triangula ABD. ergo quinque rectangula contenta AF GH decem sunt triangula. decem autem triangula duo pentagona sunt. quinque igitur rectangu'a

16 exti.

M

contenta AF GH duobus pentagonis sunt æqualia. & quoniam GH est dupla HC, erit contentum AF GH duplum eius, quod AF HC continetur. ergo duo rectangula contenta AF HC sunt æqualia vni, quod continetur AF GH, & eorum quintupla. decem igitur rectangula contenta AF HC sunt æqualia quinque, quę AF GH continentur, hoc est duobus pentagonis. ergo quinque contenta AF HC vni pen-
N tagono sunt æqualia. quinque autem contenta AF HC sunt æqualia ei, quod continetur AF BH, quoniam BH quintupla est ipsius HC, & communis altitudo est AF. quod igitur AF BH continetur uni pentagono est ęquale.



Hoe demonstrato nunc exponatur circulus cō-
prehendens & dodecaedri pentagonum, & icosae-
dri triangulum in eadem sphęra descriptorum; &
in circulo ABC describantur æquilateri pentagoni
latera BA AC: & iungatur BC. sumatur præterea
circuli centrum E, & iuncta A E ad F producatur:
sitq; AE quidem dupla ipsius EG, KC vero ipsius
CH tripla. & per G ipsi AF ad rectos angulos du-
O catur DM. ergo DM est latus trianguli æquilateri;
P & æquilaterum est ADM triangulum. & quoniam
Q rectangulum quidem contentum AG BH est ęqua
le pentagono, contentum vero AGD æquale triangulo ADM; erit vt rectangulum
R contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita pentagonum ad triangulum. vt au
S tem rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita BH ad DG. & vt
igitur duodecim BH ad viginti DG, ita duodecim pentagona ad viginti triangu-
T la, hoc est dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri. & duodecim quidē BH
sunt decem B C: etenim BH quintupla est ipsius H C; & B C ipsius C H sextupla:
ideoq; duodecim BH sunt æquales decem B C: viginti autem DG sunt decem DM;
V dupla enim est D M ipsius D G. vt igitur decem BC ad decem DM, hoc est vt BC
X ad DM, ita dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri. atque est BC quidem
cubi latus, DM vero latus icosaedri. & vt igitur dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita BC ad DM, hoc est cubi latus ad latus icosaedri.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quoniam enim vtraque simul EB BC extrema, ac media ratione secta maior portio est EB] *Ex nona tertydecimi.*

B Et est vtriusque dimidia EG] *Ex prima huius.*

C Ipsius vero BE dimidia EF] *Ex ys, quae nos demonstrauimus ad finem primae huius.*

D Erit & ipsius EF extrema, ac media ratione sectæ maior portio EF] *Ex 15 quinti.*

E Est autem & ipsius H extrema, ac media ratione sectæ maior portio CA, vt in dodecaedro ostensum fuit] *In 17 tertydecimi.*

F Vt igitur H ad CA, ita est GE ad EF.] *Hoc autem ita esse ad finem huius libri demonstrabitur.*

G Ideoque contentum H FE est ęquale ei, quod CA EG continetur] *Ex 16 sexti.*

H Et quoniam est vt H ad CD, ita quod continetur H EF ad contentum CD EF] *Ex prima sexti.*

K Ei vero quod H EF continetur est æquale contentum CA EG] *Quod proxime demonstratum fuit.*

L Hoc est vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita H ad CD] *Superius enim demonstratum est vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse quod continetur CA EG ad id, quod CD EF continetur.*

M Contentum autem AD BG est duo triangula vt ABD] *Hoc est contentum AD BG est aequale duobus triangulis ABD. est enim trianguli ABD duplum ex 41 primi libri.*

N Quinque autem contenta AF HC sunt ęqualia ei, quod continetur AF BH, quoniam BH est quintupla ipsius HC: & communis altitudo est AF] *Ex prima sexti.*

Ergo DM est latus trianguli æquilateri] *Perpendicularis enim ducta à centro circuli ad* O
trianguli aequilateri latus est dimidia eius, quae ex circuli centro, ut nos demonstrabimus ad finem primae huius.

Et quoniam rectangulum quidem contentum AG BH est æquale pentagono] P
Ex iis, quae proxime demonstrauit.

Contentum vero AGD æquale triangulo ADM] *Ex demonstratis in 42 primi.* Q

Vt autem rectangulum contentum AG BH ad rectangulum AGD, ita BH ad R
DG] *Parallelogramma enim, quae eandem habent altitudinem inter se sunt vt bases, ex prima sexti.*

Et vt igitur duodecim BH ad uiginti DG, ita duodecim pentagona ad uiginti S
triangula] *Sequitur enim ex antedictis vt BH ad DG, ita esse pentagonum ad triangulum.*

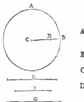
Et duodecim quidem BH sunt decem BC, etenim BH quintupla est ipsius HC, T
& BC ipsius CH sextupla] *Quoniam enim BH est quintupla ipsius HC, & BC est eiusdem HC sextupla, habebit HB ad BC proportionem eam, quam habet quinque ad sex. sed quinque multiplicans duodecim producit 60, & sex multiplicans decem producit similiter 60. ergo duodecim BH sunt aequales decem BC.*

Hoc est vt BC ad DM] *Ex 15 quinti.* V

Atque est BC quidem cubi latus] *Hoc à nobis superius demonstratū est in secundā huius.* X

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Ostendendum est & qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, quam proportionem habet potens quadratum totius & quadratum maioris portionis ad eam, quę potest quadratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icosaedri.



Sit circulus AB comprehendens & dodecaedri
pentagonum & icosaedri triangulum in eadē sphæ-
ra descriptorum: sumaturque circuli centrum C; &
& ab eo producatur recta linea vtcumque CB: & se-
cetur extrema, ac media ratione in D, ita vt CD sit
maior portio. quare CD est latus decagoni in eodē A
circulo descripti. exponatur icosaedri latus E, dode
caedri F, & cubi G. ergo E est trianguli æquilateri
latus, F pentagoni in eodem circulo descripti: atque B
est F ipsius G maior portio. & quoniam E est æqua-
lis lateri trianguli ęquilateri: trianguli autem ęqui- C
lateri latus est potentia triplum ipsius BC. ergo qua
dratum ex E quadrati ex BC est triplum. suntq; qua D
drata ex CB BD quadrati ex CD tripla, & permutā
do. vt igitur quadratum ex E ad quadrata ex CB B
D, ita quadratum ex BC ad quadratum ex CD. sed
vt quadratum ex BC ad quadratum ex CD, ita est quadratum ex G ad quadratum
ex F, est enim F maior portio ipsius G. & ut igitur quadratum ex E, ad quadrata ex
CB BD, ita quadratum ex G ad quadratum ex F: & permutando; conuertendoque.
ergo vt quadratum ex G ad quadratum ex E, ita quadratum ex F ad quadrata ex C
B BD. quadrato autem ex F ęqualia sunt quæ ex BC CD quadrata; etenim latus E
pentagoni potest & hexagoni, & decagoni latus. ut igitur quadratum ex G ad qua-
dratum ex E, ita quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD. sed vt quadrata ex F
BC CD ad quadrata ex CB BD, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratio-
ne secta, quadratum totius, & maioris portionis ad quadratum totius, & minoris
portionis. & ut igitur quadratum ex G ad quadratum ex E, ita qualibet recta linea
extrema

extrema, ac media ratione secta quadratum totius & maioris portionis ad quadratum totius, & minoris portionis. atque est G quidem cubi latus, E vero icosaedri. si igitur recta linea extrema, ac media ratione secetur, erit vt potens totam & maiorẽ portionem ad eam, quæ potest totam & minorem portionem, ita cubi latus ad latus icosaedri, in eadem sphæra descriptorum.

F. C. COMMENTARIVS.

A Quare CD est latus decagoni] *Si enim latus hexagoni extrema, ac media ratione secetur maior portio est decagoni latus, in eodem circulo descripti, vt nos supra demonstrauimus ad nonam tertydecimi.*

B Atque est F ipsius G maior portio] *Ex corollario 17 tertydecim, nimirum ipsa G extrema, ac media ratione secta.*

C Trianguli autem æquilateri latus est potentia triplum ipsius BC] *Ex duodecima tertydecimi.*

D Suntque quadrata ex CB BD quadrati ex CD tripla] *Ex 4. tertydecimi.*

E Etenim latus pẽtagoni põt & hexagoni & decagoni latus] *Ex decima tertydecimi.*

F Sed vt quadrata ex BC CD ad quadrata ex CB BD, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta quadratum totius, & maioris portionis ad quadratũ totius & minoris portionis] *Grecus codex corruptus est qui sic hẽt* ὡς δ' ἄρα τὸ ἀπὸ ἡ πρὸς τὸ ἀπὸ ε, οὕτω τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γδ β. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ βγ δ πρὸς τὰ ἀπὸ γβ, οὕτως εὐθείας ἧς δήποτ' οὖν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. corrige ὡς δ' ἄρα τὸ ἀπὸ ἡ πρὸς τὸ ἀπὸ ε, οὕτω τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γβ βδ. ὡς δὲ τὰ ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γβ βδ, οὕτως εὐθείας ἧς δήποτ' οὖν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. & ita corrige paulo post. etenim hæ uoces ἡ δυναμένη. & τὴν δυναμένην hoc loco superuacaneæ sunt.

THEOREMA VI. PROPOSITIO. VI.

Ostendendum nunc est vt latus cubi ad icosaedri latus, ita esse A dodecaedri solidum ad solidum icosaedri.

2 huius. Quoniam enim æquales circuli comprehendunt & dodecaedri pentagonum, & A icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum; in sphæris autem ęquales circuli æqualiter à centro distant. nam quę à centro sphæræ ad plana circulorum per- B pendiculares ducuntur & æquales sunt, & in centra circulorum cadunt. ergo quæ à centro sphæræ ducuntur ad centrum circuli comprehendentis & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum æquales sunt, videlicet perpendiculares ipsæ: & ob id pyramides, quę bases habent dodecaedri pentagona, & icosaedri triangula ę- C que altę sunt. pyramides autem æque altæ inter se sunt vti bases. vt igitur pentagonum ad triangulum ita pyramis, cuius basis est dodecaedri pentagonum, & vertex centrum sphęræ ad pyramidem, cuius basis est icosaedri triangulum, vertex autem sphæræ centrum. ergo & vt duodecim pentagona ad uiginti triangula, ita duodecim pyramides pentagonales bases habentes ad viginti pyramides, quæ triangulares habent bases. sed duodecim pentagona sunt dodecaedri superficies, & uiginti triangula superficies icosaedri. est igitur vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita duodecim pyramides pentagonales bases habentes ad viginti pyramides, quę triangulares bases habent. & duodecim pyramides pentagonales bases habentes sunt dodecaedri solidum: uiginti autem pyramides, quę triangulares bases sunt solidum icosaedri. quare & vt dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita solidum dodecaedri ad icosaedri solidum. ut autem dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita ostensum est esse latus cubi ad icosaedri latus & igitur

igitur latus cubi ad icosaedri latus, ita dodecaedri solidum ad solidum icosaedri.

F. C. COMMENTARIVS.

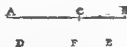
In sphæris autem æquales circuli æqualiter à centro distant] *Ex 6. propositione primi libri sphæricorum Theodosii.* A

Et in centra circulorum cadunt] *Ex 2 corollario primae eiusdẽ libri sphæricorũ Theodosii.* B

Pyramides autem æque altæ sunt inter se, vt bases] *Ex quinta & sexta duodecimi.* C

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

At vero duas rectas lineas si extrema, ac media ratione sectæ fuerint, in subiecta esse anologia, ita demonstrabimus.



Secetur enim AB extrema, ac media ratione in C, cuius maior portio sit AC: & similiter DE extrema, ac media ratione secetur in F, vt DF sit portio maior. Dico ut tota AB ad maiorem portionem AC, ita esse totam DE ad DF maiorem portionem. Quoniam enim rectangulum quidem ABC est æquale quadrato ex AC; rectangulum vero DEF æquale quadrato ex DF: erit vt rectangulum ABC ad quadratum ex AC, ita rectangulum DEF ad quadratum ex DF, & ut rectãgulum, quod quater cõtinetur AB BC ad quadratum ex AC, ita quod quater continetur DE EF ad quadratũ ex DF: componendoque vt quod quater cõtinetur AB BC vnà cum quadrato ex AC ad quadratum ex AC, ita quod quater continetur DE EF vnà cũ quadrato ex DF ad quadratum ex DF. ergo & vt quadratum ex vtraque AB BC ad quadratum ex AC, ita quadratum ex vtraque DE EF A
ad quadratum ex DF: & longitudine vt vtraque AB BC ad AC, ita vtraque DE E B
F ad DF: & componendo vt vtraque AB BC vnà cum AC ad AC, hoc est duę AB ad AC, ita utraque DE EF vnà cum DF ad DF, hoc est duę DE ad DF. & antecedẽtium dimidia, videlicet vt AB ad AC, ita DE ad DF.

COROLLARIVM.

Itaque hoc demonstrato videlicet qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, quam proportionem habet potens quadratum totius, & maioris portionis ad eam, quæ potest quadratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus C
ad latus icosaedri. atque hoc demonstrato vt latus cubi ad icosaedri latus, ita esse dodecaedri superficiem ad superficiem icosaedri in eadem sphæra descriptorum, & insuper hoc cognito vt D
dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse dodecaedrum ad ipsum icosaedrum, propterea quòd idem circulus comprehendit, & dodecaedri pentagonum, & icosahedri triangulũ: E
constat, si in ipsa sphæra describatur & dodecaedrum, & icosaedrum, eandem inter se proportionem habere, quam si recta linea extrema, ac media ratione secetur, habet potens quadratum totius & maioris portionis ad eam, quæ potest quadratum totius, ac minoris portionis.

Quoniam

Quoniam enim est vt dodecaedrum ad icosaedrum, ita dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, hoc est latus cubi ad icosaedri latus. vt autem latus cubi ad icosaedri latus, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, potens quadratum totius & maioris portionis ad eam, quæ potest quadratum totius & minoris portionis. ergo vt dodecaedrum ad icosaedrum, quæ in eadem sphæra descributur, ita qualibet recta linea extrema, ac media ratione secta, potens quadratum totius, & maioris portionis ad eã, quę potest quadratũ totius & minoris portionis.

F. C. COMMENTARIVS.

A Ergo & ut quadratum ex utraq; AB BC ad quadratum ex AC, ita quadratum ex utraque DE EF ad quadratũ ex DF] *Ex 8 secundi, est enim quod quater continetur AB BC vnà cum quadrato ex AC aequale quadrato ex AB BC tamquam ex vna linea. & similiter quod quater continetur DE EF vnà cũ quadrato ex DF aequale quadrato ex DE EF tamquam ex vna linea.*

B Et longitudine ut utraque AB BC ad AC, ita utraque DE EF ad DF] *Ex 22 sexti.*

C Eãdem habere cubi latus ad latus icosaedri] *Ex 5 huius.*

D Ita esse dodecaedri superficiem ad superficiem icosaedri in eadem sphæra descriptorum] *Ex quarta huius.*

E Ita esse dodecaedrum ad ipsum icosaedrum] *Ex 6 huius.*

QVARTIDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS ELEMENTORVM
LIBER QVINTVSDECIMVS ET SOLIDORVM QVINTVS.
vt quidam arbitrantur.

VT AVTEM ALII HYPSICLIS ALEXANDRINI DE QVINQVE CORPORIBVS LIBER SECVNDVS.

Cum Scholijs antiquis, & Commentarijs Federici Commandini Vrbinatis.

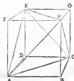


PROBLEMA I. PROPOSITIO I.



IN dato cubo pyramidem deſcribere.

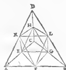
Sit datus cubus A B C D E F G H, in quo oportear pyramidem deſcribere. iungantur AC AE CE AH EH HC. itaque perſpicuum eſt triangula AEC AHE AHC CHE æquilatera eſſe. quadratorum enim diametri ſunt latera. pyramis igitur eſt AECH, & deſcripta eſt in dato cubo.



PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

In data pyramide octaedrum deſcribere.

Sit data pyramis A B C D, cuius latera ſecentur bifariã in pũctis EFGHKL, & HK HL EF FG iungantur, & reliquæ. quoniam igitur A B dupla eſt vtriuſque HK FG, erit HK ipſi GF æqualis, & parallela. Similiter & H G æqualis, & parallela ipſi F K. æquilaterum igitur eſt H K F G. Dico & rectangulum eſſe. ſi enim ab ipſa KL perpendiculares ducantur ad plana E F B G F C E G E F H G HKFG ſimiliter demonſtrabimus quæ in quadrato HKFG æquilatera eſſe.



A

B

F. C. COMMENTARIVS.

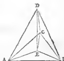
Quoniam igitur AB dupla eſt vtriuſque HK GF, erit HK ipſi GF æqualis & parallela] *Eſt enim HK ipſi AB parallela; namque ut DH ad HA, ita eſt DK ad KB. & eadem ratiũ* A 2. ſexti

9 undecimi. *tione demonstrabitur GF parallela ipsi AB. quae autem uni, & eidem sunt parallelę, & inter se parallelae sunt. ergo HK ipsi GF est parallela. triangula autem D AB D H K aequiangula sunt.*
29 primi & *namque angulus quidem DHK est aequalis angulo DAB; angulus vero DKH aequalis ipsi DBA,*
4 sexti. *& BAD vtrique communis. vt igitur AD ad DH, ita AB ad HK. estq; AD dupla ipsius DH.*
9 quinti. *ergo & AB ipsius HK est dupla. & eadem ratione erit AB dupla ipsius GF. quare HK ipsi GF*
32 primi. *est aequalis, atque est parallela, vt demonstratum fuit. quae autem aequales & parallelas coniungunt & ipsae aequales sunt, & parallelae. aequalis igitur & parallela est HG ipsi KF. suntq; HK KF inter se aequales, cum aequalium sint dimidiae. ergo HKFG aequilaterum est.*

Dico & rectangulum esse. *Vt hoc facile demonstretur duo lemmata pręmittenda sunt.*

LEMMA PRIMVM.

Si à vertice pyramidis ad basim perpendicularis ducatur, cadet ea in centrum circuli, qui circa basis triangulum describitur.



Sit pyramis ABCD, cuius basis triangulum ABC, & vertex D punctum: ducaturq; à puncto D ad basim perdendicularis D E. Dico E centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. Iungantur enim AE BE CE. & quoniam DE perpendicularis est ad planum trianguli ABC, & ad omnes rectas lineas, quae ipsam contingunt, quęq; in eodem sunt plano rectos angulos faciet. recti igitur anguli sunt DEA DEB DEC; ac propterea quadratum ex
47 primi *AD est aequale quadratis ex AE ED. & quadratum ex B D aequale quadratis ex BE ED. sunt autem quadrata ex AD DB aequalia, quòd aequales sint AD DB. ergo quadrata ex AE ED aequalia sunt quadratis ex BE ED. & dempto cõmuni quadrato ex ED, relinquentur quadrata ex AE EB inter se aequalia. ideoq; rectae lineae AE EB*
9 tertij. *aequales sunt. similiter demonstrabimus CE aequalem esse ipsis AE EB. quare punctum E centrum est circuli circa triangulum ABC descripti. quod demonstrare oportebat.*

LEMMA SECVNDVM.

Recta linea ab angulo trianguli æquilateri ducta per centrum circuli, qui circa triangulum describitur, basim bifariam secat.



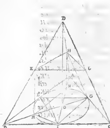
Sit triãgulum aequilaterum ABC, & circa ipsum circulus ABC, cuius centrum D: & ducta AD secet basim in puncto E. Dico BE ipsi EC aequalem esse: producatur enim AE vsque ad circuli circumferentiam in F. quoniam igitur AF per centrum transit, circuli erit diameter: ideoq; circumferentia ABF circumferentiae ACF est aequa-
28. tertij. *lis. circumferentia autem AB aequalis est circumferentiae AC, quòd recta linea AB sit aequalis ipsi AC. ergo & reliqua circumferentia*
27. tertij. *BF reliquae circumferentiae F C, & angulus B A E angulo EAC aequalis erit. itaque triãguli ABE duo latera BA AE aequalia sunt duobus lateribus CA AE trianguli AEC; & angulus BAE aequa-*
8. primi. *lis est angulo EAC. ergo & basis BE basi EC est aequalis. quod oportebat demonstrare.*

Potest etiam hoc probari ex tertia sexti libri, cum BA sit ęqualis ipsi AC.

COROLLARIVM.

Ex quibus, & ex tertia tertij constat rectam lineam ab angulo trianguli æquilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum describitur, ad basim perpendicularem esse.

His demonstratis ducatur à vertice pyramidis ABCD ad basis planũ perpendicularis, quae sit DO. erit O centrum circuli circa triangulum ABC descripti, ex primo lemmate eorum, quae nos praemisimus. Itaque per latus pyramidis BD, et per DO ducatur planum pyramidem secans. erit illud rectum ad planum basis ABC, atque erit eius, & trianguli ABC communis sectio BO, quae vlterius protracta cadet in G ex secũdo lemmate praemissorum; & erit ad ipsam AC perpendicularis. Eadem ratione si per latus pyramidis AD, & per DO intelligatur ductum aliud planum, ad basim rectum erit, & communis ipsorum sectio erit recta linea AOF ad ipsam BC perpendicularis. 18. undecimi



ducantur à punctis KH ad planum trianguli ABC perpendiculares KM HN. cadent hae in communes planorum sectiones ex 38 vndecimi, hoc est KM cadet in BO, & HN in ipsam AO: & BO AO in punctis MN bifariam diuidentur. Quoniam enim DO KM perpendiculares sunt ad idem planum inter se parallelae erunt. quare vt BK ad KD, ita est BM ad MO. sed BK est aequalis KD. ergo & BM ipsi MO aequalis erit. Eadem ratione demonstrabitur AN aequalis NO. & quoniam perpendicularis à circuli centro ducta ad latus trianguli aequilateri dimidia est eius, quae ex centro circuli, vt ad primam quartidecimi libri demonstrauimus; erit OF dimidia ipsius OA, & OG dimidia ipsius OB. & cum FO OG sint aequales, quoniã et ipsae AO OB quae ex circuli cẽtro; omnes AN NO OF BM MO OG inter se aequales erunt. centro igitur O, & interuallo vna ipsarum FO OG circulus descriptus etiam per puncta MN transibit. describatur, & NM MF iungantur. quòd cum triangula BDO BKM sint aequiangula, propterea quòd linea KM parallela est ipsi DO; erit vt DB ad BK, ita DO ad KM: estq; DB dupla ipsius BK. ergo & DO ipsius KM dupla erit. & ita demonstrabitur DO dupla ipsius HN. quare KM HN inter se aequales sunt. & sunt parallelae, quippe quòd ad idem planum sint perpendiculares. quae autem aequales, & parallelas coniungunt, & ipsae aequales, & parallelae sunt. aequalis igitur est & parallela MN ipsi KH. sed FG demonstrata est aequalis, & parallela eidem KH. ergo MN FG aequales sunt, & parallelae. angulus autem NMK est rectus: & similiter rectus NMF, quòd in semicirculo. quare cũ NM duabus rectis lineis KM MF se inuicẽ secantibus in cõi sectione ad rectos angulos insistat, ẽt ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit. ergo NM perpẽdicularis est ad planũ trianguli KMF. Sed demonstrata est FG parallela ipsi MN. quare & FG ad idem planũ perpendicularis erit. ideoq; angulus GFK est rectus sunt autem anguli GFK FGH duobus rectis aequales. ergo & rectus est FGH: & similiter recti, qui ipsis opponuntur. ex quibus sequitur HK FG & aequalaterum esse, & rectangulum. quod oportebat demonstrare.

6. undecimi. 2. sexti.

4. sexti.

9. quinti. 6. undecimi. 33 primi.

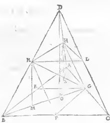
4. undecimi

8 undecimi.

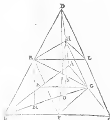
29. primi.

34 primi.

ALITER. Ductis KM HN perpendicularibus, ut in antecedẽti figura, iungantur HF KG. & quoniam perpendicularis BG est aequalis ipsi AF; est enim AB ad vtramq; ipsarũ, vt 4 ad 3, quod nos demonstrauimus ad 12



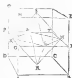
tertijdecimi libri. sed & BM est equalis AN: erit & reliqua MG reliquae NF equalis· atque est KM aequalis HN. trianguli igitur KMG duo latera GM MK equalia sunt duobus lateribus FN NH trianguli HNF: & angulus GMK rectus est aequalis recto FNH. ergo et basis KG basi FH est aequalis. rursus. quoniam duo latera FK KH equalia sunt duobus lateribus GH HK, & basis FH est aequalis basi GK; erit angulus FKH aequalis angulo GHK. & sunt duobus rectis aequales. vterque igitur ipsorum est rectus, itemq; recti, qui ipsis opponuntur. ergo HKFG rectangulum est. quod oportebat demonstrare.



PROBLEMA III. PROPOSITIO. III.

In dato cubo octaedrum describere.

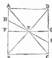
A Sit datus cubus ABCDEFGH: & sumantur
centra insistentium quadratorum KLMN Dico
B KLMN quadratum esse. ducantur per KLMN
C parallelæ PO OX XT TP. Quoniam igitur P
O quidem dupla est ipsius OK, XO autem du-
D pla ipsius OL, suntque æquales PO OX; erunt
E & KO OL inter se æquales. quadratum igitur
ex KL duplum est quadrati ex OL. eadem ratio
ne & quadratum ex ML duplum est quadrati
F ex LX. ergo quadratum ex KL quadrato ex LM
est æquale. æquilaterum igitur est KLMN, & cō
H stat rectangulum esse. sumantur duo quadrata
BD EG; ipsorūque centra R S, & iungantur RK RL RM RN SK SL SM SN.
K perspicuum est triangula, quæ octaedrum efficiunt æquilatera esse. quod eadem
ratione demonstrabimus.



F. C. COMMENTARIVS.

A Et sumātur centra insistentium quadratorum] *videlicet quadratorum CA AE EC
CG; centra autem quadratorum dicit centra circulorum, qui circa quadrata describuntur.*
B Ducātur per KLMN parallelę PO OX XT TP] *Hoc est ducatur PO parallela alteru-
tri ipsarum DA GH: & OX parallela alterutri ipsarum AB HE, & sic in alijs.*
C Quoniam igitur PO quidem dupla est ipsius OK, XO autem dupla ipsius OL]
Centrum enim eas bifariam secat, vt monstrabitur.

Sit quadratum ABCD, & ducantur diametri AC BD conuenientes in puncto E: perq; E ducatur FG alterutri ipsarum AD BC parallela. Dico FE ipsi EG ęqualem esse.



29 primi *Angulus enim FAE est aequalis angulo GCE, et angulus A*
15 primi. *EF angulo CEG ad verticem enim sunt. reliquus igitur reliquo*
aequalis, & triangulum triangulo simile. quare ut AE ad EF,
ita est CE, ad EG. & permutando ut AE ad EC, ita FE ad EG.

atque

atque est AE aequalis EC, quòd AE sit circuli diameter, & E centrum eiusdem. ergo FE ipsi EG ęqualis erit. centrum autem non solum ipsam FG bifariam secat, sed & alias omnes, quae in quadrato per ipsum ducuntur. quod eodem modo demonstrabimus.

Suntq; æquales PO OX] *Est enim PO aequalis DA, & OX aequalis AB ex 34 primi. quare PO ad OX est vt DA ad AB: & sunt DA AB inter se aequales. ergo & PO OX aequales erunt.* D

Quadratum igitur ex KL duplum est quadrati ex OL] *Est enim quadratum ex KL ęquale quadratis ex KO OL ex 47 primi.* E

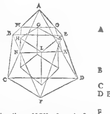
Ergo quadratum ex KL quadrato ex LM est ęquale] *Ex quo sequitur & rectam lineã KL ipsi LM aequalem esse. sed & aliter demonstrare possimus. Quoniam enim duo latera KO OL sunt aequalia duobus lateribus LX XM, & angulus ad O rectus est aequalis recto ad X; erit & basis KL basi LM aequalis ex 4 primi. et eodem modo demonstrabitur LM aequalis MN, et OK aequalis KN. quare omnes inter se aequales sint necesse est.* F

Et constat rectangulum esse] *Quoniam enim KO est aequalis OL, & angulus KOL est rectus, erit angulus KLO recti dimidius; & ob eandem caussam angulus MLX est dimidius recti. reliquus igitur KLM rectus est. sunt enim tres anguli duobus rectis aequales. Eadem ratione & vnusquisque aliorum angulorum LMN MNK NKL rectus demonstrabitur.* G

Perspicuum est triangula, quæ octaedrum efficiunt æquilatera esse. quod eadem ratione demonstrabimus] *Iisdem enim argumentis probabimus KSMR NSLR aequilatera esse, & latera eorum ipsis KLMN aequalia.* H

PROBLEMA IIII. PROPOSITIO. IIII.

In dato octaedro cubum describere.



Sumantur centra circulorum, quæ sunt circa
triangula ABE ABC ACD ADE, quæ sint G
HKL, & GH GK LK LH iungantur. Dico GH
KL quadratum esse. ducantur per GHKL ipsis
EB BC CD DE parallelæ OM MN NX XO.
quoniam igitur æquilaterum est ABC triangu- A
lum, recta linea, quæ à pũcto A ducitur ad H cẽ
trum circuli circa triangulum ABC descripti bi
fariam secat trianguli angulum, qui est ad A.
ęqualis igitur est MH ipsi HN. Eadem ratione
& MG est æqualis GO. quoniam autem MN est B
ęqualis MO, & MO ipsi OX; erit & HM ęqualis
MG, & GO ipsi OK; suntq; anguli HMG GOK C
recti. ergo HG ipsi GK est ęqualis. Eadem ratio D E
ne & reliquæ æquales erunt. cum igitur paralle-
logrammum sit GHKL in uno erit plano. & cũ
vterque angulorum MGH OGK sit dimidius recti, reliquus HGK rectus erit. simi F
liter & reliqui. quadratum igitur est GHKL. possumus autem à principio sumentes
centra GHKL, ducentesq; parallelas MN NX XO OM iungere GH HL LK KG, &
dicere GHKL quadratum esse. quòd si sumentes reliquorum triangulorum centra,
ipsa iungamus, ostendentur & reliqua quadrata esse, habebimusq; in dato octaedro
descriptum cubum. quod facere oportebat.

F. C. COMMENTARIVS.

Quoniam igitur æquilaterum est ABC triangulum, recta linea, quæ à puncto A ducitur ad H centrum circuli circa triangulum ABC descripti bifariam secat trianguli angulum, qui est ad A. ęqualis igitur est MH ipsi HN] *Superius enim demonstratũ est rectam lineam ab angulo trianguli ęquilateri ductam per centrum circuli, qui circa triangulum describitur* A

describitur basim bifariam secare. sequitur etiam hoc ex demonstratis in decima primi libri. quod si per centrum H ducatur MN ipsi BC parallela, demonstrabitur eadem ratione MH aequalem esse ipsi HN, cum MA ipsi AN sit aequalis, fiunt enim triangula BAC MAN inter se similia.

B Quoniam autem NM est æqualis MO, & MO ipsi OX, erit & HM æqualis MG, & GO ipsi OK] *Cum enim rectae lineae NM MO parallelae sint ipsis CB BE, erit triangulum AMN triangulo ABC simile, & triangulum AMO simile triangulo ABE. vt igitur CB ad BA, ita est NM ad MA. & vt AB ad BE, ita AM ad MO. quare ex aequali vt CB ad BE, ita NM ad MO. sed CB est aequalis ipsi BE; ponitur enim BCDE quadratum. ergo & MN ipsi MO est aequalis. & eadem ratione MO ipsi OX aequalis demonstrabitur. est autem HM dimidia ipsius MN, & MG dimidia ipsius MO. quare sequitur HM ipsi MG aequalem esse, & ita GO equalem ipsi OK.*

C Suntq; anguli HMG GOK recti] *Quoniam enim rectae lineae NM MO parallelae sint ipsis CB BE, atque est angulus CBE rectus; & NMO angulus rectus erit, ex 10 vndecimi.*

D Ergo HG ipsi GK est æqualis [*Ex 4 primi.*

E Cum igitur parallelogrammum sit GHKL in vno erit plano] Omne enim parallelogrammum est in vno plano.

Sit parallelogrammum ABCD, & iungantur AC BD, quae se se in puncto E secent. erit triangulum ABC in vno plano ex 2 vndecimi. itemq; in vno plano. triangulum ACD. sed et triangulum BCD est in vno plano. quare triangulum DEC, hoc est totum triangulum ACD est in eodem plano, in quo triangulum BEC, hoc est ipsum ABC. totum igitur parallelogrammum ABCD in uno plano erit. quod oportebat demonstrare.



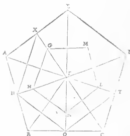
F Et cum vterque angulorum MGH OGK sit dimidius recti, reliquus HGK rectus erit] *Sunt enim triangula HMG GOK aequicruria, et anguli ad M, et O recti; ut demonstratum iam est.*

Ex iam demonstratis apparet quomodo in dato octaedro pyramis describatur. *Si enim in dato octaedro cubum, et rursus in cubo pyramidem describamus, et pyramis in dato octaedro descripta erit.*

A PROBLEMA V. PROPOSITIO V.

In dato icosaedro dodecaedrum describere.

A Exponatur pentagonum icosaedri ABCDE, & sumantur centra circulorũ, qui sunt circa triãgula AFE AFB BFC CFD DFE, uidelicet GHKLM, iunganturq; GH HK KL LM MG. & rursus iũctæ FG FH FK producãtur ad pũcta XNO, quæ rectas lineas EA AB BC in XNO punctis bifariam secabũt: atq; erit vt XN ad NO, ita GH ad HK. equalis igitur est & HN ipsi KO. similiter autem & reli-



qua pentagoni GHKLM la-
tera æqualia ostendentur. Di-
co & æquiangulum esse. Quo
niam enim duæ XN NO pa-
rallelæ duabus GH HK ęqua E
les angulos continent, & reli-
qua manifesta sunt. Intelliga-
tur à puncto F ad planum pē-
tagoni ABCDE ducta perpē
dicularis, quæ cadet in centrū
circuli circa pētagonū descri F
pti. si igitur à pūcto N ad pun
ctum, in quod dicta perpendi
cularis cadit, rectam lineā du
camus, & per H ducamus ipsi parallelam, perspicuum est eam perpendiculari oc- G
currere, & cum ipsa rectum angulum continere. Rursus si à punctis XO ad cētrum
circuli circa pentagonum descripti rectas lineas iungamus, & à puncto, in quo li-
nea per H ducta perpendiculari occurrit ad G K rectas lineas ducamus, manifestū H
est ipsas cum eadem perpendiculari rectos angulos continere. Ex quo perspicue cō K
stat pentagonum GHKLM in vno esse plano.

F. C. COMMENTARIVS.

Exponatur pentagonum icosaedri ABCDE] *Hoc est pentagonum descriptum in circu-* A
lo, à quo icosaedrum ortum habet, vt in 16 tertiidecimi.

Quę rectas lineas EA AB BC in X N O punctis bifariam secabunt] *Ex ijs, quae* B
nos in antecedente demonstrauimus.

Atque erit vt XN ad NO, ita GH ad HK] *Quoniam enim triangula AFE AFB BFC* C
aequilatera sunt, & aequalia, erunt perpendiculares, quae ab angulo F ad basim ducuntur, vide-
licet FX FN FO inter se aequales. latus enim trianguli aequilateri ad perpendicularem, quae
ab angulo ad basim ducitur, eam proportionem habet, quam 4 ad 3, vt nos demonstrauimus ad 12
tertiidecimi. Rursus quoniam GHK sunt centra circulorum, qui circa triangula describuntur, erūt
& ipsae, quae ex centris FG FH FK aequales. ergo & reliquae aequales sunt, nempe GX HN
KO. sunt autem aequales EA AB BC. & earum dimidiae EX XA AN NB BO OC. cū igi-
tur duo latera trianguli ANX, videlicet XA AN aequalia sint duobus lateribus NB BO trian-
guli BON; & anguli ad AB sint aequales, ponitur enim pentagonum ABCDE aequilaterum, &
aequiangulum: erit & basis XN basi NO aequalis. sed vt FG ad GX, ita est FH ad HN: est enim
vtraque vtriusque dupla, vt ad primam quartidecimi demonstratum est. ergo GH parallela est ip
si XN. & eadem ratione HK ipsi NO est parallela. triangulum igitur FGH simile est triangulo F
XN, & triangulum FHK simile ipsi FNO: ideoq; vt NX ad HG, ita est NF ad FH. vt autem NF
ad FH, ita NO ad HK. quare vt NX ad HG, ita NO ad HK: & permutando vt XN ad NO, ita
GH ad HK. sunt autem aequales XN NO. ergo & GH HK aequales sint necesse est.

Aequalis igitur est & HN ipsi KO] *Vide ne potius legendum sit aequalis igitur est & GH* D
ipsi HK propter ea, quae sequuntur.

Quoniam enim duæ XN NO parallelæ duabus GH HK æquales angulos conti- E
nent. & reliqua manifesta sunt] *Nam cum duae XN NO sese contingentes duabus GH HK*
sese contingentibus sint parallelae, non autem in eodem plano; aequales angulos continebunt. er- 10.undecimi
go angulus GHK est aequalis angulo XNO. & similiter bifariam secta CD in T, & iuncta OT, erit
angulus HKL aequalis angulo NOT. sed anguli XNO NOT sunt aequales, ut monstrabitur. ergo
& GHK HKL anguli aequales erunt. & similiter reliqui. Quoniam enim triangula AXN BON
CTO aequicruria sunt similia, & aequalia, erūt anguli AXN ANX BNO BON COT inter se ę-
quales. ergo reliquus ex duobus rectis XNO est aequalis reliquo NOT: itemq; reliqui aequales
ostendentur.

Quæ cadet in centrum circuli circa pentagonū descripti] *Cadat enim in punctum V,* F
&

& intelligatur iunctae AV BV CV. Quoniã igitur FV perpẽdicularis est ad planũ pentagoni, 3 dif. undecimi. *erunt anguli AVF BVF CVF recti; & ob id quadratum ex AF aequale duobus quadratis ex AV VF: & quadratum ex BF ęquale duobus ex BV VF. sed quadratum ex AF est aequale* 47 primi. *quadrato ex BF, quòd AF ipsi FB sit aequalis. ergo quadrata ex AV VF quadratis ex BV VF sunt aequalia, & dempto communi quadrato ex FV, erit reliquum quadratum ex AV aequale reliquo ex VB, & recta linea AV ipsi VB aequalis. Eadem ratione & recta linea CV aequalis* 9 tertij. *ostendetur ipsis AV VB. ergo V est centrum circuli circa pentagonum descripti. quod demonstrare oportebat.*

G Perspicuum est eam perpendiculari occurrere, & cum ipsa rectum angulum con- 2. undecimi. tinere] *Nam cum triangulum FNV sit in vno plano, si recta linea à puncto H ducta non occurreret perpendiculari, parallela non esset ipsi NV, quod non ponitur. sunt enim parallelę in eodem plano ex 35 diffinitione primi libri. Occurrat autem perpendiculari in puncto Z. cum igitur angulus NVF sit rectus ex 3. diffi. vndecimi, erit ex 29 primi & HZF rectus.*

H Manifestum est ipsas cum eadem perpendiculari rectos angulos continere] *Quo-* 2. sexti. *niam. n. HZ est parallela ipsi NV; erit ut FZ ad ZV, ita FH ad HN. sed vt FH ad HN, ita FG ad* 11. quinti. *GX. vt igitur FZ ad ZV, ita FG ad GX. quare GZ est parallela ipsi XV; angulusq; GZF est rectus, nempe ipsi recto XVF aequalis. & eadem ratione angulus KZF rectus erit: iunctisq; LZ MZ similiter demonstrabitur angulos LZF MZF esse rectos.*

K Ex quo perspicue constat pentagonum GHKLM in vno esse plano] *Ex quinta undecimi. nã recta linea FZ tribus rectis lineis se se tangentibus ZG ZH ZK ad rectos angulos insistit. Si igitur reliquis icosaedri angulis eodem modo pentagona subtendemus in dato icosaedro dodecaedrum descriptum erit.*

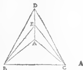
De quinque figurarum lateribus, & angulis.

Oportet autem scire, si quis interroget nos, quot latera icosaedrum habeat, ita respondendum esse. Patet icosaedrum contineri viginti triangulis, & vnumquodque triangulum ex tribus rectis lineis constare. multiplicabimus igitur viginti triangula per numerum laterum trianguli. fient sexaginta; cuius dimidium triginta. similiter autem & in dodecaedro. quoniam enim duodecim pentagona dodecaedrum continent, & vnumquodque pentagonum habet quinque rectas lineas, multiplicabimus decies quinque, & erunt sexaginta, cuius rursus dimidium triginta. dimidium autem idcirco accipimus, quòd singula latera siue sit triangulum, siue pẽtagonum, siue quadratum, vt in cubo, bis sumuntur. Eadem via, & ratione vtentes & in cubo, & in pyramide, & in octaedro latera inuenienus. si vero singularum quinque figurarum anguli inueniendi sint, rursus eadem facientes partiemur per numerum planorum, quæ vnum solidi angulum continent; vt quoniam incosaedri angulum continent quinque triangula, partiemur per quinque. erunt duodecim anguli in icosaedro. quoniam autem tria pentagona dodecaedri continent angulum, partiemur per tria, & habebimus angulos viginti in dodecaedro. similiter in reliquis figuris anguli inuenientur.

De inclinatione planorum, quæ singulas quinque figuras continent.

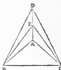
Quæsitum est quo modo in vnaquaque solidarum quinque figurarum quolibet plano dato eorum, quæ ipsam continent, inclinatio inueniatur. Inuentio autem, vt narrauit Isidorus magnus præceptor noster, hoc modo se habet. In cubo quidem plana, quæ ipsum continent, ad rectos inter se angulos inclinari manifestum est. Cubi planorum inclinatio. In pyramide vero exposito vno triangulo centris quidem terminis vnius lateris, interuallo autem recta linea, quę à vertice trianguli ad basim perpendicularis ducitur, circumferentiæ descriptæ se mutuo secent; & à sectione ad centra iunctę rectæ lineæ continebunt inclinationem planorum, quę pyramidem comprehendunt. Pyramidis. At in octaedro à latere trianguli descripto quadrato, & centris quidem terminis diametri, interuallo autem similiter perpendiculari, quæ à uertice trianguli ad basim ducitur; describantur circumferentiæ; & rursus rectæ lineę à communi sectione ad centra iunctæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis eius, quam inquirimus. Octaedri planorum inclinatio. In icosaedro autem à latere trianguli descripto pentagono, iungatur recta linea, quę duobus lateribus subtenditur: & centris quidē terminis eius, interualloq; perpendiculari ipsius trianguli descriptis circumferentijs rectæ lineę à communi sectione ad centra iunctę continebunt similiter angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum ipsius icosaedri. Icosaedri planorum inclinatio. Denique in dodecaedro exposito vno pentagono, & iuncta similiter recta linea, quę duobus lateribus subtenditur, centris quidem terminis ipsius, interuallo autem perpendiculari, quæ à bipartita sectione ad latus pē tagoni ipsi parallelum ducitur; describantur circumferentiæ; & à puncto, in quo conueniunt ad centra similiter iunctæ rectæ lineę continebunt reliquum ex duobus rectis, inclinationis planorum dodecaedri. Dodecaedri planorum inclinatio.

Hunc quidem vir ille clarissimus de prędictis sermonem habuit, cum demonstratio eorum sibi manifesta videretur. sed vt contemplatio demonstratiua perspicue appareat, sermonem in vnoquoque explicabo, & primum in pyramide.



Intelligatur pyramis quattuor triangulis æquilateris contenta ABCD, cuius basis ABC, & vertex D punctum. secto autem latere AD bifariam in E, iungantur BE EC. Et quoniam æquilatera sunt ADB ADC triangula, & bifariam secta est AD, erunt BE EC ad ipsam AD perpendiculares. Dico angulum BEC acutum esse.

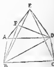
A



Quoniam enim AC dupla est ipsius AE, erit quadratum ex AC quadrati ex AE quadruplum. Sed quadra
47 primi. tum ex AC æquale est quadratis ex AE EC, quorum
B quadratum ex AC ad quadratū ex CE proportionem
C habet, quam 4 ad 3: atque est CE ipsi EB æqualis. quadratum igitur ex BC minus est quadratis ex BE EC; ideoque angulus BEC est acutus. quòd cum duorum planorum ABD ADC communis sectio sit AD, & communi sectioni ad rectos angulos occurrant in vtroque planorum rectæ lineæ BE EC, quæ acutum angu-
D lum continent. erit angulus BEC planorum inclinatio, atque est data; datur enim BC latus existens trian-
E guli, & vtraque ipsarum BE EC est perpendicularis trianguli æquilateri. centris igitur BC, hoc est terminis vnius lateris, & intervallo trianguli perpendiculari descriptę circumferentiæ se inuicem secent in puncto E: & ab eo ad BC iunctæ rectæ lineæ planorum inclinationem continebunt. hoc autem est, quod dicebatur. atque illud (centris quidem BC, interuallo autem trianguli perpendiculari descripti circuli se mutuo secent,) manifestum est. vtraque enim BE EC maior est, quàm dimidia ipsius BC: & centris BC, & interuallo ipsius BC dimidia descripti circuli se se tangunt. si autem minor sit, neque se tangunt, neque secant: quòd si maior omnino secant; & ita de pyramide sermo & manifestus, & demonstrationibus congruens apparet.



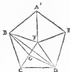
Intelligatur rursus in quadrato ABCD pyramis verticem habens punctum E, & continentia ipsam præter basim triangula æquilatera. erit autem ABCDE pyramis dimidia octaedri. secetur latus vnius trianguli AE bifariam in F: & BF FD iungantur. sunt igitur BF FD & æquales inter se, & ad ipsam AE perpendiculares. Dico angulum BFD obtusum esse. iungatur enim BD; & quoniam quadratum est AC, cuius diameter BD, erit quadratum ex BD quadrati ex DA duplum. quadratum autem ex DA ad quadratum ex DF proportionem habet, vt proxime dictum est, quam 4 ad 3. ergo & quadratum ex BD ad quadratum ex DF proportionem ha-
F bebit, quam 8 ad 3. est autem DF æqualis FB. quadratum igitur ex BD maius est quadratis ex BF FD, ac propterea angulus BFD est obtusus. & quoniam duorum planorum ABE ADE se inuicem secantium communis sectio est AE, & ipsi ad rectos angulos in vtroque plano du-
G ctæ sunt BF FD, angulum obtusum continentes; erit angulus BFD reliquus ex duobus rectis, inclinatio planorum ABE ADE. si igitur angulus BFD datus sit, & dicta inclinatio dabitur. Itaque quoniam trianguli octae-

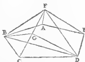


H dri datum est, & unum eius latus est AD, à quo quadratum AC describitur; datur & BD diameter existens quadrati. sed & BF FD trianguli perpendiculares datæ sunt. ergo & angulus BFE dabitur. descripto igitur quadrato à latere trianguli, ut AC, & iuncta diametro BD, si centris quidem BD; interuallo autem perpendiculari trianguli circulos describamus, se mutuo secabunt in F: & rectæ lineæ à puncto F ad centra ductæ continebunt inclinationem BFD, quæ quidem est reliqua ex duobus rectis, vt dictum est, inclinationis planorum. & hoc loco patet vtramque ip arum BF FD maiorem esse, quàm ipsius BD dimidiam. ideoque in constructione organica necesse est circulos se mutuo secare. constat etiam ex demonstratione ipsam BD ad DF potentia proportionem habere. quam habet 8 ad 3, & dimidiæ eius potentia esse quadruplam. ergo utraque ipsarum BF FD maior

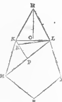
ior est quàm dimidia ipsius BD . & hęc quidem de **octaedro dicta sint.**

In icosaedro autem intelligatur pentagonum
ęquilaterum ABCDE,& in hoc pyramis uerticē
habens punctum F, ita vt continentia ipsam
triangula sint ęquilatera . erit ABCDE pyramis
figuræ icosaedri pars . secetur latus unius trian-
guli FC bifariam in G, & BG GD iungantur.
erunt utique & æquales, & ad ipsam FC perpen
diculares. Dico angulum BGD obtusum esse,
quod per se se manifesto constat. Iuncta enim B K
D obtusum angulum BCD pentagoni subtēdit :
hoc autem maior est angulus BGD:nam BG G L
D ipsis BC CD sunt minores. similiter ijs,quę
proxime dicta sunt, patet angulum BGD esse
eum, qui relinquitur ex duobus rectis inclina-
tionis BFC CFD triangulorum. hoc autem da
to,dabitur & planorum icosaedri inclinatio. à la
tere enim trianguli icosaedri descripto pentago
no, & recta linea, quæ duobus pentagoni late-
ribus subtenditur, vt in figura est BD data : &
similiter datis BG GC perpendicularibus trian
gulorum, dabitur & BGD angulus. nam si cen

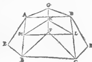




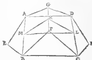
tris quidem terminis ipsius BD,quę duobus pentagoni lateribus subtenditur, in-
teruallo autem perpendiculari trianguli circuli describantur, se inuicem secabunt,
vt in G: & rectæ lineę à puncto G ad centra BD ductæ continebunt angulum, qui
ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum. & hoc loco ex figura mani-
festum est vtramque BG GD maiorem esse, quàm dimidiam ipsius BD. quam-
quam ita esse ex constructione organica demonstrari potest. intelligatur enim seor
sum triangulum ęquilaterum HKL, & ab ipsa KL penta-
gonum describatur KMNXL· iunctaque ML ducatur HO
perpendicularis trianguli HKL. Dico HO maiorem esse
dimidia ipsius ML, quæ inclinationē planorum subtendit.
ducta enim a puncto K ad ML perpendiculari KP, quoniā M
angulus KLP maior est tertia parte recti, hoc est maior au
gulo KHO; constituatur angulo KHO æqualis angulus P
LR. ergo PL est perpendicularis æquilateri trianguli, cu-
ius latus est RL; ac propterea quadratum ex RL ad qua-
dratum ex LP proportionem habet, quam 4 ad 3. sed ma N
ior est KL quam LR. ergo quadratum ex KL ad quadratū
ex LP maiorem habet proportionem, quam 4 ad 3. habet
autem & ad quadratum ex HO proportionem eam, quam
4 ad 3. ergo KL ad LP maiorem proportionem habet,quā
ad HO. maior igitur est HO quàm LP. O



In dodecaedro autem hoc modo. intelligatur unum cu P
bi quadratum, à quo dodecaedrum describitur ABCD,
& duo plana dodecaedri AEBFG GD
HCF. Dico & sic datam esse duorum pē
tagonorum inclinationem. secetur FG
bifariam in K; & à puncto K ipsi FG ad
rectos angulos ducantur in vtroque pla
norum KL KM: & ML iungatur. Itaque
primum dico angulum MKL obtusum es
se. ostensum enim est in tertiodecimo li
bro elementorum,& in constitutione do



decaedri, rectam lineam, quæ à puncto K ad quadratum ABCD perpendicularis ducitur, dimidiam esse lateris pentagoni. quare minor est quàm dimidia ipsius ML. ideoque angulus MKL est obtusus. simul autem demonstratum est in eodem theoremate, quadratum quidé ex KL æquale esse & dimidij lateris cubi quadrato, & quadrato dimidij lateris pétagoni, ita vt KL, & KM inter se æquales maiores sint, quàm dimidia ipsius ML. angulo igitur MKL dato reliquus ex duobus rectis, hoc est inclinatio planorum data erit. Itaque quoniam latus quadrati ABCD duobus lateribus pentagoni subtenditur, & datú est pentagonum; erit & ML data. data autem est & vtraque ipsarum MK KL; perpendiculares enim sunt à bipartita sectione rectæ lineæ AB, quæ duobus lateribus subtenditur ad latus pentagoni ipsi parallelum, ut ad FG. ergo angulus LKM datus est, nempe reliquus ex duobus rectis, vt dictú est, inclinationis eius, quã inquirimus. pulchre igitur in constructione organica dixit, oportere dato pentagono iungere rectam lineam duobus lateribus subtensam, quæ lateri cubi est æqualis: & centris quidem terminis ipsius, internallo autem perpendiculari, quę a bipartita sectione ad latus pentagoni parallelum agitur, vt in figura sunt KL KM, describere circumferentias, atque à púcto, in quo conueniunt ad centra rectas lineas ducere, quę continent angulum reliquum ex duobus rectis, inclinationis planorum. at uero perpendicularem KM maiorem esse dimidia ipsius ML iam dictum est, vt in elemétis simul est demonstratú.



F. C. COMMENTARIVS.

A Et quoniam ęquilatera sunt ADB ADC triangula, & bifariam secta est AD, erũt BE EC ad ipsam AD perpendiculares] *Ex ijs, quae nos ad 12 tertijdecimi libri demonstrauimus.*

B Quorum quadratum ex AC ad quadratum ex CE proportionem habet, quam 4 ad 3] *Ex demonstratis in eodem loco.*

C Quadratum igitur ex BC minus est quadratis ex BE EC] *Est enim quadratum ex BC ad quadrata ex BE EC, vt 4 ad 6.*

D Erit angulus BEC planorum inclinatio] *Ex 6. diffinitione vndecimi libri.*

E Et vtraque ipsarum BE EC est perpendicularis trianguli ęquilateri] *Dato autem latere trianguli aequilateri, & perpendicularis dabitur ex secunda libri datorum. est enim latus trianguli aequilateri ad perpendicularem, vt 4 ad 3.*

F Quadratum igitur ex BD maius est quadratis ex BF FD] *Est enim quadratum ex BD ad quadrata ex BF FD, vt 8 ad 6.*

G Erit angulus BFD reliquus ex duobus rectis inclinationis planorum ABE ADE] *Est enim plani ad planum inclinatio acutus angulus rectis lineis contentus, quae ad rectos angulos communi planorum sectioni ad vnum ipsius punctum in vtroque planorum ducuntur. quare dempto BFD angulo obtuso ex duobus rectis relinquetur acutus angulus, qui est inclinationis planorum ABE ADE. & cum angulus BFD datus sit, & inclinatio planorum detur necesse est ex quarta libri datorum.*

H Datur & BD diameter existens quadrati] *Ex 26 libri datorum.*

K Iuncta enim BD obtusum angulum BCD pentagoni subtendit] *Angulus namque pentagoni constat ex recto, & quinta recti parte.*

L Hoc autem maior est angulus BGD, nam BG GD ipsis BC CD sunt minores] *Ex 21 primi. sunt enim BG GD minores, sed maiorem angulum continent.*

M Quoniam angulus KLP maior est tertia parte recti] *Angulus enim pentagoni MKL continet rectum, & recti quintam, vt dictum est. ergo anguli KML KLM sunt quattuor quę*

tae recti, & ipse KLM duae quintae. duae autem quintae ad tertiam recti proportionem habent eam, quam 6 ad 5.

Sed maior est KL quàm LR] *Iuncta enim MR, erunt duae MK KL maiores MR RL ex* N
21 primi. ergo & dimidia KL quam dimidia LR maior erit.

Maior igitur est HO quàm LP] *Ex 10 quinti.* O

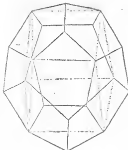
Intelligatur unum cubi quadratum, à quo dodecaedrum describitur] *Ad constitu* P
tionem enim dodecaedri vtitur ipsius cubi quadratis, vt in 17 tertydecimi apparet.

Ex ijs aũt quæ proxime tradita sunt, & ex demonstratis in 17 tertjdecimi libri cõstat, quomodo in dato dodecaedro cubus describatur.

Quoniam enim in dodecaedri constitutione cubi planis vtimur, & ad singula eius latera singula pentagona dodecaedri describimus, si in dodecaedro iam facto apposite ducamus rectas lineas, quae duobus cuiusque pentagoni lateribus subtendantur, cubus ipse constitutus erit, vt in sequenti figura apparere potest.

Ex quibus iam perspicuum est quomodo in dato dodecaedro tum pyramis ipsa, tum octaedrum describatur.

Nam si in dodecaedro cubum, & rursus in cubo pyramidem vel octaedrum describamus, & pyramis, & octaedrum in dato dodecaedro descripta sint necesse est.



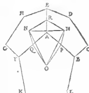
In dato icosaedro cubum describere.

Primum in icosahedro dodecaedrum describemus, vt in 5 huius dictum est; deinde in dodecaedro cubum, & ita cubus in dato icosaedro descriptus erit.

In dato icosaedro pyramidem describere.

Si enim describamus ex antecedenti in icosaedro cubum, & in cubo pyramidem ex prima huius, erit pyramis quoque in icosaedro descripta.

In dato dodecaedro icosaedrum describere.

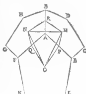


Exponatur dodecaedri angulus aliquis A, contentus tribus pentagonis ABCDE AFGHE, AFKLB: sumanturq́; centra circulorum, qui circa pentagona describuntur MNO, & ab ipsis ad latera pentagonorum perpendiculares ducantur MP OP NQ OQ MR NR: & MN NO OM iungantur. erunt ex iam demonstratis MPO OQN NRM anguli inclinationis planorum ipsius dodecaedri, & idcirco inter se aequales:

itemq́;

itemq́; aequales perpendiculares ipsae. quare trianguli MOP duo latera MP PO aequalia sunt duobus lateribus MR RN trianguli MNR: & angulus MPO est aequalis angulo MRN. basis igitur OM est aequalis basi MN. & ita demonstrabitur basis ON ipsi NM aequalis. ex quibus constat triangulum MNO aequiangulum esse. ergo si reliquis dodecaedri angulis triangula aequilatera eodem modo subtendantur, descriptum erit icosaedrum. sunt enim omnes anguli ipsius dodecaedri numero viginti, quot sunt icosaedri triangula. In dato igitur dodecaedro icosaedrum descriptum est. quod facere oportebat.

4 primi.



EVCLIDIS ELEMENTORVM FINIS.



PISAVRI

CVM LICENTIA SVPERIORVM.

APVD CAMILLVM FRANCISCHINVM.

M. D. LXXII.



y que tenga Vmd. [illegible] quat [illegible]

~~[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]~~ y fue a la fa-

milia